

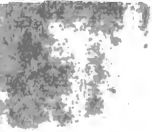
**EXAMEN MARITIME,
THÉORIQUE ET
PRATIQUE, OU TRAITÉ
DE MÉCANIQUE,
APPLIQUÉE A LA...**

Georges Juan, Levéque

~~19 3147~~

KW 233
E20

~~6.2.20~~



E X A M E N
MARITIME.

NOMS DES LIBRAIRES

Chez lesquels se trouve cet Ouvrage.

Paris.	{	CLAUDE-ANTOINE JOMBERT, fils aîné, rue Dauphine.	Caën.	LE ROY.
	{	ALEXANDRE JOMBERT jeune, rue Dauphine.	Le Havre.	{ FAURE. L'AIGUILLON.
	{	PISSOT, quai des Augus- tins.	L'Orient.	BAUDOUIN.
	{	DURAND, neveu, rue Galande.	Vannes.	Veuve GALLES & Fils.
Verfailles.		BLAIZOT.	St. Malo.	{ HOVUS, pere & fils. VALAIS.
Lyon.	{	LOUIS ROSSET.	Rennes.	{ ROBIQUET. REMELIN.
	{	J.M. BRUYSET, pere & fils.	Bayonne.	{ FAUVEL. TREBOSC.
	{	BERNUZET.	Dunkerque.	LAURENZ.
	{	LE ROY.	Toulon.	RAIMOND MALLARD.
Bordeaux.	{	BARRET.	Amsterdam.	{ Les Héritiers VAN HARR- wet.
	{	Les Freres LABOTTIERE.	La Haye.	GOSSE.
	{	CHAPPUIS, freres.	Hambourg.	KONIG.
Rouen.	{	PALLANDRE, l'aîné.	Londres.	{ EMSLEY. NOURSE. CADELL.
	{	V ^e DUMESNIL & L'ABBÉ.	Madrid.	{ ORCEL, freres. FERNANDEZ. DE MENA.
	{	I.E BOUCHER.	Cadix.	{ CARIS & BERTRAND. KERMIL, freres.
Brest.	{	BESOGNE.	Lisbonne.	{ Veuve BERTRAND & fils. BOREL & Compagnie. DUBEUX. REYCEND. MARTIN.
	{	L. P. MACHUEL.		
		MALASSIS.		
Marseille.	{	MOSSY.		
	{	SUBE & LA PORTE.		
	{	MALASSIS.		
Nantes.	{	DESPILLY.		
	{	BRUN, fils aîné.		
	{	BRUN & Compagnie.		
Rochefort.	{	BONHOMME & Compag.		
	{	FAYE.		
L ^e Rochelle.	{	CHABOCEAU GRAND'-		
	{	MAISON.		
	{	PAVIE.		

EXAMEN MARITIME,

THÉORIQUE ET PRATIQUE,

OU

TRAITÉ DE MÉCHANIQUE,

APPLIQUÉ

A LA CONSTRUCTION ET A LA MANŒUVRE

des Vaisseaux & autres Bâtimens.

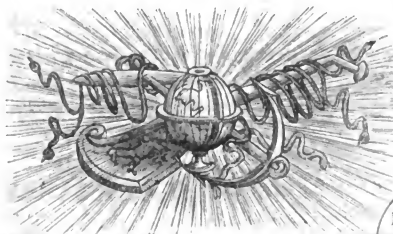
PAR DON GEORGES JUAN, Commandeur d'Aliaga, dans l'Ordre de Malthe, Chef d'Escadre des Armées Navales de Sa Majesté Catholique, Commandant des Gardes de sa Marine, de la Société Royale de Londres, de l'Académie Royale de Berlin, & Correspondant de l'Académie Royale des Sciences de Paris.

TRADUIT DE L'ESPAGNOL, AVEC DES ADDITIONS,

Par M. LEVÊQUE, Ingénieur Hydrographe de la Marine, Correspondant de l'Académie Royale de Marine, & du Musée de Paris; Professeur Royal en Hydrographie & Mathématiques, à Nantes.

TOME PREMIER.

Qui descendunt mare in Navibus, facientes operationem in aquis multis:
ipsi viderunt opera Domini, & mirabilia ejus in profundo. Ps. 106.



A NANTES,

Chez { L'AUTEUR, vis-à-vis la Bourse.
AUGUSTIN-JEAN MALASSIS, Imprimeur-Libraire, place du Pilori.
DESPIILLY, Libraire, haute grande-rue, près celle de Beau-Soleil.



M. DCC. LXXXIII.

THE NATIONAL BUREAU OF STANDARDS
OFFICE OF THE CHIEF OF BUREAU
WASHINGTON, D. C.

FOR THE NATIONAL BUREAU OF STANDARDS

THE NATIONAL BUREAU OF STANDARDS

THE NATIONAL BUREAU OF STANDARDS

THE NATIONAL BUREAU OF STANDARDS

THE NATIONAL BUREAU OF STANDARDS

THE NATIONAL BUREAU OF STANDARDS

THE NATIONAL BUREAU OF STANDARDS

THE NATIONAL BUREAU OF STANDARDS

THE NATIONAL BUREAU OF STANDARDS

THE NATIONAL BUREAU OF STANDARDS

THE NATIONAL BUREAU OF STANDARDS

THE NATIONAL BUREAU OF STANDARDS





A MONSEIGNEUR
CHARLES-EUGENE-GABRIEL
DE LA CROIX,
MARQUIS DE CASTRIES,
COMTE D'ALAIS,

Lieutenant-Général des Armées du Roi, Chevalier de ses
Ordres, Lieutenant-Général de la Ville de Lyon, Lyonnais
& Forès, Gouverneur des Ville & Citadelle de Mont-
pellier, Ville & Port de Cette, Mestre-de-Camp Général
de la Cavalerie Française & Étrangère, Commandant Gé-
néral du Corps de la Gendarmerie, MINISTRE & SECRÉTAIRE
D'ÉTAT, ayant le Département de la MARINE & des Colonies.

*M*ONSEIGNEUR,

*PERSONNE ne met en doute aujourd'hui l'importance de
la Marine, son influence sur le bonheur des hommes, &*

vi
combien elle contribue à la gloire des Nations qui, comme la NÔTRE, la cultivent avec succès. Pénétré comme vous l'êtes, MONSEIGNEUR, de ces grandes vérités, votre unique sollicitude est de vivifier toutes les parties de la Science Navale ; aucune n'échappe à vos lumières & à votre vigilance. Vous avez inspiré à tous les Membres de ce Corps illustre, l'amour de l'étude & de la gloire, par les honneurs que vous avez attachés aux succès. C'est sous votre administration, MONSEIGNEUR, que le génie a déployé toute sa puissance ; & la France voit avec admiration la Marine s'élever, dans son sein, à un degré de splendeur inconnu aux siècles précédents.

En même temps que vous avez été occupé à soutenir l'honneur du nom Français, & à faire rendre la paix à l'Europe, on vous a vu chérir & protéger les Arts de paix ; allier la gloire des Armes avec la culture des Sciences & des Lettres. Et c'est d'après cela, MONSEIGNEUR, que j'ai pris la liberté de vous présenter la traduction de l'Ouvrage de DON GORGES JUAN, l'un des plus célèbres Géomètres & des plus grands hommes de mer de l'Europe.

La protection dont vous m'avez honoré, en permettant que cet Ouvrage parût sous vos auspices, & les secours que vous m'avez accordés au nom du Roi, pour en faciliter la publication, m'ont pénétré de la plus vive reconnaissance. Si mon travail, joint à celui de DON GEORGES JUAN, étoit digne de passer à la postérité, le sentiment le plus glorieux pour moi, & le plus cher à mon cœur, seroit d'avoir fait parvenir jusqu'à elle le seul & unique témoignage que je puisse vous donner de mon zèle, & du très-profond respect avec lequel je suis,

MONSEIGNEUR ;

Votre très-humble & très-
obéissant serviteur,
LEVÊQUE.

EXTRAIT

Des Régistres de l'Académie Royale des Sciences.

Du 26 Février 1783.

MESSIEURS DE LA LANDE, BÉZOUT & DE BORY, ayant été nommés par l'Académie pour examiner la Traduction de l'*Examen Maritime* de D. GEORGES JUAN, faite par M. LEVÊQUE, & en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne d'être approuvé & imprimé sous le Privilège de l'Académie. En foi de quoi j'ai signé le présent Certificat. A Paris, le 26 Février 1783.

Signé, LE MARQUIS DE CONDORCET,
Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.

PRIVILEGE DU ROI.

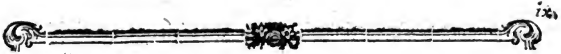
LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre: à nos Amés fêaux Conseillers, les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, grand Conseil, Prévôts de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenants Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Nos bien amés les Membres de l'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES de notre bonne Ville de Paris, nous ont fait exposer qu'ils auroient besoin de nos Lettres de Privilège pour l'impression de leurs Ouvrages. A CES CAUSES, voulant traiter favorablement les Exposants, Nous leur avons permis, & permettons par ces présentes, de faire imprimer, par tel Imprimeur qu'ils voudront choisir, toutes les recherches & observations journalières, ou relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les assemblées de ladite Académie Royale des Sciences, les Ouvrages, Mémoires, ou Traités de chacun des Particuliers qui la composent, & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître, après avoir fait examiner lesdits Ouvrages, & jugé qu'ils seront dignes de l'impression, en tels volumes, formes, marges, caractères, conjointement ou séparément, & autant de fois que bon leur semblera, & de les faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le temps de vingt années consécutives, à compter du jour de la date des présentes; sans toutefois qu'à l'occasion des Ouvrages ci-dessus spécifiés, il en puisse être imprimé d'autres qui ne soient pas de ladite Académie: faisons défenses à toutes sortes de personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangère dans aucun lieu de notre obéissance; comme aussi à tous Libraires & Imprimeurs, d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre & débiter lesdits Ouvrages, en tout ou en partie, & d'en faire aucunes traductions ou extraits, sous quelque pré-

texte que ce puisse être, sans la permission expresse & par écrit desdits Exposants, ou de ceux qui auront droit d'eux, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenants, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers auxdits Exposants, ou à celui qui aura droit d'eux, & de tous dépens, dommages & intérêts; à la charge que ces présentes seront enregistrées tout au long sur le registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression desdits Ouvrages sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caractères, conformément aux Réglements de la Librairie; qu'avant de les exposer en vente, les manuscrits ou imprimés qui auront servi de copie à l'impression desdits Ouvrages, seront remis es mains de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le Sieur HUE DE MIROMÉNIL; qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothèque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier Chancelier de France, le Sieur DE MAUPEOU, & un dans celle dudit Sieur HUE DE MIROMÉNIL: le tout à peine de nullité desdites présentes, du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir lescdits Exposéant & leurs ayant-cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie des présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenue pour dûment signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers & Secrétaires, soit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire, pour l'exécution d'icelles, tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant Clameur de Haro, Chartre Normande, & Lettres à ce contraires. Car tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris, le premier jour de Juillet, l'an de grace mil sept cent soixante-dix-huit, & de notre regne, le cinquieme. Par le Roi en son Conseil.

Signé, LE BEGUE.

Registré sur le Registre XX de la Chambre Royale & Syndicale des Imprimeurs & Libraires de Paris, N°. 1477, folio 582, conformément au Règlement de 1723, qui fait défenses, article 4, à toutes personnes, de quelques qualités qu'elles soient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter, faire afficher aucuns Livres pour les vendre en leurs noms, soit qu'ils s'en disent les Auteurs ou autrement, & à la charge de fournir à la susdite Chambre, huit Exemplaires prescrits par l'article 108 du même Règlement. A Paris, ce 20 Août 1778.

Signé, A. M. LOTTIN, l'un des Syndic.



PRÉFACE DU TRADUCTEUR.

L'Ouvrage de *D. Georges Juan*, que nous présentons au Public, quoiqu'imprimé dès 1771, n'est cependant pas encore connu en France, qui est la partie de l'Europe, où l'on s'est le plus occupé de la théorie & de la pratique de la Construction & de la Manœuvre des Vaisseaux. Il y a peu d'ouvrage aussi intéressant pour la Marine que celui dont il s'agit ici. L'Auteur avoit le rare avantage d'être un des plus profonds Géomètres, & un des plus grands Navigateurs. Il avoit accompagné M. Bouguer au Pérou en 1735, pour la mesure de la Terre, entreprise à jamais célèbre dans l'histoire des sciences, & a publié plusieurs ouvrages sur la Marine, où l'on trouve le génie d'observation, & la sagacité qui devoient produire l'EXAMEN MARITIME.

Vers la fin du dernier siècle l'Europe n'avoit aucun ouvrage théorique sur la Navigation, si ce n'est sur le Pilotage. La Construction des Vaisseaux étoit abandonnée à de simples Charpentiers, & l'on ne pensoit pas que l'ARCHITECTURE NAVALE fût fondée sur une application continuelle de la Mécanique & de la Géométrie, qui sont les branches les plus difficiles des Mathématiques. Ceux qui exerçoient cette profession étoient seulement guidés par leurs lumières naturelles, & par leur propre expérience; ils varioient la forme des Vaisseaux selon qu'il leur paroïssoit convenable; ils se fondoient sur le récit des Navigateurs, & en adoptoient très-souvent les préjugés: flottant ainsi dans les espaces immenses de l'erreur, ce n'étoit que par un hasard singulier qu'ils pouvoient parvenir à faire des Vaisseaux qui eussent de bonnes qualités. Dans un très-grand nombre de Ports, tant en France qu'ailleurs, les choses sont encore dans le même état; peut-être même n'y en a-t-il pas un seul qui n'en fournisse quelque exemple.

Le concours de la théorie & de l'expérience est absolument nécessaire à la perfection de la Marine ; & on ne peut disconvenir des difficultés que cette réunion présente. *D. Georges Juan* jouissoit de ce rare avantage au plus haut degré ; aussi a-t-il découvert des règles très-importantes, & a-t-il rejeté un grand nombre de celles qui étoient admises, presque sans la moindre répugnance , par les hommes les plus éclairés. C'est sous ce regne qui fera à jamais la gloire des siècles , & l'honneur du nom Français , qu'on peut légitimement espérer de faire les derniers pas vers la perfection. Nous touchons à cette époque : elle doit nécessairement résulter des Réglements du feu Roi Louis XV, pour les études des Officiers de la Marine , & de la protection que notre Monarque lui accorde ; protection d'autant plus grande , que ce Prince, dont toutes les actions sont des leçons de sagesse pour les Rois, sçait combien la Marine influe sur le bonheur de ses peuples. Il y a maintenant en France un grand nombre d'Officiers dans ce Corps illustre , qui , outre la pratique la plus consommée de la Navigation , ont des connoissances dans les Mathématiques & la Physique , qui les mettent au rang des plus grands Géomètres , & au dessus des Marins de toutes les autres Nations.

L'ARCHITECTURE NAVALE , ne peut manquer de gagner beaucoup à la publication de l'EXAMEN MARITIME , & les Marins en tireront le plus grand parti , pour connoître les causes des différentes actions & des mouvements du Navire , & par conséquent pour éclairer leur pratique. Nous croyons cependant devoir recommander aux Constructeurs d'agir avec la plus grande prudence dans les changements que l'étude de cet ouvrage pourroit les porter à faire à leurs Navires. Il n'y a point d'art dont la pratique soit plus délicate , & où il soit si aisé d'outrer même les défauts qu'on veut corriger , ou de tomber dans le vice opposé à celui qu'on veut éviter. Les nouvelles inventions pour ce qui concerne la Construction des Vais-

seaux doivent être soumises à l'examen le plus scrupuleux avant d'être mises en pratique : & nous voyons tous les jours que les plus petites erreurs dans l'application de regles très-certaines & très-connues , produisent des défauts de la plus grande conséquence : c'est pourquoi la prudence & le calcul doivent toujours ici guider & même corriger les efforts du génie.

Cette remarque regarde sur-tout les Constructeurs qui ne seroient pas suffisamment versés dans la théorie pour appliquer directement le calcul aux Vaisseaux qu'ils veulent construire : ce qui est cependant d'une nécessité absolue pour connoître la situation de leurs centres , leur force pour porter la voile , les résistances tant directes que latérales qu'ils doivent éprouver dans le fluide , en un mot pour avoir une idée juste de leurs qualités. Nos connoissances physiques ne seront portées au degré de perfection dont elles sont susceptibles , que lorsque nous serons assez avancés , non-seulement , pour pénétrer les causes des phénomènes , mais encore pour calculer leurs effets. Dans l'ARCHITECTURE NAVALE , nous croyons qu'on doit se défier beaucoup des changements qu'on peut être porté à faire à un Vaisseau d'après la seule inspection de son plan , sans les avoir préalablement soumis au calcul : il n'est donné qu'aux Artistes d'une expérience consommée & éclairée par une bonne théorie préliminaire , de se diriger ainsi d'après le simple coup d'œil : & encore a-t-on vu fort souvent des Vaisseaux fort mauvais sortir des mains d'Ingenieurs dont on devoit attendre des ouvrages de la plus grande perfection , & cela pour avoir exécuté leurs Vaisseaux d'après leur seule spéculation , sans soumettre leur plan à un calcul rigoureux.

On trouvera dans cet Ouvrage tous les secours qu'on peut désirer pour la connoissance parfaite des grands objets que présentent la Construction & la Manœuvre des Vaisseaux. Aucune des théories données jusqu'ici n'a fourni des résultats aussi conformes à l'expérience : & on peut même dire , que dans un

très-grand nombre de cas elles en font tout à fait éloignées.

Ceux des Géomètres qui ne prennent pas un intérêt direct aux progrès de la Science Navale , trouveront cependant dans cet Ouvrage une foule d'objets qui assurément les intéresseront. La Science du mouvement des corps solides & des fluides y est présentée d'une manière absolument nouvelle : la théorie du frottement & de la percussion des corps n'avoit point encore été envisagée sous ce point de vue , du moins cela n'est pas venu à notre connoissance. Ainsi l'EXAMEN MARITIME peut être regardé comme un Ouvrage qui contient une foule d'objets de Méchanique générale tout à fait nouveaux.

Quant aux Lecteurs qui par état sont obligés d'avoir recours à ces sortes d'ouvrages , sans cependant avoir les connoissances de Géometrie & de Calcul que ces lectures exigent , nous leur conseillons de se contenter de la lecture du Livre cinquieme du second Volume : parce que ce Livre contient en abrégé , & sans aucun calcul , tous les résultats du reste de l'Ouvrage , les maximes ou regles de pratique qui en découlent , & l'on a eu soin d'indiquer par des renvois les endroits où la théorie rigoureuse a été traitée.

C'est dans la vue d'être de quelque utilité aux progrès d'une Science que nous cultivons encore plus par goût que par état , que nous avons entrepris l'Ouvrage que nous publions aujourd'hui , & pour payer à la Société le tribut que tout Citoyen lui doit dans l'état où il est placé. Afin de rendre cet Ouvrage plus utile , nous nous sommes permis d'y faire quelques corrections & quelques additions : nous avons développé les idées qui ne nous ont pas paru présentées avec assez de clarté : nous avons corrigé quelques calculs , & en avons souvent indiqué l'esprit. Mais pour éviter tout reproche , nous avons presque toujours indiqué nos changements dans les notes , afin de conserver le Texte dans l'état où l'Auteur l'a jugé digne de l'impression.



DISCOURS PRÉLIMINAIRE.

L'INSTRUCTION du Navigateur, si nous en exceptons le petit nombre de principes simples & élémentaires sur lesquels la Science du Pilotage est fondée, a toujours consisté, jusqu'à ces derniers temps, dans les seules connoissances que la pratique & l'expérience peuvent fournir. La Construction des Vaisseaux & des autres Bâtimens a toujours été confiée à des hommes qui n'étoient gueres que de simples Charpentiers ; & la Manœuvre, qui est l'art de donner au Vaisseau tous les mouvements nécessaires, & de lui faire exécuter toutes les évolutions dont on peut avoir besoin, a été pareillement abandonnée à la routine la plus destituée de principes. On ne croyoit pas même que ces deux branches de la Science du Marin eussent quelque rapport avec les Mathématiques, bien loin de penser qu'elles dépendoient uniquement de la Méchanique, qui est peut-être la plus difficile & la plus compliquée de toutes les Sciences. Mais il n'y a rien dans tout ceci qui doive étonner ; l'Homme de Mer, environné de dangers, occupé tout entier de la pratique, excédé des travaux & des fatigues que son état exige, ne trouve point le repos ni la disposition d'esprit nécessaires pour une étude aussi étendue & aussi pénible ; le Sçavant, qui a besoin d'une grande tranquillité pour ses méditations, ne cherche point à s'exposer aux fatigues extrêmes, aux inquiétudes & aux risques dans lesquels l'autre passe sa vie. L'expérience est cependant un grand maître dont on apprend avec facilité des choses qu'il eût été presque impossible de découvrir par la seule théorie. La difficulté de réunir les lumières de la théorie à celles de l'expérience, en quoi consiste cependant

la perfection d'une Science si importante, est cause qu'elle est restée pendant tant de siècles dans les ténèbres : mais comme, dans le siècle présent, les Mathématiques ont fait des progrès étonnants, & ont été introduites, avec un avantage singulier, dans presque tous les Arts & dans toutes les Sciences, il eût été contre l'ordre que la Marine n'eût pas joui du même avantage, ou au moins qu'on n'eût pas donné naissance à la perfection dont elle est susceptible, & dont elle jouira sans doute par la suite.

Dès l'année 1673, le *Pere Pardies* avoit donné son *Traité de Statique*, ou de la Science des Forces Mouvantes, dans lequel on trouve, sous forme d'exemple, une détermination de la route que doit suivre un Vaisseau poussé par un vent latéral. Ce premier essai auroit pu servir de guide pour s'avancer davantage dans une matière si abondante; néanmoins cette Science ne fit aucun progrès jusqu'à l'année 1689, où le *Chevalier Renau* donna un Ouvrage in-8°. intitulé, *de la Théorie de la Manœuvre des Vaisseaux*. Il suivit le sentier que lui avoit ouvert le *P. Pardies*; tous deux conviennent en ce que le chemin direct du Vaisseau est moindre que celui qu'il feroit, s'il divisoit le fluide avec la même facilité par toutes ses parties, dans la raison du rayon au sinus de l'angle que forme la voile avec la quille; & que le chemin latéral est aussi moindre que ce même chemin, dans la raison composée de celle du rayon au cosinus du même angle, & de celle de la résistance du côté à celle de la proue. Mais, par malheur, le *Chevalier Renau* admettoit que les résistances étoient comme les quarrés des vitesses des fluides, & comme les quarrés des sinus de leur incidence sur les surfaces qu'ils choquent : principe qui alors étoit reçu, presque sans la moindre répugnance, par les Géomètres les plus célèbres, & qui n'a pas même cessé de l'être jusqu'à présent. Ceci donna lieu au célèbre Hollandais *Chrétien Huygens* d'exposer dans la *Bibliothèque universelle & historique*, (année 1693.) les contradictions dans lesquelles étoit tombé le *Chevalier Renau*. Il lui fit voir que, selon ses principes, les vitesses directes du

Vaisseau devoient être beaucoup plus grandes , & que l'angle qu'il assignoit aux voiles , comme le plus avantageux pour gagner au vent , n'étoit pas tel qu'on le déduisoit légitimement. M. *Renau* défendit son opinion , (*Journal des Sçavants* , 1695) fondé sur le principe incontestable de la décomposition des forces ; & comme *Huygens* ne répondit pas d'une maniere satisfaisante à ses arguments , il y eut , de part & d'autre , différentes répliques , sans qu'il fût possible d'arriver à une conclusion , & de connoître de quel côté étoit la vérité. Cependant la dispute cessa ; & lorsque , par cette raison , M. *Renau* se croyoit plus assuré de son opinion , il parut un Mémoire dans les *Actes de Leipzig* du mois de Juillet 1696 , par *Jacques Bernoulli* , Professeur de Mathématiques à *Groningue* , dans lequel ce Sçavant admettoit l'opinion de *Huygens* , à quelques modifications près. Le point où il s'en écarta , fut en ne supposant pas la vitesse du vent comme infinie à l'égard de celle du Vaisseau ; erreur dans laquelle étoient tombés les deux autres ; & c'est pour cela que ses résultats sont en partie différents de ceux de *Huygens*. Le Chevalier , provoqué par cette nouvelle attaque , mit au jour un Ouvrage intitulé , *Mémoire où est démontré un principe de la Méchanique des liqueurs , dont on s'est servi dans la Théorie de la Manœuvre des Vaisseaux , & qui a été contesté par M. Huygens* ; mais il se réduit à soutenir sa proposition sur la décomposition du mouvement , sans satisfaire à la tâche que lui avoit imposée *Huygens*. *Jean Bernoulli* , frere de celui dont nous venons de parler , Professeur de Mathématiques à *Basle* , se déclara d'abord pour l'opinion du Chevalier ; mais ensuite , ayant apporté plus d'attention à cet objet , il adopta le sentiment de *Huygens* , & publia en 1714 un Livre intitulé , *Essai d'une nouvelle Théorie de la Manœuvre des Vaisseaux* , après l'avoir soumis à la censure de l'Académie Royale des Sciences de *Paris*. La sublime Géométrie de l'Auteur , fit qu'il étendit ses calculs beaucoup plus loin qu'on ne l'avoit fait jusqu'alors ; & la dispute , entre MM. *Renau* & *Huygens* , demeura décidée , suivant l'avis général des Sçavants ;

parce que non-seulement il se déclara en faveur des vitesses trouvées par *Huygens*, mais encore, parce qu'ayant tracé la courbe déterminatrice des vitesses, il ajouta à ce sujet : *Elle décide par conséquent la controverse en sa faveur, contre la prétention de M. Renau.* Jean Bernoulli ne voulut cependant pas limiter les vitesses du vent, comme l'avoit fait son frere, d'après des réflexions très-fondées : c'est pour cela qu'il ne put déterminer celles des Vaisseaux avec la même exactitude. Il fit cependant attention à l'obliquité avec laquelle le vent frappe la voile, ce que son frere avoit omis; & en examinant l'équation donnée par *Huygens*, pour trouver l'angle que doit former la voile avec la direction du vent, pour gagner au vent le plus qu'il est possible, étant donné celui qu'elle forme avec la quille, il parvient non-seulement à la même formule que *Huygens*, mais il le blâme d'avoir, pour ainsi dire, fait mystere du calcul. Il cherche ensuite l'angle que doit former la voile avec la quille, pour se procurer le même avantage, celui qu'elle forme avec le vent, étant supposé connu; & l'ayant trouvé, il traite de la maniere de réunir les plus avantageux de ces deux angles, qui est un objet encore plus intéressant; car puisque pour chaque angle donné de la quille avec la voile, il y en a un de la voile avec le vent qui est le plus avantageux, on peut chercher le cas, dans lequel tous les deux seront en même-temps les plus avantageux, & donneront par conséquent la plus grande marche. Il résout cette question avec la même adresse; mais cette solution, ainsi que toutes les autres, est fondée sur la supposition, que la vitesse du vent est infinie & la dérive nulle : supposition bien éloignée de ce qui arrive réellement dans la pratique.

Les trois premiers Auteurs établirent leurs calculs sur l'hypothese, que le Navire est un rectangle dont les moindres côtés représentent la poupe & la proue; mais Jean Bernoulli s'avança jusqu'à le supposer formé d'un rhombe, d'un rhomboïde, & même de segments circulaires. En effet ayant remarqué que tout le calcul

dépendoit des suppositions relatives aux résistances , & que les résistances dépendoient de la figure de la carène du Navire , il ne put s'empêcher d'entrer dans ces détails , & il blâma *Huygens* d'être convenu que la dérive assignée par le *Chevalier Renau* , seroit effectivement la véritable , si les résistances des fluides étoient comme les simples vitesses , & non comme leurs quarrés. Il s'occupa aussi de l'examen des différentes résistances , particulièrement de celles des segments circulaires ; & il donna le nom d'axe des résistances à la ligne qui divise en deux parties égales les efforts des eaux dans toute la longueur du Navire , de la proue à la poupe. Ceci lui donna lieu de penser que le mât étant posé dans cette ligne , la force de la voile s'opposeroit directement à celle des eaux , & qu'on obtiendrait un manège parfait. Cette idée lui parut si importante , qu'il dit à son sujet : *Je m'étonne que ni M. Renau , ni M. Huygens , n'aient point songé à cette question , qui paroît pourtant assez essentielle à la Théorie de la Manœuvre des Vaisseaux.* En effet , cette détermination & toutes les autres que produisit ce grand homme , auroient été , sans doute , de la plus grande utilité , si les profondes connoissances qu'il possédoit en Géométrie avoient été accompagnées de quelque pratique.

Un Ouvrage aussi étendu , & aussi rigoureusement calculé que celui dont nous venons de parler , dans lequel l'Auteur , outre ce que nous avons dit , se livra encore à l'examen de la courbure des Voiles , de leurs forces , & de l'axe où l'on peut supposer ces forces reunies , qu'il nomma *Ligne de la Force Mouvrante* ; un tel Ouvrage , dis-je , paroïssoit devoir mettre fin à toute dispute : cependant le *Chevalier Renau* ne voulut pas se donner pour vaincu. Il répliqua de nouveau , s'appuyant toujours sur le principe de la décomposition des forces , & argumenta de manière que *Bernoulli* , malgré sa sublime Géométrie , ne put le satisfaire qu'en lui disant , que les loix de la décomposition des mouvements , ne sont pas les mêmes , lorsqu'ils se font dans les fluides ,

que lorsqu'ils se font dans le vuide. Ces abus d'ités sont la suite nécessaire des principes erronnés qu'on avoit aveuglément adoptés ; mais enfin, le *Chevalier* céda, plus par prudence, ou par le respect dû à l'autorité de *Bernoulli*, que par une conviction parfaite sur ces objets.

Pendant tous ces débats, M. *Parent*, de l'Académie Royale des Sciences de Paris, donna au Public, (année 1713,) son Ouvrage intitulé, *Essais & Recherches de Mathématiques, & de Physique*, dans lequel, (Tom. 2, pag. 741,) on trouve cette proposition : *De la situation, route & vitesse d'une figure plane quelconque tirée dans un fluide*. Les principes sur lesquels cet Auteur fonde son calcul ne diffèrent pas de ceux de *Jacques Bernoulli* ; mais cependant, faute d'avoir fait l'attention convenable à d'autres principes de mécanique très-nécessaires, il n'obtint pas les mêmes résultats que ce célèbre Auteur.

Avant tout ceci, (année 1697), avoit paru un Ouvrage *in-folio* beaucoup plus étendu, par le Pere *Paul Hoste*, Jésuite, Professeur de Mathématiques dans le Séminaire Royal de *Toulon*, intitulé, *Théorie de la Construction des Vaisseaux* ; cet Ouvrage est très-connu dans la Marine, parce qu'il accompagne, & sert de suite à un autre Ouvrage du même Auteur, intitulé, *l'Art des Armees Navales*, qui a beaucoup de célébrité : c'est pour cela que nous ne pouvons nous dispenser d'en dire un mot. Le *P. Hoste* s'efforce, dans ce livre, d'établir en principe, que les résistances des fluides sur les superficies qu'ils choquent, ne sont que comme les simples vitesses, & comme les simples sinus des angles d'incidence. Quoique ceci soit la première chose que plusieurs Géometres lui reprochent, on verra cependant dans la suite de cet Ouvrage, que les erreurs dans lesquelles cet Auteur est tombé, tant sur les résistances, que sur la force du Navire pour porter la voile, les roulis, les tangages, & autres mouvements, viennent plutôt de ce qu'il ignoroit plusieurs principes essentiels de Mécanique, que de ce qu'il admettoit ce principe prétendu faux. Nous pourrions citer ici plusieurs passages de cet Ouvrage, pour

prouver ce que nous venons de dire : mais ce seroit nous arrêter sans utilité, ce que nous avons dit étant suffisant , pour que le Lecteur sçache le mérite qu'il doit lui assigner.

Après les Ouvrages dont nous venons de parler , on ne vit paroître , pendant un certain temps , que quelques productions de pure pratique. Aucun principe fondamental ne précède & dirige les regles que ces Auteurs exposent ; un jugement sain & droit , mais sans culture , est leur seul guide , pour perfectionner , ou corriger ; aussi il leur arrive très-souvent de tomber dans des erreurs plus préjudiciables que celles qu'ils veulent éviter. La sublime théorie des *Bernoulli* , peu , ou même point du tout , applicable à la pratique , ne produisit que l'Ouvrage de M. *Pitot* , de l'Académie Royale des Sciences de Paris , publié l'année 1731 , intitulé , *la Théorie de la Manœuvre des Vaisseaux , réduite en Pratique*. Cet Auteur rappelle les principes établis dans la théorie des *Bernoulli* , & d'après ces principes il donne des tables des angles que doivent former les voiles ; mais outre les erreurs théoriques que contient cet Ouvrage , M. *Pitot* manquoit entièrement de pratique , ce qui lui fit porter des jugemens purement arbitraires , sur les effets de la mer , & les opérations des marins , en leur attribuant des faits qui n'ont jamais eu lieu.

Quatre années auparavant , M. *Bouguer* , alors Professeur d'Hydrographie au *Havre de Grace* , avoit donné un Ouvrage intitulé , *de la Mâture des Vaisseaux* , qui mérita le prix de l'Académie Royale des Sciences de Paris , année 1727. Cet Ouvrage dans lequel brillent particulièrement la Géométrie & le calcul , se termine par des regles très-peu conformes aux vues de son Auteur , & qui sont absolument impraticables. Ses idées étoient de pouvoir appliquer aux Vaisseaux des voiles beaucoup plus grandes que celles qu'ils portent actuellement , afin d'augmenter leur marche , sans qu'ils risquent de subir de grandes inclinaisons ; mais malheureusement cet avantage ne s'obtient que dans le cas unique , où l'on a vent en poupe : dans tous les autres cas , encore que

l'Auteur reconnoisse, lui-même, l'impossibilité de faire usage de ce qu'il propose, il exige pourtant que les voiles s'abaissent & s'élargissent, de manière qu'elles aient deux ou deux fois & demi la largeur qu'elles ont aujourd'hui. Par cette pratique, les voiles & les vergues seroient continuellement noyées sous l'eau, puisqu'il arrive même, quelquefois, dans l'état actuel des choses. Outre plusieurs inconvénients qui tiennent à la manière d'assujettir & d'orienter une voilure aussi étendue, on verra dans la suite de cet Ouvrage, qu'il seroit presque, pour ne pas dire absolument, impossible, que le Vaisseau gouvernât avec un tel appareil. Cette considération est échappée à l'Auteur, malgré l'étendue de ses connoissances, & la sagacité qui lui étoit si naturelle, parce que ce sont des choses que la pratique seule peut apprendre, & qu'on trouveroit très-difficilement sans elle.

Dans l'Ouvrage célèbre intitulé, *A Treatise of Fluxions*, que publia en 1742 le sçavant *Colin MacLaurin*, Professeur de Mathématiques dans l'Université d'Edimbourg, & Membre de la Société Royale de Londres, on trouve (Tome II, §. 922) la solution du problème concernant les angles que doivent former les voiles avec la quille & avec le vent. Cette solution est vraiment digne du grand homme qui l'a produite; elle est d'accord avec celle donnée par *Jean Bernoulli*; mais les principes sur lesquels elle est fondée, sont que la vitesse du vent est infinie à l'égard de celle du vaisseau, & que la dérive est nulle, comme l'avoit supposé ce dernier. Sans cela, & sans les faux principes qu'il admet sur les résistances, comme on le verra par la suite, nous aurions eu la solution rigoureuse de ce problème, qui est tant désirée.

Tous ces Ouvrages se réduisent cependant à un nombre limité de propositions détachées; il nous en manquoit la récapitulation, la correction de celles qui étoient erronnées, & l'addition de beaucoup d'autres absolument nouvelles. Cet Ouvrage resta pour M. *Bouguer*, le même qui nous donna, dans l'année 1727, le *Traité de la Mâture des Vaisseaux*. Il publia donc, en 1746, son second

Ouvrage.

Ouvrage sur la Marine, intitulé, *Traité du Navire, de sa Construction & de ses Mouvements*. L'étendue de cet Ouvrage, l'examen particulier & détaillé de tous les objets qui concernent le grand Art qu'il traite, & la simplicité élégante des solutions géométriques qui y sont très-heureusement appliquées, & rendues, pour ainsi dire, à la portée des commençants, lui donnerent dans l'Europe toute la célébrité qu'il méritoit. Il est certain que cet Auteur, si justement célèbre, ne nous auroit rien laissé à désirer, s'il avoit joint à ses connoissances la pratique nécessaire pour découvrir la fausseté des suppositions que fait la théorie. Son zèle & sa constance infatigables dans une tâche aussi pénible, étoient précisément ce qui nous auroit produit un Ouvrage parfait. Nous ne nous arrêterons pas à rappeler ici ce qui sera toujours essentiel dans l'Ouvrage de M. Bouguer, ni ce qu'il contient d'évidemment défectueux, parce que nous citons, dans le cours de cet Ouvrage, les endroits les plus remarquables, omettant ceux qui paroissent d'une moindre importance, pour ne pas trop retarder notre marche.

Enfin, dans l'année 1749, *Léonard Euler*, Directeur de l'Académie Royale de *Berlin*, donna son grand Ouvrage intitulé, *Scientia Navalis; seu Tractatus de construendis ac dirigendis Navibus*. L'ordre singulier & la sublime géométrie avec lesquels ce grand homme traite toutes les matieres qu'il embrasse, sont vraiment dignes d'admiration. Cet Ouvrage eût été véritablement un trésor pour les Sciences en général, & pour la Marine en particulier, si des connoissances aussi profondes eussent été accompagnées de la pratique & de l'expérience que nous aurions également désirées dans M. Bouguer. Quoi qu'il en soit, ses solutions sont les meilleurs guides pour tout ce qu'on peut proposer & offrir de nouveau, ce qui n'est pas un foible avantage. Depuis ces grands Ouvrages, on a vu paroître de temps en temps quelques productions peu considérables, les unes sur la théorie, & les autres sur la pratique; mais nous pouvons assurer que ce qui ne se trouve pas dans ces deux célèbres Auteurs, n'est pas des principaux objets que présente la théorie de la Marine.

Ce sont ces Ouvrages qui nous ont servi de bouffole dans la partie scientifique de la Marine : d'un autre côté la pratique ne nous a pas été un maître moins secourable , particulièrement lorsqu'après avoir bien observé les faits qu'elle présente , & les avoir dégagés des accidents qui peuvent les modifier & les rendre variables , ils ne se trouvent pas conformes à ceux qu'exige la théorie. Dans ce cas, il n'y a personne qui ne pense qu'il ne se soit glissé quelques suppositions erronnées dans les principes de la théorie, défaut qu'il est nécessaire de chercher & de corriger : car la pratique & la théorie ne doivent jamais différer dans leurs résultats ; lorsqu'elles ne sont pas d'accord, une des deux au moins est vicieuse , c'est-à-dire , que la théorie porte sur quelque principe faux ou mal entendu , ou bien que les faits de la pratique n'ont pas été examinés avec toute l'attention & le discernement nécessaires. On rencontre plusieurs exemples de cette espece parmi les principaux objets de la Science Nautique, malgré tous les travaux des Sçavants qui l'ont cultivée, non par le défaut de la Science en elle-même, mais pour n'en avoir pas comparé les résultats avec ceux de l'expérience.

Un des premiers doutes qui se présentèrent à moi dans mes recherches & un des plus intéressants , fut sur la marche du Vaisseau. Selon la théorie , (1) le Vaisseau, en le supposant même des meilleurs voiliers , ne peut prendre plus que les $\frac{100}{114}$ de la vitesse du vent , & cela en naviguant toutes voiles dehors, vent arrière, ou vent large, deux cas qui paroissent indifférents à l'Auteur. (2) La vitesse du vent est tout au plus, selon M. Mariotte , (*Traité du Mouvement des Eaux* , part. 1 , disc. 3) de 24 pieds par secondes ; c'est, dit-il, la vitesse ordinaire des vents incommodes , & contre lesquels on a peine d'aller. M. Clave , de

(1) M. Bouguer, *Traité du Navire*, liv. 3 sect. 2 , chap. 1.

(2) On verra que le Navire marche beaucoup plus vite vent large, que vent arrière, & cela en se servant des mêmes voiles dans les deux cas.

la Société Royale de Londres, dit la même chose, dans son *Traité du Mouvement des Fluides*, page 261 : & d'après les expériences que j'ai faites moi-même, je suis demeuré convaincu que ce vent est précisément celui qui ne permet qu'avec beaucoup de difficultés de porter toute la voilure. En effet lorsque le vent parvient à avoir seulement 18 ou 20 pieds de vitesse par seconde, on voit déjà les Vaisseaux, orientés vent large, obligés de prendre des ris, même de ferrer les voiles, dans la crainte de rompre les vergues & les mâts. M. Mariotte répète la même chose dans ledit Ouvrage, (part. 2, disc. 3,) *supposant, dit-il, que le vent fasse 24 pieds en une seconde, comme il fait quand il est assez violent à l'ordinaire, mais pourtant bien moins que dans les grandes tempêtes & ouragans.* M. Guillaume Derham, de la Société Royale de Londres, rapporte, d'après des expériences répétées, (*Transact. Philos. N°. 313,*) que dans les plus violentes tempêtes, le vent ne parcourt que 66 pieds anglais par seconde, & tout au plus de 70 à 90; il ajoute que quelques-uns ont une vitesse de 22 pieds par seconde, d'autres en ont une de 44, & d'autres plus, & enfin qu'il y a des vents qui ne parcourent pas un mille par heure : ce qui fait 1 pied $\frac{1}{2}$ par seconde. J'ai trouvé par mes propres expériences que j'ai déjà citées, que les brises d'été qui regnent presque journellement à Cadix, parcourent en général 12 pieds par seconde, un peu plus ou un peu moins, ce qui s'accorde très-bien avec les Auteurs que nous venons de nommer : ainsi supposer qu'un Vaisseau puisse porter toute sa voilure, le vent parcourant 24 pieds par seconde, c'est assurément tout ce qu'on peut supposer de plus fort, encore doit-on beaucoup douter que cela soit possible. D'après cette supposition, le Vaisseau ne pouvant prendre, selon la théorie admise jusqu'ici, plus que les $\frac{1}{11}$ de la vitesse du vent, cela correspondra, dans le cas présent, aux $\frac{1}{11}$ de 24 pieds, ou à 7 pieds $\frac{1}{11}$ par seconde, ce qui répond à 4 milles $\frac{1}{2}$ par heure : je laisse aux Marins à considérer combien ce résultat est éloigné de 9, 10, & 11 milles, qu'un Vaisseau a coutume de faire dans de pareilles circonstances.

Prenons le calcul en sens contraire: supposons que le Vaisseau parcoure 11 milles par heure, comme il les parcourt effectivement, ce qui correspond à une vitesse de 17 pieds $\frac{1}{2}$ par seconde, & nous trouverons que pour cela le Vaisseau doit parcourir les $\frac{116}{100}$ de 17 pieds $\frac{1}{2}$, ou à-peu-près 58 pieds français, qui équivalent à 62 pieds anglais: en sorte que pour que les Vaisseaux parcourent 11 milles par heure, comme ils les parcourent en effet avec tout leur appareil, il est presque nécessaire d'un ouragan tel que celui observé par *Derham*. *M. Bouguer* suppose dans le calcul dont toutes ces conséquences sont tirées, que la densité de l'air est $\frac{1}{17}$ de celle de l'eau; en la prenant de $\frac{1}{1000}$, il ajoute que la vitesse du Navire ne seroit que les $\frac{116}{100}$ de celle du vent; en sorte que les 4 milles $\frac{1}{2}$ de sa marche par heure se réduiroient alors à 3 milles $\frac{1}{2}$; & le Navire courant en effet 11 milles par heure, la vitesse du vent devoit être de 77 pieds anglais, ce qui forme une tempête des plus violentes qu'il soit possible de voir.

Il me parut d'abord que ce défaut de correspondance entre la théorie & la pratique, pouvoit venir de quelque erreur de calcul; mais ayant calculé de nouvelles formules, comme on le verra dans le Tom. II, Liv. IV, Chap. 1 de cet Ouvrage; elles me servirent seulement à le confirmer. On trouve de même qu'au plus près du vent, le Vaisseau, naviguant avec toutes ses voiles, ne peut prendre que les $\frac{116}{1000}$ de la vitesse du vent; & par conséquent que celui-ci devoit parcourir 77 pieds $\frac{1}{2}$ anglais par seconde, pour que le Vaisseau parcourût seulement 6 milles par heure, comme le font beaucoup de Vaisseaux. On voit que ce résultat est encore plus impossible que tout ce qu'on a vu ci-dessus; puisque, par beaucoup de raisons, le vaisseau ne pourroit pas porter tout son appareil avec un vent aussi violent.

Malgré tout ce qu'on vient de voir, il nous restoit encore un autre examen à faire; car toutes les déterminations ci-dessus sont fondées sur la supposition que le Vaisseau, faisant 11 milles par

heure , il les fait par la seule action d'un vent dont la vitesse n'excede pas 24 pieds par seconde ; quantité assignée seulement sur la foi que nous avons donnée aux observations de *Mariotte* & de *Derham*. Il étoit donc nécessaire de voir si cette vitesse ne seroit pas plus grande, ce qui nous approcheroit davantage des déterminations fournies par le calcul. Or l'expérience seule pouvoit éclaircir ce doute ; c'étoit donc elle qu'il falloit consulter.

Pour que le Navire parcoure 11 milles par heure, il faut qu'il ait 17 pieds $\frac{1}{2}$ de vitesse par seconde ; & si le vent qui produit cet effet , n'avoit que 24 pieds de vitesse par seconde, la vitesse du Vaisseau devroit être à-peu-près les $\frac{7}{8}$ de celle du vent , & non le $\frac{7}{8}$, comme on l'a déduit du calcul. C'est donc le rapport de ces deux vitesses, celle du vent & celle du Vaisseau, qu'il est question de connoître avec exactitude. Pour cela je choisis un Canot , & tandis qu'en y naviguant vent large , on mesuroit son sillage , on mesuroit à terre la vitesse du vent, en lui abandonnant de petites plumes très-légères, & en observant, avec une montre à secondes, le chemin qu'elles parcouroient dans un temps donné. Après avoir répété plusieurs fois cette expérience, je reconnus, à mon grand étonnement, que non-seulement on ne peut augmenter les 24 pieds de la vitesse du vent, mais qu'au contraire il faut les diminuer beaucoup. Finalement je trouvai que le Canot alloit presque aussi vite que le vent ; de sorte que le vent parcourant 10 à 11 pieds par seconde, le Canot en parcouroit à-peu-près 10. Ce phénomène paroîtra, sans doute, bien étrange à ceux qui ont cru que la vitesse du vent étoit presque infinie à l'égard de celle du Vaisseau ; mais il n'en est pas moins vrai. On peut répéter journellement cette expérience dans tous les Ports où l'on a la commodité de passer à la voile d'un côté à l'autre, comme dans la Baye de *Cadix*. De cette Ville au Port-*Sainte-Marie*, il y a cinq milles, ou 30400 pieds anglais : le vent étant frais, ou ayant une vitesse de 12 pieds par seconde, les Barques font ce trajet, en courant

vent large, en trois quarts d'heure, ou 2700 secondes; ce qui, endivisant les 30400 pieds par les 2700 secondes, donne 11 pieds $\frac{7}{17}$ pour la vitesse de la Barque dans une seconde. Delà on voit clairement qu'il ne convient point de supposer plus de 24 pieds de vitesse au vent, pour que le Vaisseau parcoure 17 pieds $\frac{1}{4}$; particulièrement si on le suppose bon voilier.

D'après tout ce que nous venons de dire, il n'y a plus moyen d'être arrêté dans les conséquences qui se présentent d'elles-mêmes; il faut nécessairement que la théorie enseignée jusqu'ici soit fausse, ou, pour mieux dire, que les principes ou suppositions sur lesquels elle est fondée, soient erronnés. Ces principes sont que les forces que le vent exerce sur les voiles, de même que celles des eaux sur la carene du Navire, sont comme les surfaces choquées, comme les carrés des vitesses, comme les carrés des sinus des angles d'incidence sous lesquels elles sont choquées, & comme les densités des fluides: à quoi on peut ajouter la supposition des voiles planes, tandis qu'elles ne le sont pas, particulièrement dans le cas d'un vent frais. Cette dernière supposition, bien loin d'être préjudiciable à la théorie, la favorise au contraire, puisque par elle on donne plus de force aux voiles qu'elles n'en ont effectivement, d'où il doit résulter plus de vitesse pour le Vaisseau, comme on le desire.

Que la force soit comme les densités des fluides, c'est un principe si évident par lui-même, que je ne crois pas qu'il ait jamais été mis en doute par personne. Il paroît qu'il en doit être de même de cet autre principe, qui est que (toutes choses égales d'ailleurs) les forces des fluides doivent suivre la raison des surfaces qu'ils choquent, comme on l'a cru jusqu'ici. Toute l'erreur doit donc tomber sur la supposition que les forces, ou, ce qui est la même chose, que les résistances des fluides sont dans le rapport des carrés de leurs vitesses, & des carrés des sinus d'incidence. Ce principe, tout suspect qu'il est, est cependant reçu par les premiers Géomètres, & par les premiers Physiciens de

l'Europe, & généralement adopté par toutes les Académies qui y sont instituées, & qui sont si justement célèbres. Cette considération devoit imprimer le plus grand respect, & peut-être même porter à abandonner tout examen de ce principe, si nous ne nous voyions pas autorisés à douter par l'exemple des mêmes Géomètres. *Newton* est un de ceux qui firent le plus d'efforts pour s'assurer d'un principe si essentiel pour procéder avec certitude dans sa Théorie des Projectiles. Après beaucoup d'examens théoriques, (*Philosophia naturalis*, lib. 2.) qui ne sont, à la vérité, que de pure spéculation, & qu'on ne peut regarder comme des démonstrations géométriques, il crut pouvoir conclure que les résistances des fluides suivent la raison du carré des vitesses. Mais cependant, avant de s'en tenir absolument à ce principe, & de l'admettre dans ses démonstrations, il voulut le confirmer par l'expérience; & pour cela il fit osciller, dans les fluides, des pendules de différentes matières & de différentes grandeurs. (1) Le résultat de ces expériences est si éloigné de ce qu'il avoit d'abord imaginé, qu'on en concludroit avec plus de précision, que les résistances sont comme les simples vitesses: aussi ajoute-t-il que ses expériences méritent peu de confiance, & qu'il seroit à désirer qu'on les répérât.

Léonard Euler, dans sa *Science Navale*, que nous avons déjà citée, (Chap. 5, Propos. 49.) donne un raisonnement géométrique sur ce sujet, dans lequel on trouve toute l'adresse & le sçavoir éminent de ce grand Géomètre: sa conclusion est, (2) que la force ou la résistance des fluides est égale au double du poids d'une colonne d'eau, dont la base est la surface choquée, & la hauteur, celle d'où il faudroit qu'un corps tombât librement pour acquérir la vitesse avec laquelle le fluide se meut; hauteur qui, comme on le sçait, est comme les carrés des vitesses. Mais quelle imperfection l'Auteur n'aperçut-il pas dans cette solution, & quel

(1) Voyez le Scolie de la Propos. 17, Livre 2, Tome I de cet Ouvrage.

(2) Voyez le même Scolie.

embarras ne lui causait-elle pas , puisqu'il avoue lui-même que la force ne peut être égale qu'au simple poids de la colonne ci-dessus, & non au double de ce poids ? Toute sa démonstration est fondée sur la supposition que lorsqu'un corps se meut dans un fluide, il frappe seulement la partie du fluide qu'il déplace, sans faire attention que le fluide déplacé pousse celui qui est devant lui ; que ce dernier pousse aussi celui qui le précède, & ainsi de suite, sans qu'il y ait de terme, ou sans que nous sachions quelle est la quantité de fluide qui se meut réellement, comme le confesse *Newton* lui-même, (*Philosophia Naturalis*, Liv. II, Scolie de la Propos. 35.)

Daniel Bernoulli, dont le nom est si connu dans la République des Lettres, étend encore davantage ses calculs, (1) en manifestant la différence qui résulte de ce que les corps sont ou ne sont pas élastiques. Mais, quoi qu'il en soit, la solution est la même, à cette différence près que la résistance est double dans le premier cas de ce qu'elle est dans le second : ainsi l'incertitude subsiste toujours. Tout ceci, au reste, paraîtra moins étrange, si on considère que dans les théories que nous venons de citer, on suppose le fluide dépourvu de toute gravité, & par conséquent que les particules n'exercent aucune pression les unes sur les autres ; ce qui n'a lieu ni dans notre air, ni dans nos eaux. Lorsque la vitesse des corps qui se meuvent dans ces fluides n'est pas trop grande, leur partie postérieure est frappée par les particules du fluide, avec la force qui leur demeure de leur gravité ; ce que *Newton* avoit aussi remarqué, & par conséquent la résistance doit être diminuée. Au contraire, si la vitesse du corps en mouvement est très-grande, la gravitation du fluide n'a pas tant lieu, & les particules du fluide n'en peuvent acquérir assez de vitesse pour atteindre & frapper la partie postérieure du corps, & la résistance doit être par-là à proportion plus grande. Plusieurs ont bien reconnu, depuis, cet effet, &

(1) Commentaires de l'Académie de Pétersbourg, mois de Juin & d'Octobre 1727.

ont été forcés de convenir que les résistances des fluides que nous connoissons, (1) ne peuvent suivre régulièrement les loix que nos théories leur assignent.

Nous ne devons donc pas être étonnés si la vitesse calculée pour telle que devraient prendre les Vaisseaux, est si éloignée de celle qu'ils prennent effectivement : cela devoit arriver nécessairement, puisque les suppositions sur lesquelles on s'est fondé, sont fausses. Mais cette conséquence n'est pas encore la plus fâcheuse : si le résultat du calcul pour déterminer la vitesse du Navire, est si considérablement éloigné de la vérité, quelle confiance pouvons-nous avoir dans aucun des autres résultats fournis par cette théorie, dans les angles que doivent faire les voiles avec le vent, dans ceux du gouvernail & de la dérive, dans les forces des voiles, & les autres actions du Vaisseau ? Tout doit être vicieux, ou du moins nous avons tout lieu de le croire. Le sujet est, on ne peut pas plus, intéressant, & demande l'examen le plus sérieux : c'est précisément cet examen que nous nous sommes proposés de faire avec tout le soin & toute l'attention dont nous sommes capables, sans épargner ni travail ni fatigues.

Il étoit nécessaire de commencer par des expériences certaines qui confirmassent nos doutes sur les résistances, & de chercher ensuite, par des voies différentes, ou en suivant celles par lesquelles la nature agit, une autre théorie des mêmes résistances ; & il falloit enfin examiner si cette nouvelle théorie étoit d'accord, non-seulement avec ce que l'expérience nous apprend sur la marche du Vaisseau, mais encore avec ce qu'elle nous fait voir de tous les autres mouvements, & même avec tous les phénomènes qu'on observe dans la nature. L'entreprise, quoique difficile, a eu beaucoup plus de succès que je ne l'avois moi-même espéré. J'ai trouvé que l'action exercée par l'eau courante contre une surface que

(1) Benjamin Robins, de la Société Royale de Londres, *New Principles of Gunnery*, Chap. 2, Prop. 1.

Je lui ai exposée, est non-seulement, dans certains cas, quatre fois plus grande que ne l'assigne M. Mariotte, (*Traité du Mouvement des Eaux*, Part. 2, Disc. 3.) mais qu'elle est même, dans d'autres circonstances, jusqu'à huit fois plus grande. Ceci ne paroitra point étonnant, si on considère que l'action du fluide dépend non-seulement de la grandeur de la surface choquée, comme on l'a cru jusqu'ici, mais aussi de la plus grande profondeur à laquelle elle est submergée dans le fluide : en sorte que la même table, ou surface, étant supposée avoir la forme d'un parallélogramme rectangle, éprouvera beaucoup moins de résistance, ayant son plus grand côté horizontal, que lorsque le même côté est vertical. C'est une observation très-importante pour la Marine, & qui jusqu'à présent ne s'est offerte à personne, quoiqu'elle soit une conséquence évidente de la gravitation. En effet, la gravitation agissant dans les résistances, ainsi que nous venons de le dire, comme elle est plus grande à de plus grandes profondeurs, attendu que les colonnes qui agissent sur les particules du fluide, sont plus longues, & par conséquent d'un plus grand poids, il s'ensuit que les résistances doivent aussi être plus grandes à de plus grandes profondeurs. Les différences qui résultent de ce seul fait sont si grandes, que tout ce qu'on a calculé jusqu'à présent, ne pouvoit pas manquer de différer considérablement de la vérité. J'ai observé que lorsque la table avoit une longueur quadruple de sa largeur, la résistance qu'elle éprouvoit, son plus grand côté étant vertical, étoit à-peu-près deux fois plus grande que lorsque le même côté étoit horizontal ; c'est-à-dire, que, dans ce cas, les résistances sont à-peu-près comme les racines quarrées des hauteurs ou profondeurs de la surface dans le fluide. Ainsi, supposant qu'un Navire ait ses dimensions linéaires doubles de celles d'un autre qui lui est semblable, les surfaces choquées du premier seront quadruples de celles du second ; & d'après ce qu'on a enseigné jusqu'à présent, les résistances du premier de ces Navires devroient être à celles du second, comme 4 est à 1 ; mais, selon les

observations dont nous venons de parler, ces résistances sont en effet à-peu-près comme $5 \frac{1}{2}$ est à 1 ; différence qui, comme on le voit, mérite bien d'être considérée.

Nos expériences ont encore prouvé clairement que les résistances ne suivent pas la loi des quarrés des vitesses, & des quarrés des sinus des angles d'incidence, mais à-peu-près celle des simples vitesses & des simples sinus d'incidence. C'est aussi ce que les expériences de *Newton* ont manifesté.

Nous étions donc déjà assurés, d'après tout ceci, des défauts de la loi des résistances établie par la théorie; quoique cette loi ait été généralement reçue, malgré les doutes qu'elle devoit suggérer, & qui devoient la rendre suspecte, & malgré la fausseté des résultats que nous avons vus en être la suite. Mais cela ne suffisoit pas encore, il falloit trouver une nouvelle théorie, dont les conséquences fussent conformes à l'expérience & à la vérité : sans cela on ne pouvoit pas l'introduire dans le calcul; & il paroïsoit, à la première vue, que nous devions avoir des résultats encore plus éloignés de l'observation des faits. Car puisque les résistances sont effectivement plus grandes qu'on ne l'avoit pensé, comment peut-il en résulter de plus grandes vitesses dans les Vaisseaux, selon que l'exige la pratique? Cependant cette objection si naturelle s'évanouit bientôt, en considérant que si les résistances des eaux sur la proue augmentent, les forces du vent sur les voiles doivent aussi augmenter, par la même raison : ainsi il n'y a plus lieu d'être arrêté. Ayant tenté de prendre pour fondement de la théorie le rapport entre la vitesse avec laquelle un fluide jaillit hors d'un vase par un orifice, & le poids que supporteroit la superficie qui boucheroit cet orifice, tant dans le cas où le fluide seroit en repos, que dans celui où il seroit en mouvement, comme on le verra très en détail dans le Livre II de ce Volume, on a trouvé la conformité la plus exacte entre les formules déduites de ce rapport, & les résultats de l'expérience, au moins pour la relation qui regne entre les forces, sinon dans leur mesure absolue. Suivant

cette nouvelle théorie, les résistances sont comme les densités des fluides, comme les surfaces choquées, comme les racines quarrées des profondeurs auxquelles elles sont submergées dans les mêmes fluides; comme les simples vitesses, & comme les simples sinus des angles d'incidence sous lesquels elles sont choquées. Cependant ce n'est pas encore tout; les résistances ne suivent cette loi que dans le cas où la superficie est entièrement submergée dans le fluide, & où la partie antérieure du corps est semblable à sa partie postérieure. Lorsqu'une partie de la surface est hors du fluide, il y a une nouvelle quantité à considérer dans les résistances, qui ne dépend nullement de la surface choquée, mais qui provient seulement de la vitesse; & cette quantité n'est ni comme les simples vitesses, ni comme leurs quarrés, mais comme leurs quatriemes puissances. Dans certains cas il doit encore entrer une troisieme quantité dans l'expression de la résistance, qui est comme les quarrés des vitesses, & comme les surfaces choquées. Cette quantité répond précisément au cas qu'on a considéré jusqu'à présent. Enfin, il y a d'autres circonstances où il faut avoir égard à une quatrieme quantité qui ne dépend aucunement des vitesses, mais seulement des surfaces choquées. Suivant cette théorie, les résistances dépendent donc de quatre quantités distinctes, dont quelques-unes s'évanouissent dans certains cas; & heureusement, dans les recherches qui regardent la Marine, qui sont celles que nous nous proposons, elles se réduisent ordinairement à une seule, qui est la première de celles que nous venons d'énoncer; cependant, dans le cas d'une très-grande vitesse, on ne peut se dispenser d'avoir égard à la seconde: quant à la troisieme, qui est la seule dont on ait tenu compte jusqu'ici, il est ordinairement inutile d'y avoir égard.

Ce parfait accord de l'expérience avec la théorie nous établissoit, comme on vient de le voir, les fondemens de l'édifice; mais il nous restoit une inquiétude: la plupart des expériences faites en petit, ne donnent pas, à beaucoup près, les mêmes

résultats que lorsqu'elles sont faites en grand , parce que dans celles-ci les effets des différens accidens deviennent beaucoup plus sensibles ; & c'est précisément ce qui arrivoit dans la comparaison des expériences faites jusqu'à présent, avec les mouvements & les actions du Vaisseau. Mais il n'en a pas été de même dans notre théorie ; elle n'a fait que gagner à cette épreuve : car lorsque nous avons tout lieu de craindre de très-grandes différences , à cause de l'augmentation que nous avons trouvée dans les résistances ; nous avons eu les résultats les plus satisfaisants. Cette théorie donne la vitesse des Navires précisément telle qu'on l'observe journellement, soit qu'ils naviguent vent arriere , soit qu'ils naviguent vent large , ou à la bouline. Mais ce qui est beaucoup plus fort , c'est que cette théorie apprend que non-seulement quelques Navires doivent aller vent large , presque aussi vite que le vent , mais encore que quelques-uns ont une vitesse qui surpasse celle du vent : paradoxe que beaucoup de gens trouveront étrange , mais dont cependant on verra la démonstration , non dans le sens que l'entendoit *Jean Bernoulli* , (1) c'est-à-dire , qu'on pourroit déployer une voile d'une étendue presque infinie ; supposition tout-à-fait chimérique , & qui ne peut s'appliquer à la pratique ; mais en n'employant que ce qui est consacré par les faits , & ce qui arrive journellement dans plusieurs Bâtimens , tels que les Galeres , les Chebecs , &c. *

(1) Œuvres de *Jean Bernoulli* , Tom. II , N. XCIII.

* Nous ferons observer , en passant , que cette idée , toute étrange qu'elle puisse paroître au premier aspect , n'est pas particulière à notre Auteur. Plusieurs Marins ont saisi la possibilité qu'un Vaisseau pût avoir une vitesse aussi grande , & même plus grande que celle du vent. Le celebre Amiral Anson , dont l'autorité seroit ici d'un si grand poids , si ces matieres pouvoient en admettre , étoit de cette opinion. (Voyez son Voyage autour du Monde , Liv. III Chap. 6.) On peut même concevoir la vérité de cette proposition par un raisonnement fort simple. Lorsqu'un Vaisseau navigue vent arriere , il est clair qu'il se soustrait continuellement à l'action du vent , ce qui fait que l'impulsion du vent sur les voiles , est d'autant moindre que le Vaisseau a plus de vitesse : mais si le Vaisseau est orienté vent large , la route faisant alors un angle avec la direction du vent , les voiles ne se dérobent pas autant à son impulsion , puisque le Vaisseau ne la suit pas directe-

Ayant ainsi trouvé les résistances fournies par notre théorie, parfaitement d'accord avec la pratique, non seulement dans les petites surfaces, mais encore dans les plus grandes que puissent avoir les Vaisseaux, nous avons jugé à propos de la soumettre à une autre épreuve, en l'appliquant à deux autres cas très-différents. Le premier de ces cas consiste à déduire des mêmes principes une nouvelle théorie des *Cerf-volants*, autrement nommés *Cometes*, que les enfants prennent tant de plaisir à élever dans l'air; car, quoique ces machines soient uniquement destinées à leur amusement, elles ont été très-propres, dans ce cas, pour servir de vérification à un objet aussi important. C'est pour cela qu'on trouvera dans un Appendice, à la fin de ce Volume, tout le calcul relatif à cette théorie. On le compare à celui qui résulte de l'ancien système, afin qu'on connoisse la vérité, avec cette évidence qui ne peut laisser de doutes.

Le second cas auquel nous avons encore appliqué la théorie,

ment. Lorsque la route est perpendiculaire à la direction du vent, les voiles & les autres parties du Vaisseau qui éprouvent l'impulsion du vent, la reçoivent à-peu-près toute entière, quelque vitesse qu'ait le Vaisseau. Il est donc aisé de sentir que puisque, dans ce cas, l'impulsion du vent sur les voiles n'est presque pas diminuée par la vitesse du sillage, ce choc répété sans cesse, avec la même énergie, doit imprimer au Vaisseau (toutes choses égales d'ailleurs) une vitesse beaucoup plus grande que lorsqu'on cingle vent arrière. On doit concevoir, en même temps, que dans certaines dispositions, il est possible que le Vaisseau acquière une vitesse égale, ou même plus grande que celle du vent. Nous avons pris, pour exemple, le cas de la perpendicularité de la route avec la direction du vent, afin de rendre notre raisonnement plus facile à saisir: mais on doit concevoir que cet effet doit dépendre de plusieurs causes dont l'influence doit être très-variable suivant l'espèce des Navires; comme du rapport des résistances du côté, & de la proue, de la quantité de voiles déferlées, de leur situation, de leur courbure &c. C'est au calcul à combiner tous ces éléments: les bords étroits de l'esprit humain ne peuvent permettre d'en apprécier l'influence, avec précision, par le seul raisonnement. On verra cette question traitée à fond dans le Tom. II, Liv. 4, Chap. 1 & 2 de cet Ouvrage: il nous suffit ici d'avoir fait concevoir d'avance la possibilité du cas avancé par *D. Georges Juan*. Nous observerons encore que notre raisonnement explique ce qui est dit dans la note 2 de la page 10 de ce Discours, & doit faire sentir en même temps, combien les moulins à vent ordinaires dont les ailes se meuvent dans un plan vertical, sont supérieurs à ceux qu'on a imaginés, ou qu'on pourra imaginer par la suite, qui se mouveroient horizontalement.

est aux expériences faites par M. J. Smeaton , avec une machine de son invention , pour déterminer la force avec laquelle l'eau agit sur les roues qu'elle fait tourner , telles que les roues des Moulins. On compare les résultats de vingt-sept expériences avec les deux théories , sçavoir , celle qu'on a suivie jusqu'ici , & la nouvelle que nous proposons. On trouve que toutes les expériences correspondent exactement avec notre théorie , tandis qu'elles s'écartent entièrement de l'ancienne. Ces résultats nous sont d'autant plus favorables , qu'on ne peut avoir aucun doute sur des expériences qui ne nous appartiennent pas , & qui ont été faites , si long-temps auparavant , dans des vues très-différentes , comme on vient de le dire.

Ayant déterminé & corrigé l'erreur du principe , il nous falloit entrer dans l'examen d'une matiere extrêmement étendue , & qui étoit peut-être plus difficile que si elle n'avoit été envisagée par personne auparavant ; parce qu'ordinairement il faut plus de travail pour corriger un défaut , que pour édifier premièrement l'ouvrage. L'erreur que nous avons vue exister dans la détermination des vitesses , ne se bornoit pas là ; de toute nécessité il devoit y en avoir dans la dérive , dans les angles que les voiles doivent former avec la quille & avec le vent , dans la force des voiles à l'égard de la stabilité ; parce que tous ces éléments dépendent de la relation des résistances , qui est susceptible de beaucoup de variations , principalement dans le dernier point , où il est question d'équilibrer de plus grands efforts du vent sur les voiles , avec la résistance qu'éprouve le côté du vaisseau , qui est la même. La maniere de calculer les résistances devoit aussi être très-différente , & les corps susceptibles d'éprouver la moindre résistance , très-différents ; car une portion de la carene du vaisseau , placée proche de la surface de l'eau , n'éprouve pas la même résistance qu'une autre portion égale & semblablement choquée , placée à une plus grande profondeur.

Mais les articles spécifiés ci-dessus , ne sont pas encore les seuls dans lesquels on se trompoit : on trouve également quel-

ques erreurs dans ce que l'ancienne théorie nous enseigne sur le manège du Vaisseau. D'après elle, l'axe des résistances, & celui de la force motrice, doivent coïncider pour équilibrer le Vaisseau, & obtenir un manège parfait; cependant dans la pratique, lorsque le Vaisseau marche, toutes voiles dehors, l'axe des résistances est à-peu-près d'un septième de toute la longueur du Vaisseau, plus à la poupe que celui de la force motrice; & par conséquent, d'après ce qui a été enseigné, le Vaisseau devoit arriver continuellement, & avec une grande force : mais on voit le contraire, les Vaisseaux ont plus de propension à venir au vent, sur-tout lorsqu'il vente bon frais. Il est donc nécessaire qu'il y ait encore, à cet égard, quelque vice dans la théorie, ou qu'on ait omis quelques considérations très-essentielles. En effet, on en rencontre deux de cette nature, qui ont été entièrement négligées; on n'a eu aucun égard à la courbure de la voile qui porte l'axe de la force motrice beaucoup plus vers la poupe, & on n'a point considéré l'inclinaison du Vaisseau qui porte encore cet axe beaucoup davantage du même côté. Si ces changements dans la situation de l'axe de la force motrice étoient constants, il n'y auroit cependant pas beaucoup à corriger dans ce qu'on a enseigné, on pourroit même s'y arrêter sans beaucoup d'inconvénients; mais ces changements sont variables, ils dépendent de la force du vent, de la figure des voiles, & de la stabilité du Navire, ou de sa force pour porter la voile. Si on avoit placé la mâture conformément à ce qui nous a été enseigné; il eût été impossible que le Vaisseau gouvernât, & l'inconvénient eût été beaucoup plus grand encore, si on avoit employé les proportions que M. Bouguer a prétendu qu'on devoit donner à la mâture.

Les roulis & les tangages ne sont pas les points où l'ancienne théorie est le moins fautive; dans cette théorie le Vaisseau est considéré comme un pendule qui n'a pas d'autre action que celle qui résulte d'un mouvement d'oscillation : & d'après cette idée,

on

On conclut que tous les roulis & les tangages doivent se faire dans le même temps. On ne voit pas dans cette hypothèse, que les roulis aient aucune relation avec l'action de la lame, qui en est cependant la véritable cause : & quoiqu'on puisse croire que la théorie se rapporte seulement aux seconds ou troisièmes roulis, qu'on peut regarder comme n'étant plus soumis à l'action de la lame, peut-on douter que les premiers ne soient d'un plus grand effet, & qu'il ne soit, par cette raison, plus important d'en connoître la nature ? Il est évident que cette théorie n'est nullement d'accord avec les faits, pour ce qui concerne les premiers roulis, parce que tous ces balancements s'exécutent nécessairement dans le temps que la lame emploie à faire son passage sous le Vaisseau ; & la durée de ce passage est, on ne peut pas plus, inconstante, puisqu'elle dépend de la grandeur des lames. Il faut convenir qu'on ne peut être trop étonné qu'on ait pu admettre, aussi long-temps & aussi généralement, de semblables erreurs. On n'a nullement considéré, dans ces mouvements, les effets des lames, ou des coups de mer, & il paroît que ces calculs n'ont été proposés que pour des mers enchantées, & non pour celles qui passent par-dessus les Vaisseaux, qui les inondent, & qui les font périr. Un Bâtiment s'élève avec plus de facilité sur la lame qu'un autre : qui est-ce qui doutera que celui-ci ne soit plus exposé à être inondé, & que le premier ne coure plus le risque de rompre sa mâture ? Il n'est donc pas seulement nécessaire de considérer le temps dans lequel le roulis s'exécute, mais il faut encore examiner sa grandeur, & l'élévation des eaux sur le côté du Vaisseau. Les proues aiguës, ou de moindre résistance, que les Géomètres ont tant désirées, seroient exposées à ces accidents ; elles seroient continuellement submergées, & non-seulement elles seroient courir les risques d'un naufrage, mais encore elles ne produiroient aucun gain pour la marche qui est l'unique objet qu'on a eu ordinairement en vue ; car les résistances croitroient à mesure que ces proues se submergeroient & s'inonderoient davantage, par le choc répété des lames.

D

Nous avons fait en sorte que notre théorie fût exempte de toutes les erreurs que nous avons rapportées ci-dessus, & de quelques autres que nous nous dispenserons d'indiquer, pour ne pas trop nous arrêter; mais pour l'exposer avec clarté, nous avons besoin de beaucoup de principes sur la Méchanique, particulièrement sur l'action & le mouvement des fluides. Nous avons donc pensé qu'il convenoit de les exposer dès le commencement de notre Ouvrage, & d'y renfermer également ce qui conduit à la théorie des machines simples & composées, à celle de leurs frottements, & à la connoissance des loix du choc des corps, & de leurs autres actions. Tous ces objets conviennent à la Marine, & conduisent directement à la résolution de toutes les questions embarrassantes que cette Science présente, & qu'on verra traitées dans cet Ouvrage, que nous avons distribué dans l'ordre qui suit.

Le premier Volume est divisé en deux Livres, dont le premier contient neuf Chapitres. Le Chapitre premier traite des définitions, axiomes, ou loix du mouvement, avec les principes déduits de l'expérience sur l'action de la gravité. Le Chapitre II traite de la composition & décomposition du mouvement & des forces agissantes. Le Chapitre III contient tout ce qui a rapport au centre de gravité, ou des masses, & à celui des puissances, ou des forces: on donne les formules de leurs vitesses, des espaces qu'ils parcourent, & des temps qu'ils emploient à les parcourir. Le Chapitre IV traite de la rotation d'un système quelconque de corps libres, ou liés entre eux; de l'angle giratoire ou de rotation qu'ils prennent en vertu de puissances quelconques qui agiroient sur le système. On y démontre que la rotation du système se fera de la même manière, soit qu'on suppose son centre de gravité fixe, soit qu'on le suppose libre; & on fait voir, en même temps, que ce centre doit se tenir le plus bas qu'il est possible, dans quelque corps, ou machine que ce soit. On ajoute comme une conséquence de cette théorie, celle des pendules, & des leviers des trois genres, en ne les considérant pas seulement dans l'état de repos, comme on

l'a toujours fait , mais dans celui de mouvement ; & on examine leurs forces & les résistances qu'ils doivent avoir dans leurs fibres & dans toutes leurs parties. On traite, dans le Chapitre V , de l'axe & du rayon de rotation , ou du point sur lequel tourne un corps ou un système de corps ; on y fait voir que ce point ne peut être fixe , à moins qu'il ne soit le centre de gravité. Le Chapitre VI renferme toute la théorie de la percussion des corps : nous nous sommes un peu étendus sur cette matière , tant à cause qu'elle est le principe des Chapitres suivans , que parce qu'il étoit intéressant d'éclaircir un sujet qui a fait naître tant de disputes parmi les Auteurs les plus respectables ; & particulièrement la question des forces vives & des forces mortes. On donne des formules pour trouver les temps , les vitesses , les actions & les espaces parcourus par les corps dans l'acte du choc , & pour trouver de même les forces avec lesquelles ils agissent dans un instant quelconque. On applique les solutions à la pratique , & aux expériences faites par les Auteurs de Physique Expérimentale , afin de faire voir l'accord de la théorie avec l'expérience , & les effets surprenans du choc. On termine ce Chapitre en mettant dans le plus grand jour l'erreur où sont tombés plusieurs Auteurs célèbres , en confondant les centres d'oscillation & de percussion ; car quoique ces centres coïncident en certains cas , ils ne sont cependant pas toujours les mêmes."

Le Chapitre VII contient le mouvement des corps sur des plans inclinés , ou sur des surfaces courbes : on détermine le temps de leur chute par la cycloïde , & on en fait l'application aux pendules. On calcule la durée de leurs oscillations , & l'espace que parcourent les corps , qui tombent librement , pendant la durée d'une oscillation. On termine ce Chapitre par l'examen du mouvement des corps , dans les cas où ils tombent en roulant le long d'un plan incliné , ou d'une surface courbe.

On trouve , dans le Chapitre VIII , une nouvelle théorie sur le frottement ; c'est un objet sur lequel on n'a encore point vu

la théorie d'accord avec l'expérience, quoiqu'il ait été traité par les Géomètres du premier ordre. On démontre que la force du frottement n'est pas seulement proportionnelle au poids, ou à la pression qui le produit, comme l'ont cru MM. *Amontons* & *Bilfinger*. On manifeste les erreurs qui résultent de la théorie donnée par le célèbre *Léonard Euler*; & on fait voir comment tous les faits se concilient avec la nôtre.

Enfin on termine le premier Livre par le Chapitre IX, qui traite des Machines simples, sçavoir, du Plan incliné, du Coin, de la Hache, de la Vis, du Treuil ou Cabestan, de la Poulie, & des Mouffles. On donne en détail la théorie de toutes ces Machines, en ayant égard au frottement qu'elles éprouvent, attention qui est absolument nécessaire pour en déduire leurs véritables forces. On détermine les plus grandes & les petites forces qu'elles puissent produire, & on applique le tout à quelques faits de pratique.

Le Livre second est un Traité des Fluides. Dans le Chapitre premier on détermine l'action & la force, avec laquelle ils agissent sur les corps dans le cas du repos, & les conditions qui doivent concourir pour que cet état subsiste. Le Chapitre II traite de la force avec laquelle les fluides en mouvement, agissent contre une différencielle de superficie, ou contre une surface extrêmement petite. On détermine cette force dans tous les cas de mouvement, soit horizontal, vertical, ou oblique, de même que pour toutes les différentes directions & angles d'incidence; & on finit ce Chapitre par l'exposition des différentes théories que les Géomètres les plus célèbres ont données sur cet objet, en faisant voir les erreurs auxquelles elles ont conduit, étant appliquées aux fluides pesants. Le Chapitre III traite de l'action des mêmes forces sur les superficies planes: on fait voir les différentes variations qui ont lieu, selon que la surface sur laquelle elles agissent, est entièrement submergée dans le fluide, ou ne l'est qu'en partie, à cause de la dénivellation du fluide qui a lieu dans ce cas, & d'où résultent

ces variations. On termine ce Chapitre en expliquant une différence qui se trouve entre notre théorie, & ce qui est exposé dans une proposition de la *Philosophie Naturelle* de *Newton*; & on détermine ensuite, dans le Chapitre IV, l'action des mêmes forces des fluides contre des superficies quelconques.

Le Chapitre V traite des résistances horizontales qu'éprouvent les corps mus dans les fluides, & de celles qu'ils éprouvent lorsqu'étant en repos, les fluides se meuvent contre eux; car ces deux cas ne sont point du tout le même, comme on l'a cru jusqu'ici. On combine des expériences pour faire voir, combien elles s'accordent avec la relation que la théorie fournit. Il est question, dans le Chapitre VI, des résistances verticales qu'éprouvent également les corps, soit qu'ils se meuvent dans les fluides, soit que les fluides se meuvent contre eux: & l'on fait voir la grande différence qu'il y a entre ces deux cas. On démontre, dans le Chapitre VII, l'altération des résistances occasionnée par les dénivellations des fluides, produites par le mouvement des corps: & on fait voir en quoi les résistances dépendent de la longueur des corps. On traite, dans le Chapitre VIII, des lignes & des surfaces qui éprouvent la plus grande ou la moindre résistance, de même que de celles qui, jouissant de la même propriété, doivent terminer des bases données, ou qui doivent renfermer un corps déterminé; on donne, à la fin de ce Chapitre, une table des abscisses & des ordonnées de la courbe, qui éprouvera la moindre résistance, en comprenant le plus grand espace.

Le Chapitre IX donne les formules qui expriment le rapport entre les temps, les espaces parcourus, & les vitesses des corps qui se meuvent d'un mouvement progressif dans les fluides: on démontre qu'ils ne peuvent parvenir à leur plus grande vitesse, qu'après un temps infini, & après avoir parcouru un espace infini; mais que cependant, après un temps très-court, ils acquièrent une vitesse qui ne diffère que fort peu de la plus grande; & ce Cha-

pitre est terminé par la théorie des lames , dont on assigne les vitesses , & les grandeurs. Le Chapitre X traite des moments dont les corps éprouvent l'action dans leur mouvement progressif horizontal , & de la stabilité qui résulte de ces moments , tant dans le cas du repos que dans celui du mouvement. Il est question , dans le Chapitre XI , de l'inclinaison que prennent les corps , par l'impulsion de puissances quelconques : on rapporte les différentes solutions que ce même cas présente , selon les figures des mêmes corps ; & l'on indique les précautions qu'il est essentiel de prendre pour éviter les erreurs auxquelles peuvent conduire les formules données jusqu'ici , si on ne les considère pas dans les suppositions qu'elles exigent. On éclaircit le tout par des exemples.

Le Chapitre XII contient les formules qui expriment les moments que subissent les corps dans leur rotation dans les fluides , sur un axe qui passe par leur centre de gravité. Le Chapitre XIII donne les formules des vitesses angulaires des mêmes corps , & les longueurs des pendules dont les oscillations sont isochrones avec les leurs , ainsi que celles des plus grandes & des plus petites vitesses qu'ils puissent acquérir dans leurs oscillations. Enfin on termine ce premier Volume par deux Appendices , le premier sur la théorie des Comètes ou Cerf-volants que les enfants élèvent dans l'air ; & le second sur la résistance des fluides dans les machines , afin de confirmer notre théorie des résistances , selon que nous l'avons déjà dit.

Le second Volume traite entièrement de la Marine , & est distribué en cinq Livres. Le premier Livre contient tout ce qui appartient à la connoissance & à la construction du Navire. Ce Livre est divisé en sept Chapitres , dont le premier donne une idée générale des Bâtimens de mer , des propriétés qui leur conviennent , de leur figure , de la manière de les gouverner , de la disposition & du nombre de leurs mâts & voiles. Le Chapitre II traite de la variété infinie qu'il peut y avoir dans les Bâtimens , & de leur construction , selon la pratique la plus ancienne. On expose , dans

le Chapitre III, la maniere de tracer les plans de ces anciennes constructions, suivant l'usage des différentes nations. Le Chapitre IV enseigne à tracer les plans, selon la pratique actuelle des Constructeurs Français & Anglais les plus instruits par la théorie & l'expérience. On donne, dans le Chapitre V, une méthode nouvelle & géométrique pour décrire ces plans, en formant tous les couples d'une extrémité du navire à l'autre, par des arcs de cercle; on évite, par ce moyen, le grand nombre de tâtonnements qui sont inévitables par les autres méthodes. Le Chapitre VI donne la maniere de décrire le plan des œuvres mortes, suivant les différentes méthodes; & dans le Chapitre VII, qui termine ce Livre, on donne, dans le même détail, la description des ponts.

On examine, dans le Livre II, le corps du Navire, & ses différents centres, ses forces, ses résistances, & ses moments. Le Chapitre premier traite de la flottaison, & de la ligne d'eau du Vaisseau, de son poids total, & de celui de sa coque; on donne un exemple de la pratique du calcul; on enseigne la manière de faire varier la ligne d'eau, en faisant un changement dans la forme du Navire. On donne les volumes déplacés par les Vaisseaux de différents rangs, & la relation qu'ont ces volumes avec les dimensions linéaires des capacités, & on fait voir l'erreur où tombent les Constructeurs en négligeant de régler l'échantillon des pieces de bois, d'après les proportions requises. On donne aussi des regles faciles pour déterminer la grandeur des Vaisseaux, relativement à l'artillerie & à la variété des autres poids dont ils doivent être chargés, en ayant égard que le tout, même les équipages & les vivres, suive, à-peu-près, la raison des cubes des dimensions linéaires; & on finit ce Chapitre, en donnant le rapport que les capacités ont, & doivent avoir, avec le poids total des Vaisseaux, y compris leurs munitions, & les autres choses nécessaires qui composent le total de l'armement. Le Chapitre II traite de la maniere de trouver le centre du volume que le Navire occupe dans le fluide, & la règle qu'on

donne est éclaircie par un exemple. On explique comment il peut arriver que ce centre varie, non-seulement par la variation de la ligne d'eau ou de flottaison, mais encore en variant le volume de la carene, dans quelqu'une de ses parties; & on termine ce Chapitre, en donnant la méthode pour trouver facilement le même centre, dans des Vaisseaux semblables par leur fond, ayant déterminé d'avance celui d'un seul; & cette méthode peut s'appliquer aux cas où il y auroit quelques légères différences entre ces Vaisseaux.

Le Chapitre III enseigne à trouver la hauteur du Métacentre au-dessus du centre de volume, & contient un exemple pour faciliter l'intelligence de la méthode. On donne de plus une règle facile pour trouver ce point dans les Vaisseaux semblables, ou dont la différence est petite; & on termine ce Chapitre, en faisant, pour les inclinaisons de poupe à proue, le même examen & les mêmes recherches que celles qu'on a faites d'abord pour les inclinaisons latérales.

Dans le Chapitre IV on enseigne la manière de trouver le centre de gravité de la coque, & même du vaisseau entier, par le moyen du poids de toutes ses parties, & de la place qu'elles occupent; & on éclaircit la règle par un exemple. On donne également la manière de trouver le même centre, par le moyen d'une expérience facile, faite sur un autre Vaisseau, ayant égard ensuite à la différence qu'il pourroit y avoir entre eux; ce qui fournit une petite formule, de laquelle on déduit différents Corollaires, non-seulement sur la variation en hauteur du centre de gravité, mais encore sur la stabilité du Vaisseau, ou sur les inclinaisons différentes qu'il prend toutes les fois qu'on fait varier son volume & son poids dans quelques-unes de ses parties. On applique tout ceci à différents exemples pris sur d'autres Vaisseaux; & l'on démontre finalement l'erreur dans laquelle est tombé *M. Bouguer*, en assurant que dans les Vaisseaux à trois ponts, le Métacentre ne s'élève que d'un ou deux pieds au-dessus du centre de gravité.

Lo

Le Chapitre V enseigne la maniere de calculer les résistances horizontales qu'éprouve un Vaisseau, tant celles qui sont directes, ou par la poupe, que celles qui sont latérales, ou par le côté; & on fait voir l'ordre qu'il faut suivre dans le calcul pour éviter l'embarras & la confusion. Ce calcul fournit seulement deux quantités pour l'expression des résistances, dont l'une suit le rapport des simples vitesses, & dont l'autre, qui provient de la dénivellation du fluide à la poupe & à la proue, suit le rapport de leurs quatriemes puissances. Les deux autres quantités qui se trouvent dans la formule des résistances, sont négligeables dans le calcul des actions du Vaisseau. On donne ensuite la maniere de calculer le changement qui arrive dans ces résistances, selon que le Vaisseau est un peu plus ou un peu moins calé. Enfin on termine ce Chapitre, en donnant des formules faciles pour trouver les mêmes résistances pour d'autres Navires dont les fonds seroient semblables à ceux du premier, par le moyen de celles déjà calculées pour celui-ci; & on fait observer que la quantité qui est comme les quatriemes puissances des vitesses, est susceptible d'être négligée dans les Vaisseaux d'une grande capacité, tandis qu'au contraire, on ne peut se dispenser d'y avoir égard dans ceux dont la capacité est petite.

Le Chapitre VI enseigne la maniere de calculer les moments qu'éprouve le vaisseau dans ses inclinaisons qui proviennent de l'action du vent sur les voiles, * tant dans le cas où le vaisseau seroit en repos que dans celui où il seroit en mouvement; parce que ces moments peuvent être fort différens dans ces deux cas. On enseigne également à calculer la variation qui arrive dans ces moments, quand le Vaisseau est plus ou moins calé dans le fluide; & l'on donne des formules pour trouver facilement, par le moyen des moments déjà trouvés pour un Navire, ceux qui correspondent à tout autre Navire semblable au premier par ses fonds. On

* Ce sont ces moments que les Marins Espagnols appellent *Apuante de Vela*; c'est comme si on disoit en Français, la force, ou l'énergie, de la voile.

finit ce Chapitre , en faisant voir combien il importe , pour que le Navire porte bien la voile , que le centre des résistances horisontales soit le plus élevé qu'il est possible , & que les côtés du Navire , à partir de l'horizontale qui passe par le centre de gravité , & en allant vers le haut , soient verticaux autant qu'il se peut ; car cette qualité de porter la voile ne dépend pas seulement de la section horisontale du Navire faite à fleur d'eau , comme on l'a cru & enseigné jusqu'ici.

Dans le Chapitre VII on traite des moments qui agissent sur le Navire dans son mouvement de rotation horisontal , lorsqu'il *vire* , comme disent les Marins , ou lorsqu'il vient au lof , ou qu'il arrive. On voit , par ces moments , la propension que le Navire auroit pour arriver , s'il n'en étoit pas empêché par d'autres forces. On explique la variation qui arrive dans les mêmes moments , lorsque le vaisseau est plus ou moins calé ; & on donne des formules pour trouver ceux qui correspondent à un Navire quelconque , semblable au premier par ses fonds.

Le Chapitre VIII traite des moments que subit le Vaisseau dans son mouvement de rotation , que les Marins appellent *Tangage* , avec la même étendue & les mêmes circonstances qu'on a considéré ceux qui ont lieu dans les roulis. On termine le Livre II par le Chapitre IX , où l'on traite des moments qui , par leur action sur le Vaisseau , occasionnent ce que les Marins appellent *Arquer* : on fait voir la cause d'où provient cet effet , & l'on démontre que la force d'un seul côté du Navire seroit capable de le prévenir presque entièrement , si ce n'étoit la désunion ou le jeu qu'il y a ordinairement dans la charpente & les ferrures du Vaisseau ; ce qui fait voir la nécessité de veiller davantage à la liaison des pièces , quoique la principale attention à avoir pour éviter cet accident , consiste dans la figure des fonds du Navire , & dans l'attention de rassembler le plus qu'il est possible les différents poids vers son centre de gravité. On considère encore les mêmes moments dans le cas où le Navire est vuide ; & on fait voir évidemment que

dans cet état, il est encore plus exposé à s'arquer. Après cela on examine l'arc produit par les efforts qui tendent à désunir le Navire dans le sens de sa largeur, lequel n'a point encore été considéré, quoiqu'il soit très-considérable, & en même temps très-préjudiciable, sur-tout dans les Vaisseaux de guerre, lorsque leurs batteries sont fort élevées au-dessus du centre de gravité. On fait voir le mauvais ordre avec lequel on distribue l'artillerie dans les Navires, & l'on donne les règles qu'on devroit suivre pour éviter les inconvénients qui résultent très-souvent de ce qui se pratique aujourd'hui.

Le Livre III traite des machines qui servent à mouvoir & à gouverner le Vaisseau. Le Chapitre premier a pour objet les voiles; on y considère la figure qu'elles prennent, la force avec laquelle le vent agit sur elles, & la direction de cette force. On trouve que la courbe qu'elles forment est très-différente de la *Chainette*, qu'on a cru jusqu'à présent qu'elles formoient; & l'on donne les abscisses & les ordonnées qui doivent servir à la décrire. On détermine la force absolue avec laquelle les voiles agissent, & l'on fait voir qu'elle ne dépend pas seulement de l'angle que le vent forme avec les vergues, mais aussi de la courbure plus ou moins grande que la voile prend vers ses extrémités; courbure qui varie selon la vitesse du vent, la qualité de la voile & sa grandeur. On détermine encore la direction de l'action des voiles, & le centre de leurs forces, lequel tombe toujours plus vers la poupe que le centre même des voiles, selon la courbure qu'elles prennent, & selon leur largeur; ce qui est une des causes qui obligent le Navire à venir au vent. On applique ensuite cette théorie à différents exemples de pratique, & on en conclut la grande dérive que doivent éprouver les vaisseaux, par la seule augmentation du vent, indépendamment des lames & des coups de mer, que les Marins regardent, en ce cas, comme la seule cause de cette dérive. Enfin on donne des tables, où l'on trouve la surface de chaque voile

exprimée en pieds quarrés, l'élevation du centre de gravité de chacune d'elles, & la valeur de leurs moments tant verticaux qu'horizontaux, avec une application à tous les cas qui se présentent le plus généralement dans la pratique.

Le Chapitre II traite du gouvernail, de ses forces relativement aux différents angles qu'il forme avec la quille, tant du côté du vent que du côté de sous le vent, & relativement à sa figure qui contribue beaucoup à ses effets; quoique jusqu'ici on n'ait pas fait attention à cette circonstance intéressante. On trouve l'angle sous lequel le gouvernail doit faire le plus grand effet; mais en comparant l'effet qui résulte de cette disposition, avec ce qu'on obtient dans la pratique ordinaire, on fait voir que l'avantage se réduit à bien peu de chose; & l'on donne les raisons qui doivent porter à donner la préférence aux angles que les Marins emploient communément, sur ceux que la Géométrie détermine.

On donne, dans le Chapitre III, la théorie de la rame; machine bien simple dans la pratique; mais si compliquée pour sa théorie, qu'il n'y a que le célèbre *Léonard Euler*, qui nous en ait pu donner l'analyse d'une manière satisfaisante. Ce Géomètre nous auroit donné également le calcul légitime des véritables forces, & des vrais effets de cette machine, s'il ne se fût pas fondé sur la loi des résistances qui est communément reçue, & dont nous avons fait connoître la fausseté. On donne fort en détail tout le calcul; en y faisant entrer le moment le plus petit, & on en conclut la vitesse que doit prendre l'embarcation. L'accord des résultats du calcul avec les faits que présente la pratique, est une nouvelle confirmation de notre théorie des résistances. On fait observer combien il est essentiel de rendre la partie extérieure de la rame aussi légère qu'il se peut; & l'on trouve la force & la vitesse les plus avantageuses, avec lesquelles le rameur doit agir, pour que l'embarcation prenne la plus grande vitesse possible. Enfin on cherche quel est le rapport le plus avantageux qu'il

doit y avoir entre les longueurs des parties extérieures & intérieures de la rame. On fait voir que ce rapport n'est pas constant, quoique dans la même embarcation & avec les mêmes rameurs, parce qu'il dépend de la force qu'ils emploient, & du rapport entre le temps qui s'écoule entre un coup de rame & l'autre, & le temps que la rame est maintenue dans l'eau: de sorte que plus ces quantités sont grandes, plus aussi la partie extérieure de la rame doit être grande à l'égard de l'intérieure. La même chose auroit lieu, quand le nombre des rameurs seroit plus grand; & c'est tout le contraire, lorsque la résistance de la proue devient plus considérable: de façon que les grandes embarcations exigent une moindre longueur dans la partie extérieure de la rame. On considère aussi dans tout ce calcul la force des rameurs; & d'après différentes remarques qu'on expose ensuite, on conclut que la meilleure disposition de la rame est à fort-peu-près celle dont les Marins font usage, en prenant cependant quelques précautions qui sont indiquées par la différence des embarcations. On termine ce Livre par l'application de la théorie à un exemple tiré d'une Galère, & on fait voir le peu d'effet que produisent quelques moments.

Le Livre IV traite des actions & des mouvements du Navire. Le Chapitre premier est employé à l'examen de la marche, ou du mouvement progressif imprimé au Vaisseau par l'impulsion du vent sur les voiles, & du rhumb de vent qu'elle l'oblige de suivre. On donne quatre formules qui expriment les quatre vitesses que nous distinguons dans le Vaisseau, qui sont, la vitesse directe, ou dans la direction de la quille de poupe à proue; la vitesse latérale, ou perpendiculaire au côté; la vitesse oblique, ou celle dans le sens de la route que le Vaisseau suit effectivement, & qui résulte des deux premières; enfin la vitesse avec laquelle le Vaisseau s'élève dans le vent, ou celle avec laquelle il gagne, directement en opposition au vent, selon la ligne même de sa direction. A quoi on ajoute l'expression ou la valeur de l'angle de la dérive,

On analyse ensuite ces formules, & on en déduit les conséquences qu'elles présentent. On voit, au premier coup d'œil, que les quatre vitesses seroient exactement proportionnelles à celles du vent, sans la courbure des voiles qui altère un peu cette proportion. On voit également, que plus le rapport entre la résistance du côté & celle de la proue sera grand, plus la vitesse directe ou par la proue sera grande, & plus la vitesse latérale sera petite; & pour que le Vaisseau gagne au vent, on voit qu'il est nécessaire que ce rapport soit plus grand que celui de la tangente de l'angle que le vent forme avec la quille, à la tangente de l'angle que la perpendiculaire à la quille forme avec la direction suivant laquelle se fait la force des voiles. Ces formules manifestent également, que les quatre vitesses augmentent à mesure qu'on augmente la voilure, & que les vitesses directes & obliques augmentent à un tel point, quand on navigue vent large avec tout son appareil, qu'elles arrivent enfin à être plus grandes que celles du vent. On indique les cas où cela arrive; & quoiqu'ils n'aient pas lieu dans les Navires, ils se rencontrent dans les Galeres & les Chebecs. On applique ensuite ces formules à différents exemples de pratique, c'est-à-dire à des exemples relatifs à la disposition ordinaire des appareils qu'emploient les Marins, tant vent en poupe, que vent large, & à la bouline; & on trouve la pratique entièrement d'accord avec les solutions qui résultent des formules. Il n'en est pas la même chose des solutions que donne l'ancien système des résistances; les vitesses qu'on en déduit pour les Navires sont bien éloignées de celles que la pratique manifeste. On fait voir encore que l'augmentation de la vitesse directe provenant de la plus grande raison, dans laquelle peuvent être les résistances latérales & par la proue, ne s'étend pas aux cas où cette raison augmenteroit, en allégeant ou en faisant caler d'avantage le Vaisseau; car quoique effectivement on trouve, dans ce cas, quelque différence, elle est si petite qu'elle ne mérite pas la moindre atten-

tion. L'expression totale de la même vitesse réduite en série, facilite la manière de combiner les dimensions principales qu'on doit donner aux Vaisseaux pour qu'ils prennent la plus grande marche possible. En augmentant leur longueur, & en diminuant à proportion leur profondeur, on augmente la vitesse ; mais on verra que cela n'est pas sans inconvénient. La vitesse augmente pareillement lorsqu'on augmente la longueur, & qu'on diminue à proportion la largeur. Mais dans le cas où l'on se donneroit une longueur constante, & qu'on feroit varier seulement la largeur & la profondeur, on trouve qu'il est avantageux, pour naviguer vent arrière, ou avec un vent très-largue, d'augmenter la largeur, & de diminuer la profondeur : c'est tout le contraire en naviguant à la bouline, ou avec des vents près. C'est aussi ce qu'on observe journellement dans la pratique, & ce qu'on ne peut déduire de l'ancien système des résistances. On termine ce Chapitre en démontrant par les mêmes formules, qu'avec des vents modérés, les petits bâtiments doivent mieux marcher que les grands qui leur seroient semblables ; & qu'au contraire, les grands bâtiments ont l'avantage avec un vent violent.

Le Chapitre II traite des angles que les voiles & le vent doivent former avec la quille, pour que le Navire puisse prendre la plus grande marche qu'il est possible. On a jugé à propos de séparer cet objet du Chapitre précédent, auquel il appartenait naturellement, à cause de son étendue, des attentions qu'il exige, & des circonstances particulières auxquelles il faut avoir égard. On donne premièrement une formule qui exprime la valeur de l'angle que doit former la voile avec la quille, pour que le Vaisseau marche avec le plus de vitesse qu'il est possible, en supposant constant l'angle que forme le vent avec la même quille. Cette formule fait voir que cet angle de la voile n'est pas constant, quoique dans un même Vaisseau, comme les Géomètres l'ont cru généralement jusqu'ici ; parce que non-seulement il dépend de la relation entre les résistances du côté & de la proue, mais encore de la quantité de

voiles que porte le vaisseau, & de la courbure des mêmes voiles : enforte que cet angle doit être d'autant plus petit, que le rapport des résistances sera plus grand, que la quantité de voiles déferlées sera plus grande, & que leur courbure sera plus petite. On en apporte plusieurs exemples ; en supposant un vaisseau de 60 canons, allant à la bouline, avec tout son appareil, on a trouvé cet angle de $28^{\circ} 47'$, & si on suppose qu'il navigue seulement avec les deux voiles majeures, on le trouve de $40^{\circ} 42'$; angle qui est à-très-peu-près le même que celui qu'emploient les Marins dans tous les cas. On cherche ensuite quel est le vent qui fait marcher un Vaisseau avec le plus de vitesse qu'il est possible, & on démontre que ce n'est pas toujours le même vent qui produit cet effet, ni même le vent arriere ; quoiqu'on ait cru généralement jusqu'ici que le vent arriere étoit, sans contredit, le plus avantageux, toutes les fois que la quantité de voiles déferlées demeurait la même. Personne ne s'est persuadé que le vent large pouvoit être plus avantageux ; & lorsque l'expérience a forcé de reconnoître cet effet, on l'a seulement attribué à ce qu'en naviguant vent arriere, les voiles se couvrent mutuellement, & se dérobent le vent les unes aux autres. On trouve la formule qui exprime la valeur de cet angle le plus avantageux que doit former le vent, & par cette formule on fait voir que cet angle est variable, parce qu'il dépend du rapport dans lequel seront les résistances du côté & de la proue, de la quantité de voiles que le Vaisseau porte, & de la courbure des mêmes voiles : enforte que, plus cette raison des résistances sera grande, qu'il y aura une plus grande quantité de voiles déferlées, & que la courbure des voiles sera moindre, ou que le vent sera moins violent, plus l'angle du vent qui est nécessaire pour faire marcher le vaisseau le plus vite qu'il est possible, sera ouvert. On trouve que pour un Vaisseau de 60 canons, lorsqu'il ne porte pas plus de 8934 pieds carrés de voilure, c'est le vent arriere qui de tous les vents le fera marcher avec le plus de vitesse ; qu'aussi-tôt qu'on augmente la
quantité

quantité des voiles, ce n'est plus le vent arriere qui a cet avantage, mais un autre vent plus ouvert; & enfin ce Vaisseau portant une voilure de 17680 pieds quarrés, c'est le vent qui formera avec la quille un angle ouvert de $41^{\circ} 56'$, qui lui donnera le plus de vitesse. On substitue ensuite les angles les plus avantageux dans la formule qui donne la vitesse, & on trouve le *maximum maximorum* de la vitesse, ou la plus grande vitesse qui puisse résulter dans les cas innombrables qui peuvent avoir lieu. Dans le Vaisseau de 60 canons on trouve cette plus grande vitesse de $\frac{7}{10}$ de celle du vent; & dans un Chébec elle est de $\frac{1}{10}$ de la même vitesse: enforte que la vitesse de ce dernier est de $\frac{6}{10}$ plus grande que celle du vent. Pour trouver la plus grande vitesse avec laquelle un Vaisseau puisse gagner dans le vent, & la relation entre les angles qui doivent la produire, on parvient à une formule très-compiquée. Cette formule fait voir que les angles qui donnent cette plus grande vitesse, ne peuvent pas être les mêmes que ceux qui procurent au Vaisseau le plus grand sillage qu'il est possible; mais qu'ils en diffèrent beaucoup, & qu'ils dépendent, comme dans les autres cas, non-seulement de la relation qui regne entre la résistance du côté & celle de la proue, mais encore de la quantité de voiles que le Vaisseau porte, & de la courbure des voiles, ou de l'impétuosité du vent: de façon que plus le Vaisseau porte de voiles, & moins le vent a de force, plus les angles que doivent former le vent & les voiles avec la quille, pour gagner au vent le plus qu'il est possible, doivent être aigus. Finalement, ayant trouvé les valeurs de ces angles, & les ayant substituées dans la formule qui donne la vitesse avec laquelle le Vaisseau s'élève dans le vent, on trouve l'expression de la plus grande de ces vitesses. Dans le Vaisseau de 60 canons, on la trouve des $\frac{1}{10}$ de la vitesse du vent, tandis qu'en suivant la méthode qu'emploient les Marins, elle est seulement de $\frac{1}{10}$; d'où l'on voit qu'il est possible de gagner au vent un tiers de plus qu'on ne l'a fait jusqu'ici.

Le Chapitre III s'étend sur l'inclinaison que doivent prendre les Vaisseaux en vertu de l'impulsion du vent sur les voiles : car ayant déjà examiné, dans le Chapitre VI du Livre II, les moments avec lesquels les côtés résistent à l'inclinaison ; & dans le Chapitre premier du Livre III, ceux que le vent produit dans les voiles, il n'est question que d'égaliser ces moments pour avoir l'inclinaison qui doit en résulter. On obtient, par ce moyen, la formule qui en exprime la valeur ; & quoiqu'on remarque dans cette formule différentes quantités relatives à différentes especes de Bâtimens, on peut les réduire à une seule, les autres pouvant être négligées, sans crainte d'erreur sensible. On applique ensuite cette formule à différents exemples, & on en conclut les inclinaisons mêmes qu'on observe journellement dans la pratique. Il n'en est pas de même dans l'ancien système des résistances : les inclinaisons qu'on en conclut sont fort éloignées de la réalité, & sont voir à découvert les absurdités qui résultent des fausses suppositions de cette théorie, & même des expériences reçues. On explique encore ce qu'on a entendu par *Point vélique*, point dont on a cherché la position, afin d'obtenir que le navire n'éprouvât aucune inclinaison ; & l'on fait voir l'impossibilité de ce projet. On donne aussi le calcul & un exemple du cas que les Marins appellent *coëffer*, * & qui, par le défaut d'une connoissance parfaite, n'est pas encore suffisamment redouté : on démontre le grand risque qu'il y a de périr en pareil cas. Les formules qui expriment l'inclinaison qu'un Vaisseau doit prendre, s'appliquent ensuite aux cas

* Ce cas, que les Espagnols appellent *Tomar por alúa*, arrive, lorsque naviguant avec un vent violent, le vent vient à prendre les voiles en face, c'est-à-dire, par la proue, ou sous le vent, soit par le défaut de soin du Timonier, soit par un changement subit dans la direction du vent ; alors le Vaisseau vire, ou fait *chapelle*, comme disent les Marins, malgré le manœuvrier, à moins qu'il ne soit très-prompt à faire contrebraffer devant ; l'inclinaison se fait subitement du côté opposé, & devient très-considérable. Ce qui peut arriver de plus heureux dans ce terrible accident, qui a fait périr un grand nombre de Bâtimens, c'est que les voiles soient mises en pièces par la violence du vent, ou que la mâture vienne à se rompre.

où l'on feroit quelques changements à la coque , soit dans son poids , soit dans son volume submergé ; & l'on en conclut que le Vaisseau portera mieux la voile , si le poids additionnel est placé plus bas que la superficie de l'eau ; & ce sera le contraire , si ce poids est placé plus haut : l'augmentation ou la diminution de la force du Vaisseau pour porter la voile , étant proportionnelle à la distance du poids ajouté à la surface de l'eau. Pareillement , le Vaisseau portera mieux la voile , si le volume qu'on lui ajoute est plus élevé que celui qu'on supprime , & réciproquement ; & si on ajoute en même temps un poids & un volume , la force du Vaisseau , pour porter la voile , augmentera , si le volume ajouté est plus haut que le poids. Enfin on démontre que dans les Vaisseaux entièrement semblables , les forces pour porter la voile sont en raison inverse de leurs dimensions linéaires , & que dans les inclinaisons de poupe à proue , les Vaisseaux étant construits comme ils le sont aujourd'hui , bien loin que les proues soient submergées par l'action ou la force du vent sur les voiles , elles s'élèvent davantage sur le fluide.

Le manège du Vaisseau , c'est-à-dire , la combinaison des forces qui agissent continuellement pour le faire tourner , fait le sujet du Chapitre IV. Le gouvernail est seulement une de ces forces , & en bien des cas elle n'est pas la plus efficace. On démontre que l'axe de la force motrice , en supposant les voiles planes , & le Vaisseau sans inclinaison , ne concourt pas avec l'axe des résistances , & que ces deux axes ne coïncident qu'en conséquence de la courbure que prennent les voiles , & de l'inclinaison que prend le Vaisseau. Comme ces deux choses dépendent de la force plus ou moins grande du vent , de la plus ou moins grande quantité de voiles , & de leur hauteur ; il s'ensuit que l'une quelconque de ces quantités venant à varier , l'axe de la force motrice doit aussi varier , & que l'équilibre dans le manège sera détruit ; le manège sera par conséquent très-inconstant , quelque chose qu'on nous ait enseigné de contraire jusqu'ici. On met en évidence tous les cas

où le Vaisseau doit venir au vent, ou arriver, soit parce que le vent éprouve quelque altération, soit parce qu'on augmente ou qu'on diminue la hauteur ou l'amplitude des voiles, soit enfin par une variation quelconque dans l'état de la charge, ou dans les dimensions mêmes du corps du Vaisseau, particulièrement dans ses élancements & quêtes, qui sont une des principales causes d'où dépend la perfection du manège, quoique quelques Constructeurs très-célebres ne l'aient pas cru jusqu'ici. Enfin, on traite de l'emplacement des mâts, dont dépend encore la qualité de bien gouverner, dans tous les cas qu'on peut supposer pour les variations des voiles, & des efforts du vent, lesquels sont tous vérifiés par des exemples de pratique. On finit ce Chapitre, en donnant une formule générale qui renferme tous les cas.

Le Chapitre V traite du roulis & du tangage, objets dans lesquels, encore plus que dans tous les autres, on a commis jusqu'à présent de grandes erreurs; car on les a considérés seulement comme dépendants de l'état & de la disposition du corps du Vaisseau, & en aucune maniere du volume & de la vitesse des flammes, ce qui en est cependant la principale cause. On donne d'abord les formules, ou les valeurs, non-seulement du temps dans lequel le Vaisseau achève son roulis, considéré comme un pendule simple, ainsi que l'ont fait jusqu'ici tous les Auteurs, mais encore de la vitesse avec laquelle il le fait, & de l'action que les mâts & le corps du Navire éprouvent dans ce balancement. On fait voir que cette action, qui est l'unique à laquelle on doit faire attention, n'est pas précisément en raison inverse des temps; car elle dépend aussi de la grandeur du roulis, & celle-ci, le Vaisseau toujours considéré comme un pendule, ne dépend en aucune maniere du temps. Mais ce qui est plus, on fait voir évidemment que l'action qui agit sur les mâts & sur le Vaisseau, est si éloignée de dépendre du temps dans lequel le Vaisseau achève le roulis, qu'au contraire, la plus grande action qu'ils éprouvent est précisément dans l'instant où

le Vaisseau cessant de se mouvoir, est sur le point de se remettre en mouvement pour se redresser.

On examine ensuite le roulis qu'occasionne la lame, & le temps qu'elle doit employer à passer par-dessous le Navire. On fait voir combien la vitesse de la lame influe sur ce balancement, & le peu dont les voiles alterent ses effets. On démontre que ce temps est grand dans les petites lames, qu'il diminue jusqu'à être parvenu au *minimum*, & qu'ensuite il augmente de nouveau dans les plus grandes lames : de sorte que, dans le Vaisseau de 60 canons, la lame qui passe le plus promptement par-dessous la carene est celle qui a un peu plus de trois pieds de hauteur ; toutes les autres, soit qu'elles soient d'une plus grande, ou d'une moindre hauteur, emploient plus de temps. On fait voir aussi la différence qu'il y a entre les lames agitées par un vent constant, & celles qui subsistent après que le vent qui les a produites s'est calmé ; * & on met en évidence l'erreur à laquelle ces dernières ont conduit, en faisant croire à M. *Bougner* que les roulis de la Frégate le *Triton*, duroient toujours 4 secondes $\frac{1}{2}$. On démontre ensuite tous les inconvénients qu'il y auroit à éloigner beaucoup du centre de gravité les différents poids qui composent la charge du Navire, dans la vue d'augmenter la durée du roulis, parce qu'en rendant cette durée plus longue, on augmente la vitesse & la grandeur du balancement. Pareillement, quoiqu'il paroisse convenable pour le même objet, de diminuer la distance du centre de gravité au métacentre, on fait voir qu'en prenant ce parti il en résulteroit de très-grand inconvénients, parce qu'alors les lames passeroient par-dessus le Vaisseau & l'inonderoient : c'est un point qu'on n'a pas eu en vue jusqu'à présent, quoiqu'il soit cependant un des plus importants, & qu'il mérite d'être considéré avec le plus grand soin. On donne ensuite la vraie théorie du roulis ; on en déduit la véritable durée, en combinant celle dans laquelle le Vaisseau

* Ce sont ces lames que les Espagnols appellent *Olas de Lebu*.

acheveroit un roulis , étant considéré comme un pendule , & celle dans laquelle il l'acheveroit , si la lame agissoit seule. On trouve par ce moyen que la véritable durée d'un roulis tient un milieu entre les durées des deux autres. Le Vaisseau de 60 canons , par exemple , considéré comme un pendule , acheveroit son roulis en 2 secondes $\frac{1}{2}$; & par l'action seule d'une lame de 9 pieds de hauteur , il l'acheveroit en 3 secondes ; d'où on déduit que la vraie durée du roulis de ce Vaisseau avec la même lame est de 2 secondes $\frac{2}{3}$. Supposant que dans le même Vaisseau on écarte les poids du centre , ou de l'axe sur lequel il tourne des $\frac{1}{3}$ de plus qu'on ne le supposoit , la durée du roulis augmentera seulement d'une demi-seconde ; & en diminuant la distance du métacentre au centre de gravité , de manière à la réduire aux $\frac{2}{3}$, de ce qu'elle étoit , la même durée n'augmentera par-là que d'un tiers de seconde.

On détermine ensuite la grandeur du roulis , & l'on trouve que dans le second cas , où l'on éloignoit les poids de l'axe de rotation , la grandeur du roulis augmentera des $\frac{1}{3}$ de ce qu'elle étoit dans le premier cas ; & dans le troisieme cas , où l'on suppose diminuée la distance du métacentre au centre de gravité , la grandeur du roulis augmentera aussi de $\frac{1}{3}$ de ce qu'elle étoit auparavant. Or il est clair que ces deux augmentations dans la grandeur du roulis produiroient beaucoup plus d'inconvénients qu'on ne retireroit d'avantages , en augmentant la durée du roulis d'une aussi petite quantité. En effet , ayant trouvé la formule qui exprime les moments dont la mâtüre éprouve l'action dans les roulis , & en ayant conclu la moindre action qu'elle puisse éprouver en faisant varier le temps dans lequel le Vaisseau acheve son roulis , étant considéré comme un pendule ; on trouve que ce temps doit être égal à celui qu'emploie la lame à passer par-dessous le Vaisseau , ou à celui qu'il emploieroit à faire un roulis par la seule action de la lame : de-là on infere que pour gagner cet avantage , il seroit

nécessaire de changer l'arrimage pour chaque espèce de lame; ce qui seroit très-embarrassant, pour ne pas dire tout-à-fait impossible, dans la pratique. On voit par-là qu'il faut s'en tenir à conclure qu'il convient de disposer l'arrimage du Navire pour un cas moyen des lames, qui, par leur grandeur, peuvent faire craindre pour la mâtûre.

De même qu'on a cherché la moindre action que puisse éprouver la mâtûre en faisant varier le temps dans lequel le Vaisseau acheve un roulis, étant considéré comme un pendule; on cherche également cette moindre action en faisant varier la distance du métacentre au centre de gravité: mais on trouve que dans ce cas il n'y a point de limite, & que plus cette distance sera grande, plus la mâtûre sera exposée. Ceci paroîtroit devoir nous induire à diminuer cette distance autant qu'il est possible; mais, outre que cela préjudicieroit à la qualité de porter la voile, il y a encore un autre inconvénient non moins essentiel à considérer, qui est que la mer passeroit par-dessus le corps du Navire avec plus de facilité. En effet, cherchant ensuite la hauteur à laquelle les eaux s'éleveroient sur les côtés du Navire, on trouve par la formule qui exprime cette hauteur, qu'elle sera d'autant plus grande que la distance du métacentre au centre de gravité sera plus petite. En un mot, on trouve que ces hauteurs sont entre elles comme les quarrés des temps que les Vaisseaux emploient à achever leurs roulis: nouveau motif pour ne pas augmenter démesurément ce temps.

En supposant le Vaisseau de 60 canons, arrimé régulièrement, on trouve qu'une lame de 36 pieds de hauteur s'élèvera sur son côté de 15 pieds $\frac{1}{2}$; qu'en éloignant les poids de l'axe de rotations de $\frac{1}{2}$ de plus, elle s'élèvera de 21 pieds $\frac{1}{2}$; & qu'en diminuant la distance du centre de gravité au métacentre, de manière à la réduire aux $\frac{2}{3}$ de ce qu'elle étoit, elle s'élèveroit de 19 pieds: par conséquent le côté du Navire n'ayant seulement que 16 à

17 pieds de hauteur au-dessus du niveau de l'eau, on voit clairement que, dans ces deux derniers cas, les eaux passeroient par-dessus le corps du Navire, & que chaque lame l'inonderoit; inconvenient très-fâcheux, & qu'on est forcé de prévenir, en renonçant un peu à la plus grande sûreté des mâts. Si la plus grande sûreté de la mâture exige que les roulis durent 4 ou 5 secondes, l'élévation des eaux sur le côté ne permet pas cette durée; elle en permet tout au plus une de 3 secondes.

On fait voir encore que les frégates sont beaucoup plus exposées à ces inondations, & que, par cette raison, elles exigent qu'on tienne à proportion la distance du centre de gravité au métacentre, un peu plus grande. On apporte des exemples du peu d'attention qu'on donne à ce point important; & l'on finit l'article du roulis, en donnant des règles pour se conduire avec sûreté dans une matière aussi essentielle, & en spécifiant les cas où les roulis peuvent devenir encore plus extraordinaires, & par conséquent plus redoutables.

La suite de ce Chapitre traite du Tangage. On trouve, par les mêmes principes, le temps que le vaisseau, considéré comme un pendule, emploie à produire ce balancement; & on trouve qu'il est presque le même que celui dans lequel il achève le roulis. Il paroît, par ce résultat, qu'on devroit tirer ici les mêmes conséquences que pour les roulis; mais, dans ceux-ci, il n'étoit pas nécessaire de faire attention à la vitesse du Vaisseau, comme il est maintenant nécessaire de le faire. C'est donc en considérant cet élément de plus, qu'on cherche la vraie durée du tangage, & on trouve qu'elle est d'autant plus petite, que la vitesse du Navire sera plus grande: en sorte que le Vaisseau de 60 canons, naviguant à la bouline avec 10 pieds de vitesse par seconde, la lame ayant 9 pieds de hauteur, achèvera son tangage dans un tiers moins de temps qu'il ne l'acheveroit étant considéré comme un pendule, lequel seroit en 2 secondes $\frac{1}{2}$. On examine ensuite la grandeur du tangage, sa plus grande vitesse, & enfin l'action qui en résulte
sur

sur la mâturation. Cette action est la plus petite qu'elle puisse être, dans le cas où la durée du tangage, le navire étant considéré comme un pendule, est égale à celle du même tangage supposé produit par l'action seule de la lame : ce qui est la même chose que ce que nous avons trouvé pour les roulis. Mais dans les roulis, la durée de l'oscillation du Vaisseau, considéré comme un pendule, est moindre que celle de l'oscillation qui seroit seulement produite par l'action de la lame; c'est tout le contraire dans les tangages. Par cette raison, si dans les roulis il est nécessaire d'éloigner les poids de l'axe de rotation pour soulager la mâturation, dans les tangages, au contraire, on a besoin qu'ils soient rapprochés, en allégeant ainsi, le plus qu'il est possible, le poids des extrémités du Vaisseau. On démontre également que l'action qu'éprouve la mâturation dans les tangages, est comme les quarrés des longueurs des Navires; d'où l'on voit évidemment qu'il est nécessaire de ne pas les allonger beaucoup, dans la vue seule de leur procurer une marche un peu plus avantageuse. La diminution de la distance du métacentre au centre de gravité conduit encore ici à diminuer le travail de la mâturation; mais, de même que dans les roulis, les élévations des eaux à la proue seroient, dans ce cas, plus considérables; & d'autant plus que dans les tangages la vitesse du Vaisseau contribue beaucoup à produire un plus grand effet. On trouve, pour le Vaisseau de 60 canons, naviguant à la bouline avec 10 pieds de vitesse par seconde, qu'une lame de 9 pieds de hauteur s'élève de plus de 9 pieds à la proue, tandis qu'elle ne s'élèveroit pas même à 6 pieds, si le Vaisseau ne marchoit pas. Dans le même Vaisseau, avec une lame de 36 pieds de hauteur, l'eau s'élèveroit à 16 pieds $\frac{1}{2}$, en supposant le Navire arrêté; & en lui supposant une vitesse de 15 pieds par seconde, elle s'élèveroit jusqu'à 20 pieds $\frac{4}{11}$; c'est-à-dire, qu'elle surpasseroit de plus de 3 pieds toute la hauteur du corps du Vaisseau. Ceci fait voir la nécessité de diminuer la voilure dans les vents forcés, comme le pratiquent les Marins, & démontre l'impossibilité de porter toute

la voilure, comme l'a prétendu M. *Bouguer*. Lorsque les lames choquent par la poupe, la vitesse du Vaisseau produit un effet tout contraire; elle diminue l'élevation des eaux. Dans le cas ci-dessus du Navire de 60 canons, cinglant avec une vitesse de 15 pieds par seconde, les lames ayant 36 pieds de hauteur, on trouve que les eaux doivent seulement s'élever à la poupe de 10 pieds $\frac{1}{2}$, tandis qu'on vient de voir qu'elles s'élevoient à la proue de 20 pieds $\frac{1}{4}$. Cinq pieds de plus de vitesse dans le même Vaisseau ne diminueroient l'élevation des eaux que d'un demi-pied seulement; ce qui fait voir le peu de nécessité qu'il y a, naviguant vent arriere, de forcer de voiles, dans la vue seule de fuir les lames: il suffit d'en porter une quantité suffisante, pour donner au Vaisseau une vitesse de 15 pieds par seconde, ou un peu plus.

De la plus grande elevation des eaux qui, par ces motifs, doit avoir lieu à la proue, on déduit clairement que la hauteur du métacentre au-dessus du centre de gravité qui correspond à la partie de l'avant du Navire, doit être plus grande que celle qui correspond à la partie de l'arriere; ou, comme ces hauteurs dépendent des largeurs du Navire à ses extrémités, on voit conséquemment la nécessité absolue que l'avant soit plus renflé, ou plus volumineux que l'arriere. Les Marins ont toujours pratiqué ceci, contre le vœu général des Géometres, qui n'ont cessé de demander des proues aiguës pour faire marcher le Vaisseau avec plus de vitesse; sans réfléchir que ces proues pouvoient occasionner la ruine des Bâtimens, sans peut-être leur donner la supériorité de marche qu'ils cherchoient à leur procurer. Enfin on termine ce Livre, en traitant de l'endroit où il convient de mettre le fort, ou la plus grande largeur du Vaisseau, & de la figure que doivent avoir ses couples, pour obtenir également la plus grande perfection possible dans les mouvements de tangage.

Le cinquieme & dernier Livre de l'Ouvrage, contient une récapitulation de tout ce qui a été dit dans les Livres précédents, mais sans y employer aucun calcul analytique, afin de rendre notre

Ouvrage d'une utilité plus générale, en le mettant, autant qu'il est possible, à la portée des Marins. Le Chapitre premier traite de la force des Vaisseaux, de l'échantillon des bois qui entrent dans leur construction, & des dimensions principales avec lesquelles ils doivent être construits. On y fait voir la foiblesse avec laquelle les Vaisseaux sont construits, & la force démesurée qu'on donne aux Frégates, sans faire attention que les Vaisseaux sont à proportion beaucoup plus surchargés d'artillerie. On donne des regles pour une construction bien proportionnée; & on finit en donnant la méthode pour régler les épaisseurs, le poids & les forces des bois, lors même qu'ils seroient de différentes qualités ou especes.

Le Chapitre II traite de la grandeur des Vaisseaux : on fait voir qu'on les a augmentés, depuis quelque temps, sans une grande nécessité; & on expose les avantages qui peuvent résulter de l'une & l'autre proportion. On enseigne la maniere de leur donner les dimensions convenables à l'artillerie qu'ils doivent porter. De là on infere combien il seroit à souhaiter que les pieces d'artillerie fussent courtes & légères, non-seulement pour que le service en fût plus prompt & plus commode, mais encore pour soulager les Navires, pour leur plus grande solidité & leur plus grande durée.

Le Chapitre III s'étend sur la qualité de porter la voile, & l'on y rappelle ce qu'on a dit précédemment. On met en évidence l'erreur dans laquelle on tomberoit, en augmentant les appareils des grands Vaisseaux, comme l'ont prétendu quelques Marins spéculatifs, par la seule raison que leur stabilité est plus grande pour porter la voile. On recherche aussi la variation qui doit arriver dans cette même qualité, lorsqu'on fait varier quelqu'une des dimensions, le poids ou la coque du Vaisseau; & on éclaircit le tout par les exemples nécessaires.

Le Chapitre IV traite de la marche & du rhumb de vent que suivent les Vaisseaux; mais, comme les formules dont on a déduit les démonstrations sont très-complicquées, on tâche d'expliquer le

tout par des constructions géométriques, qui sont d'une intelligence très-facile. Le Chapitre V s'étend sur le manège du Vaisseau; on explique toutes les forces dont l'action contribue à cet effet, & les avantages qui résultent de placer les mâts convenablement. Enfin le Chapitre VI traite du roulis & du tangage : on apporte différents exemples, & l'on indique de nouveau les attentions nécessaires pour adoucir ces balancements.

Si sur le tout on a soin de consulter la pratique, on verra clairement, dans tous les cas, sa correspondance parfaite avec notre théorie. C'est l'unique moyen d'en juger sainement, & de s'assurer de la vérité des principes sur lesquels elle est fondée.

AVERTISSEMENT.

LES nombres que l'on trouve entre deux parenthèses, dans plusieurs endroits de cet Ouvrage, sont destinés à indiquer à quel numéro du Livre il faut aller chercher la proposition dont le Lecteur doit se rappeler la démonstration dans cet endroit. On indique aussi le Volume, lorsque le renvoi n'appartient pas à celui où se fait la citation. A l'égard des numéros, ils sont au commencement des propositions dans le premier Volume, & au commencement des à-linéa dans le second.





EXAMEN MARITIME,
THÉORIQUE ET PRATIQUE,
OU
TRAITÉ DE MÉCANIQUE,
*Appliqué à la Construction & à la Manœuvre des Vaisseaux
& autres Bâtimens.*

LIVRE PREMIER.
DE LA MÉCANIQUE.

CHAPITRE PREMIER.
Définitions, Axiomes, & Principes du Mouvement.

DÉFINITION I.

(1.) **L**E *Lieu d'un corps* est sa situation dans l'univers, ou la partie de l'espace immobile qu'il occupe. Nous en avons tous une idée claire, distincte & simple; quelles que soient les expressions qu'on emploie pour en donner une définition, on ne peut en rendre

l'intelligence plus facile ; il semble , au contraire , qu'on en rend l'idée moins distincte. * On le distingue en *Lieu absolu* , & en *Lieu relatif*.

D É F I N I T I O N I I.

(2.) Le *Lieu absolu* est celui qu'occupe un corps par rapport à tout l'univers , sans aucune relation aux lieux des autres corps. Le *Lieu relatif* est celui qu'occupe un corps , eu égard aux lieux des autres corps. Dans un Navire en mouvement , les chambres & les mâts occupent le même lieu par rapport au Navire , mais non par rapport au rivage , ou à la terre : ainsi on dit que le lieu relatif des chambres & des mâts est toujours le même , mais non leur lieu absolu , parce qu'en effet il change par rapport à l'univers.

D É F I N I T I O N I I I.

(3.) Le *Mouvement* est le transport d'un corps d'un lieu à un autre , ou son changement continuuel de lieu. Ainsi on dit qu'un corps se meut ou est en mouvement , lorsqu'il passe d'un lieu à un autre , ou qu'il change continuellement de lieu. On dit , au contraire , qu'un corps est en repos , lorsqu'il reste constamment dans le même lieu.

D É F I N I T I O N I V.

(4.) De même que le lieu peut être absolu ou relatif , le mouvement peut aussi être absolu ou relatif. Lorsque le lieu , par rapport auquel le mouvement s'exécute , est absolu , le mouvement est aussi absolu , & si le lieu étoit relatif , le mouvement le seroit aussi. Ainsi , un mouvement absolu peut être un repos relatif. Les chambres & les mâts d'un Navire ont un mouvement absolu , lorsqu'il se meut ; mais ils sont en repos à l'égard du Navire.

D É F I N I T I O N V.

(5.) Si le corps se meut en se conservant toujours dans une même ligne droite , on appelle cette ligne la *Direction du Mouvement*.

* Cette définition du *Lieu* est très-philosophique , elle est entièrement conforme à notre manière de concevoir ; mais il n'a pas tenu aux Métaphysiciens d'embrouiller cette idée à force de distinctions. Nous ne suivrons point leur exemple , & par conséquent nous nous dispenserons d'exposer toutes les rêveries qu'ils ont débitées à ce sujet. Nous terons seulement observer , en passant , que toutes les idées dont le sujet s'apperoit par une simple opération de l'esprit , comme l'idée de l'Espace , de la Matière , du Mouvement , &c ne peuvent que s'obscurcir , lorsqu'on y applique le raisonnement ; ou du moins il semble que la perception en devient moins distincte.

D É F I N I T I O N V I.

(6.) On appelle *Vitesse* la promptitude ou célérité avec laquelle s'exécute le mouvement d'un corps ; & on dit qu'un corps a plus ou moins de vitesse , selon qu'il se meut avec plus ou moins de promptitude ou célérité.

D É F I N I T I O N V I I.

(7.) Comme la vitesse dépend du mouvement , qui peut être absolu , ou relatif , il s'ensuit que la vitesse peut aussi être absolue , ou relative. Si le mouvement est absolu , ou s'il se fait par rapport à un lieu absolu , la vitesse est dans ce cas absolue ; & si le mouvement se faisoit à l'égard d'un lieu relatif , la vitesse seroit relative. Ainsi , une vitesse absolue peut être un repos relatif , ou peut n'exprimer aucune vitesse relative. Si V représente la vitesse absolue du corps A , & u celle du corps B dans la même direction ; la vitesse relative de ces deux corps sera $V \mp u$. Le signe négatif est pour le cas où les deux corps se meuvent vers la même partie ; & le positif pour celui où ils se meuvent en sens contraire , ou vers des parties opposées.

D É F I N I T I O N V I I I.

(8.) Le mouvement est dit *uniforme* , lorsque la vitesse avec laquelle le corps se meut , est toujours la même. On l'appelle *accélééré* , lorsque la vitesse va toujours en augmentant ; & *retardé* , quand elle va en diminuant.

D É F I N I T I O N I X.

(9.) On appelle *Espace parcouru* le chemin que le corps fait pendant son mouvement. Cet espace peut être en ligne droite , ou en ligne courbe , selon la nature des forces qui agissant sur le corps , l'obligent à se mettre en mouvement , & le modifient , comme on le dira ci-après.

D É F I N I T I O N X.

(10.) Si le mouvement est absolu , l'espace parcouru le sera aussi , & il sera relatif , si le mouvement est relatif. Soit E l'espace parcouru par le corps A , & e celui parcouru par le corps B dans une même ligne ou direction ; on aura $E \mp e$ pour l'espace relatif. Le signe $-$ est pour le cas où les corps se meuvent vers la même partie ; & le signe $+$ pour celui où ils se meuvent en sens contraire , ou vers des parties opposées.

D É F I N I T I O N X I.

(11.) On appelle *Masse* la quantité de matiere dont un corps est composé. On dit qu'un corps a plus ou moins de masse, selon qu'il entre plus ou moins de matiere dans sa composition.

D É F I N I T I O N X I I.

(12.) Un corps qui, dans toutes ses parties, renferme des quantités égales de matiere, sous des volumes égaux, est dit également ou uniformément dense; & si deux ou plusieurs corps renferment la même masse sous des volumes égaux, on dit qu'ils sont de même densité. Un corps est dit plus dense qu'un autre, lorsqu'il renferme plus de masse sous le même volume, ou lorsque, sous un moindre volume, il renferme la même quantité de masse. Ainsi, les densités de deux corps sont comme leurs masses sous des volumes égaux; ou en raison inverse des volumes, sous des quantités égales de masse.

D É F I N I T I O N X I I I.

(13.) La force qu'on imprime à un corps quelconque, est l'action qu'on exerce sur lui pour le faire sortir de l'état dans lequel il se trouve, soit pour le faire passer de l'état de repos dans celui de mouvement; selon une direction quelconque, soit pour le faire passer d'un mouvement à un autre plus ou moins grand, dans la direction suivant laquelle il se meut. Quelle que soit cette force, on l'appelle *Puissance*; elle peut être constante ou variable, positive ou négative.

D É F I N I T I O N X I V.

(14.) La *Force innée* de la matiere, est la propriété qu'ont les corps de résister au changement d'état de repos, ou de mouvement, dans lequel ils se trouvent.

Un corps qui est en repos, ne peut être mis en mouvement par une force, quelle qu'elle puisse être, sans qu'on n'éprouve l'action d'une autre force opposée, qui provient du corps, de quelque maniere que ce soit. La force motrice ne pourroit exercer son action sans cette résistance; car sur quoi auroit-elle à s'exercer? Dans cette supposition, le corps se mettroit en mouvement par lui-même, sans le secours d'aucune force; ce qui est impossible. Pareillement, on ne peut augmenter ou diminuer le mouvement d'un corps, sans que la force qui opere ce changement n'éprouve l'effet d'une résistance qui

qui s'oppose à son action, & cela par les mêmes raisons. L'expérience manifeste encore plus clairement l'existence de cette force: il ne faut que pousser ou tirer un corps, pour sentir une action semblable à celle qu'exerceroit une force opposée quelconque : quelle que soit la cause dont cette force provienne, & quelle que soit la manière dont elle agit, il est certain qu'elle existe, & cela nous suffit pour l'admettre comme principe. *Newton* a donné à cette force le nom de *Force d'inertie*, ou *d'inaction*; * mais on avertit que ce nom ne lui convient proprement que dans le cas où le corps passe du repos au mouvement, parce qu'il résiste à prendre celui-ci, ou bien lorsqu'il s'agit d'augmenter le mouvement que le corps auroit déjà; mais non dans le cas où le corps étant en mouvement, une force quelconque agiroit pour le retenir: la matière résiste alors à diminuer son mouvement, & par conséquent, le nom de *Force d'inaction* ne convient nullement à cette résistance. En général, la propriété de cette force innée est de résister au changement de l'état dans lequel se trouve le corps : c'est une résistance effective dans le cas où une force agit sur le corps, pour augmenter son mouvement; mais au contraire c'est une impulsion, quand quelque force agit pour diminuer le même mouvement.

D É F I N I T I O N X V.

(15.) La *Quantité de mouvement* est le produit de la masse en mouvement par sa vitesse.

Le mouvement d'un corps consistant dans le transport de sa masse, il est évident que plus la masse sera grande, plus le mouvement sera grand. Il est encore évident que le mouvement sera d'autant plus grand, que la vitesse avec laquelle le corps se meut sera plus grande. La *Quantité de mouvement* est donc en raison composée de la masse du corps & de sa vitesse; c'est-à-dire, comme le produit Au , A désignant la masse, & u la vitesse.

A X I O M E I.

(16) Tous les corps persévèrent dans leur état de repos ou de

* Les Géomètres & les Physiciens attachent à l'expression *Force d'inertie*, dont ils se servent, la même idée que notre Auteur à celle de *Force innée*. Cette dernière expression nous paroit cependant plus exacte, & , par cela, préférable. Nous avertissons les Commencants de ne pas confondre la *Force innée* avec la *Pesanteur*; celle-ci n'agit que dans une direction, au lieu que la *Force innée* agit dans toutes les directions.

mouvement uniforme, dans la direction, ou ligne, suivant laquelle ils sont dirigés lorsqu'ils commencent à se mouvoir, à moins que quelque force, ou puissance, ne les oblige à changer d'état. Un corps ne peut par lui-même se déterminer au mouvement, ou produire une force quelconque pour se mouvoir, s'il est en repos : au contraire, (14.) il résiste au mouvement qu'on voudroit lui imprimer, en vertu de sa Force innée, ou d'inertie. Il ne peut de même, quoiqu'il soit en mouvement, produire aucune force dans quelque direction que ce soit; son inertie le conserve dans le même état, sans augmenter ni diminuer sa vitesse, & par la même raison, sans le détourner de la direction suivant laquelle il a commencé à se mouvoir : il doit donc persévérer dans son état de repos, ou de mouvement uniforme, dans la direction, ou ligne, suivant laquelle il a été dirigé dès le commencement.

C O R O L L A I R E.

(17.) Il suit de là qu'un corps ne se mouvra d'un mouvement accéléré, ou retardé, que parce qu'une puissance quelconque agira sur lui : cette force agira positivement, ou suivant la direction du mouvement du corps, dans le cas du mouvement accéléré; & elle agira, au contraire, négativement, ou dans une direction opposée à celle que suit le corps, dans le cas du mouvement retardé. Ainsi, il n'y a de différence entre le mouvement accéléré & le retardé, qu'en ce que l'action de la puissance agit positivement dans le mouvement accéléré, & qu'elle agit négativement dans le mouvement retardé; ou qu'en ce que la même puissance est positive ou négative.

A X I O M E I I.

(18.) La variation, ou la différencielle, du mouvement, est toujours proportionnelle au produit de la puissance dont elle est l'effet, par le temps qu'a duré son action; & cette variation se fait dans la direction suivant laquelle la puissance agit. Si la puissance α , agissant pendant la différencielle de temps dt , altere la vitesse qu'auroit le corps A de la différencielle du , de sorte que la variation, ou la différencielle, du mouvement soit Adu , une autre puissance 2α , produira la variation, ou différencielle, du mouvement $2Adu$. Car, par la supposition, la seule puissance α produit la différencielle du , l'autre puissance α produira donc aussi une nouvelle différencielle du égale à la première; par conséquent, la somme des deux différencielles est $2du$, & la variation, ou la différencielle, du mouvement

fera $2 A du$. On prouvera de même qu'une puissance $3 a$ produira dans le mouvement la différencielle $3 A du$; & ainsi de suite. Pareillement les puissances $\frac{1}{2} a$, $\frac{1}{3} a$, &c. produiront, dans le mouvement du corps, les différencielles $\frac{1}{2} A du$, $\frac{1}{3} A du$, &c. Donc les variations, ou différencielles, du mouvement sont toujours proportionnelles à la puissance qui les produit.

D'un autre côté, puisque la différencielle du de la vitesse est plus ou moins grande, selon que le temps dt , pendant lequel la puissance agit, est plus ou moins grand, il en fera de même de la différencielle $A du$ du mouvement. Donc cette variation, ou différencielle, sera en raison composée de la puissance a , & du temps dt , ou comme le produit $a dt$. Quant à la direction de cette différencielle du mouvement, il est évident, par le premier Axiome, qu'elle est la même que celle de la puissance.

C O R O L L A I R E.

(19.) Puisque $A du$ est proportionnelle à $a dt$, il s'ensuit qu'on aura $A du = a dt$.

S C O L I E I.

(20.) Quoique jusqu'ici nous n'ayons encore établi que la proportionnalité entre $A du$ & $a dt$, on peut cependant former une égalité parfaite entre ces deux quantités; car, quoique la puissance puisse être plus ou moins grande, on peut diminuer ou augmenter proportionnellement la différencielle dt ; de manière qu'elle soit en raison inverse de la puissance a . On trouve ensuite, par l'expérience, la vraie relation entre ces quantités.

S C O L I E II.

(21.) Il y a des Auteurs qui mettent en doute la proportionnalité entre la force, ou la puissance, agissante & la différencielle de la vitesse. Il paroît cependant que, pour se convaincre de l'évidence de ce principe, il suffit de considérer, comme nous l'avons dit, que, par puissance double, on n'entend autre chose qu'une puissance qui agit précisément comme le feroient deux puissances simples, la seconde égale à la première. Le fondement du doute de ces Auteurs est que nous ignorons la nature de la cause, & la manière dont elle agit. Nous nous dispenserons d'entrer dans l'examen de cette discussion, qui nous paroît d'autant moins nécessaire, que

ces mêmes Auteurs arrivent , quoique par une voie différente , aux équations mêmes que nous avons données , qui sont la base de toute la Méchanique. Ils prétendent que la connoissance de la puissance doit résulter de ses effets ; mais que les effets ne peuvent se conclure par la puissance impulsive déterminée. Ce raisonnement n'est que spécieux , nous en ferons voir les défauts.*

A X I O M E I I I.

(22.) L'action est égale à la réaction , ou les actions mutuelles de deux corps l'un sur l'autre sont égales , & dans des directions opposées. Un corps ne peut pousser ou choquer un autre corps , sans être , en même temps , choqué ou poussé par celui-ci , avec la même force dans le sens opposé. Si un agent quelconque pousse un obstacle avec une certaine force , celui-ci repousse l'agent en sens contraire avec la même action. La même chose arrive si l'agent attire un obstacle , il en est également attiré avec une force égale dans une direction contraire. La vérité de cet Axiome est confirmée journellement par l'expérience.

P R O P O S I T I O N I.

(23.) *Si un corps se meut uniformément , ou avec une vitesse uniforme , les espaces parcourus sont entre eux comme les temps employés à les parcourir*

La vitesse du corps n'augmentant ni ne diminuant , il parcourra toujours le même espace dans le même temps ; il parcourra donc un espace double dans un temps double , un espace triple dans un temps triple , & ainsi de suite. Donc les espaces parcourus sont toujours dans la raison des temps employés à les parcourir.

P R O P O S I T I O N I I.

(24.) *Si un corps se meut uniformément , avec des vitesses différentes , les espaces qu'il parcourt en temps égaux , sont entre eux comme les vitesses.*

Puisque la plus grande vitesse consiste dans le plus grand espace parcouru dans le même temps , il s'ensuit que si un corps parcourt un certain espace avec une certaine vitesse , il parcourra un espace double avec une vitesse double , un espace triple avec une vitesse triple , & ainsi de suite. Donc les espaces parcourus sont entre eux comme les vitesses.

* Voyez l'Encyclopédie , Articles *Accélération* , *Cause* , & *Force* ; & le *Traité de Dynamique* de M. d'Alembert , Art. 22 & 158.

PROPOSITION III.

(25.) Les espaces parcourus par des corps qui se meuvent uniformément, sont en raison composée des vitesses avec lesquelles ils sont parcourus, & des temps employés à les parcourir.

Soient deux corps A & B , qui se meuvent uniformément, le premier, avec la vitesse u , parcourant l'espace a pendant le temps t ; & le second, avec la vitesse v , parcourant l'espace b pendant le temps T . Puisque les espaces parcourus, en temps égaux, sont entre eux comme les vitesses, nous aurons l'espace parcouru par le corps B dans le temps t de la marche du corps A par cette proportion, $u : v :: a : \frac{av}{u}$. Mais nous venons de voir aussi que les espaces parcourus avec des vitesses égales, sont en raison des temps, on aura donc $t : T :: \frac{av}{u} : b$, d'où l'on tire $aTv = btu$, & par conséquent $a : b :: tu : Tv$: c'est-à-dire que les espaces parcourus sont en raison composée des temps & des vitesses.

COROLLAIRE I.

(26.) Si l'on divise l'équation $aTv = btu$ par le produit $Tv \cdot tu$, on aura $\frac{a}{t} = \frac{b}{T}$, dans laquelle si nous faisons $\frac{b}{T} = 1$, en supposant que les quantités b , T , v soient constantes, nous aurons l'équation $1 = \frac{a}{t}$, qui donne $u = \frac{a}{t}$. Donc la vitesse d'un corps est en raison directe de l'espace parcouru, & en raison inverse du temps employé à le parcourir.

COROLLAIRE II.

(27.) De la même équation on tire pareillement $t = \frac{a}{u}$; c'est-à-dire, que le temps dans lequel un corps parcourt l'espace a , est en raison directe de cet espace, & en raison inverse de la vitesse avec laquelle il le parcourt.

COROLLAIRE III.

(28.) Si l'on exprime le temps t en secondes, & si l'on en prend une pour l'unité de temps, dans le cas où $t = 1$, on aura $u = a$; c'est-à-dire que la vitesse est égale à l'espace parcouru pendant une seconde de temps. Il suit de là que si l'on exprime le temps en secondes, l'espace parcouru pendant une seconde de temps fera la mesure de la vitesse.

COROLLAIRE I V.

(29.) Le mouvement accéléré, ou retardé, peut être regardé comme uniforme pendant un instant, ou pendant une différentielle de temps $d t$; car, pendant cet instant, la variation de la vitesse, étant une quantité différentielle, peut être regardée comme nulle, ou égale à zéro par rapport à la vitesse acquise & finie u . Si donc $d a$ représente la différentielle de l'espace parcouru pendant cet instant $d t$, nous aurons (26.) $u = \frac{d a}{d t}$, & par conséquent $d a = u d t$.

PROPOSITION I V.

(30.) Lorsqu'un corps se meut d'un mouvement accéléré, ou retardé, la quantité dont sa vitesse à chaque instant de sa course, surpasse sa vitesse initiale, ou en est surpassée, est toujours $= \frac{1}{A} \int a d t$.

Soit V la vitesse initiale du corps, c'est-à-dire, celle avec laquelle il se meut au premier instant de l'action, ou du temps t ; en intégrant l'équation $\frac{a d t}{A} = d u$ (18.) nous aurons $\frac{1}{A} \int a d t = u - V$, * c'est-à-dire que la quantité dont la vitesse actuelle du corps surpasse sa vitesse initiale, ou en est surpassée, est toujours $= \frac{1}{A} \int a d t$.

COROLLAIRE I.

(31.) Si la puissance a étoit constante, on auroit $\frac{a}{A} = u - V$; c'est-à-dire, que la quantité dont la vitesse actuelle du corps surpasse sa vitesse initiale, ou en est surpassée, est en raison composée des raisons directes de la puissance & du temps, & de la raison inverse de la masse.

COROLLAIRE II.

(32.) Si $V = 0$, c'est-à-dire, si le corps étoit en repos lorsque

* u représente la vitesse que prend le corps en vertu de la puissance a qui est accélératrice ou retardatrice; $d u$ en est la différentielle: donc $\int d u = u + C$, C marquant une constante qui complète l'intégrale; par conséquent, $\frac{1}{A} \int a d t = u + C$. Mais lorsque la puissance a n'agit point, c'est-à-dire lorsqu'elle est égale à zéro, on a $u = V$, & l'intégrale $\frac{1}{A} \int a d t = 0$: donc on a, dans ce cas, $u + C$, ou $V + C = 0$, ce qui donne $C = -V$. Substituant cette valeur de C dans l'équation $\frac{1}{A} \int a d t = u + C$, on a $\frac{1}{A} \int a d t = u - V$, comme l'Auteur l'a trouvé.

la puissance a a commencé son action, ou s'il commençoit sa course du repos, on auroit $\frac{1}{A} \int a \, dt = u$: & si a étoit constante, on auroit $\frac{a \, t}{A} = u$.

COROLLAIRE III.

(33.) Si, au contraire, le corps, après avoir été mis en mouvement, parvient à l'état de repos, comme il peut arriver dans le mouvement retardé, on aura $u = 0$: donc $\frac{a \, t}{A} = -V$; ou, dans ce cas, en changeant le signe de la puissance, à cause que le mouvement est retardé, $\frac{a \, t}{A} = V$.

COROLLAIRE IV.

(34.) La vitesse acquise dans le mouvement accéléré qui commence du repos est $u = \frac{a \, t}{A}$, & la vitesse entièrement perdue dans le mouvement retardé est $V = \frac{a \, t}{A}$: donc ces vitesses seront égales, si des puissances égales a agissent pendant le même temps t sur des masses égales A .

PROPOSITION V.

(35.) L'espace parcouru par un corps, à compter du premier instant de son mouvement, est $s = Vt + \frac{1}{A} \int (d \, t \, f \, a \, d \, t)$.

Puisque $u = \frac{d \, s}{d \, t}$ (29.) on aura donc (30.) $\frac{1}{A} \int a \, dt = \frac{d \, s}{d \, t} - V$; d'où l'on tire $\frac{d \, s}{d \, t} = V + \frac{1}{A} \int a \, dt$, ou $d \, s = V \, dt + \frac{d \, t}{A} \int a \, dt$: & en intégrant, $s = Vt + \frac{1}{A} \int (d \, t \, f \, a \, d \, t)$; c'est-à-dire que l'espace parcouru par le corps, à compter du premier instant du mouvement, est $s = Vt + \frac{1}{A} \int (d \, t \, f \, a \, d \, t)$.

COROLLAIRE I.

(36.) Si la puissance a est constante, on aura $s = Vt + \frac{a \, t^2}{2 \, A}$.

COROLLAIRE II.

(37.) Si le corps commençoit sa course du repos, alors on auroit $V = 0$, & par conséquent $s = \frac{1}{A} \int (d \, t \, f \, a \, d \, t)$; ou, si la force, ou

puissance a étoit constante, $a = \frac{v^2}{2A}$: c'est-à-dire que les espaces parcourus sont alors comme les quarrés des temps employés à les parcourir; & réciproquement, si les espaces parcourus sont comme les quarrés des temps, la force, ou puissance accélératrice, sera constante.

COROLLAIRE III.

(38.) De l'équation $u = \frac{at}{A}$ trouvée, Art. 32. on tire $a = \frac{Au}{t}$; substituant cette valeur dans la dernière équation, on aura $a = \frac{1}{2}tu$; c'est-à-dire que les espaces parcourus depuis le commencement du mouvement, sont en raison composée des temps & des vitesses acquises.

COROLLAIRE IV.

(39.) L'espace parcouru par un corps qui se meut avec une vitesse uniforme u , pendant le temps t , est (26.) $a = tu$: donc l'espace parcouru par un corps avec une vitesse uniforme, est double de l'espace parcouru dans le même temps par un mouvement accéléré, qui commence du repos, lorsque la vitesse acquise, dans celui-ci, est devenue la même que la vitesse uniforme.

COROLLAIRE V.

(40.) Dans le mouvement accéléré qui commence du repos, la puissance a étant supposée constante, on a $a = \frac{v^2}{2A}$; & dans le retardé, $a = Vt - \frac{v^2}{2A}$; mais si le corps qui se meut d'un mouvement retardé, parvient au repos, comme dans ce cas $V = \frac{at}{A}$ (34.), on aura aussi $a = \frac{v^2}{A} - \frac{v^2}{2A} = \frac{v^2}{2A}$. Donc l'espace parcouru avec un mouvement accéléré qui commence du repos, & celui qui est parcouru dans le mouvement retardé qui arrive au repos, seront égaux, si les puissances a qui agissent dans les deux cas, sont égales & constantes, & si elles agissent dans le même temps sur des corps égaux A .

PROPOSITION VI.

(41.) L'espace parcouru par un corps depuis le commencement de sa course est $= A \int \frac{du}{u}$.

Puisque (29.) $\frac{da}{dt} = u$, & que (19.) $\frac{a dt}{A} = du$, en multipliant

pliant ces deux équations l'une par l'autre, on aura $\frac{a da}{A} = u du$, ce qui donne $da = \frac{A}{a} u du$, & en intégrant $a = A \int \frac{u du}{a}$.

COROLLAIRE I.

(42.) Si la puissance a est constante, on aura $a = \frac{A}{2a} (u^2 - V^2)^*$.

COROLLAIRE II.

(43.) Si le mouvement a commencé du repos, ou si $V = 0$ alors on aura $a = \frac{A u^2}{2a}$; c'est-à-dire que lorsque la puissance a est constante, les espaces parcourus depuis le repos, sont entre eux comme les quarrés des vitesses.

PREMIER PRINCIPE D'EXPÉRIENCE.

(44.) L'expérience a appris que les corps pesants à de petites distances de la surface de la terre, parcourent, en tombant librement, depuis le premier instant de leur chute, des espaces qui sont entre eux comme les quarrés des temps employés à les parcourir.

COROLLAIRE I.

(45.) Il suit de là que la puissance, ou force, qui anime les corps pesants, dans le voisinage de la surface de la terre, & que nous nommons Gravité, est une force constante. (37.)

COROLLAIRE II.

(46.) Nous aurons donc, dans le cas des corps graves, dont la chute commence du repos, $u = \frac{a t}{A}$, $a = \frac{a t^2}{2A} = \frac{A u^2}{2a}$.

SECOND PRINCIPE D'EXPÉRIENCE.

(47.) On sait encore par l'expérience que tous les corps pesants, grands ou petits, parcourent, en tombant dans le voisinage de la surface de la terre, des espaces égaux en temps égaux.

* Voyez la Note, page 62.

COROLLAIRE I.

(48.) Si donc α & β sont les puissances constantes qui animent les corps A & B , on aura, d'après l'expérience, $\frac{\alpha t^2}{2A} = \frac{\beta t^2}{2B}$, ou, parce qu'on suppose les temps égaux, $\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B}$. Donc $\alpha : \beta :: A : B$; c'est-à-dire que dans les corps pesants, les puissances, ou gravités sont entre elles comme les masses.

COROLLAIRE II.

(49.) On a vu ci-dessus que les densités sous des volumes égaux sont entre elles comme les masses (12.); il s'ensuit que les densités sont aussi comme les gravités. Ainsi on pourra exprimer la densité des corps pesants par le poids d'un pied cube de la matière qui les compose.

COROLLAIRE III.

(50.) La quantité $\frac{\alpha}{A}$ étant toujours constante, nous pourrons mettre à sa place la constante ξ ; d'où l'on tirera, pour les corps pesants, $u = \xi t$, $a = \frac{1}{2} \xi t^2 = \frac{u^2}{2\xi}$ (46.).

TROISIEME PRINCIPE D'EXPERIENCE.

(51.) *L'expérience nous a aussi enseigné que l'espace que les corps graves parcourent dans le voisinage de la surface de la terre, en tombant verticalement depuis le repos, est à très-peu-près de 16 pieds anglais, dans la première seconde de leur chute.**

COROLLAIRE I.

(52) Mesurant en secondes le temps de la chute des corps pesants, & en pieds les espaces parcourus, nous aurons, pour le cas où $t = 1$, $a = 16$; ce qui produit $16 = \frac{1}{2} \xi$, ou $\xi = 32 = \frac{\alpha}{A}$. Cette valeur étant substituée dans les équations de l'Art. 50, les change en celles-ci, $u = 32 t$, $a = 16 t^2 = \frac{u^2}{64}$; d'où l'on tire $\sqrt{a} = 4 t = \frac{1}{4} u$, & $8 \sqrt{a} = u = 32 t$.

* Ce nombre répond à 15 pieds 0 pouc. 2 lig. 8 p. français. Nous emploierons, avec l'Auteur, ce nombre quarré, parce qu'il est très-commode dans le calcul. Le pied anglais est au pied français :: 811 : 864. Partant 864 pieds anglais font 811 pieds français; ou le pied anglais contient 11 pouces, 3 lignes, 2 points du pied français.

COROLLAIRE II.

PLANC. B

(53.) Si, pour plus d'exactitude & de généralité, on représente par K l'espace que parcourt, pendant la première seconde de sa chute, un corps grave qui tombe verticalement depuis le repos, on aura $K = \frac{1}{2}\xi$, ou $\xi = 2K$. Cette valeur substituée dans les équations de l'Art. 50, les change en celles-ci, $u = 2Kt$, $a = Kt' = \frac{u^2}{4K}$; d'où l'on tire $\sqrt{a} = \frac{u}{2\sqrt{K}} = t\sqrt{K}$, & $2\sqrt{aK} = u = Kt$.

SCOLIE.

(54.) On déterminera dans son temps le véritable espace que parcourent, pendant la première seconde de leur chute, les corps graves en tombant librement, & on verra que cet espace est d'un peu plus des 16 pieds anglais que nous avons indiqués. Cependant, comme la différence est petite, & qu'en la négligeant il n'en peut résulter une erreur considérable dans les calculs dont nous avons besoin, on peut faire constamment usage de ce nombre 16, qui facilite beaucoup les opérations, attendu qu'il est quarré.

CHAPITRE II.

Du Mouvement composé.

DÉFINITION XVI.

(55.) ON appelle *Mouvement composé*, celui qui résulte de l'action de deux, ou d'un plus grand nombre de puissances qui agissent sur un corps, chacune dans des directions particulières.

PROPOSITION VII.

(56.) *Le mouvement d'un corps suivant une direction quelconque, n'est point altéré par l'action des puissances qui agiroient sur lui suivant d'autres directions quelconques; & à chaque instant le corps parcourt de petits espaces parallèles à chacune des directions.*

FIG. II.

Si l'on suppose le corps A sur un plan EF , il est clair qu'il peut se mouvoir sur ce plan dans la direction AG , & qu'en même temps le plan peut se mouvoir suivant EH , GI , sans qu'un de ces mouvements trouble l'autre; parce qu'en ne supposant aucune puissance:

PLANC. 1.

qui trouble le mouvement du corps suivant AG , ce mouvement doit se continuer sans altération, en vertu de la force d'inertie. Ce qu'on dit ici de deux actions, ou mouvements, se peut dire d'un plus grand nombre; le raisonnement seroit toujours le même. Donc le mouvement d'un corps suivant une direction, ne peut s'altérer par l'action de puissances qui agiroient sur lui suivant d'autres directions quelconques; & à chaque instant le corps parcourt des espaces AG , EH , parallèles à chacune de ces directions.

PROPOSITION VIII.

FIG. 2.

(57.) Si deux puissances agissent en même temps sur un corps A , l'une suivant la direction AE , & l'autre suivant la direction AF ; le corps marchera selon une direction moyenne, & décrira une ligne AGH , dont on déterminera l'équation en égalant les valeurs du même temps dans lequel le corps marcheroit librement suivant chacune des deux directions, ces valeurs étant fournies par la nature du mouvement suivant chaque direction.

Le corps, en quelque instant de son mouvement que ce soit, doit se mouvoir parallèlement à AE , en vertu de l'action de la première puissance, & parallèlement à EF , en vertu de l'action de la seconde; & il doit parcourir de petits espaces GI , IH , égaux à ceux KE , LF , qui sont les différencielles des espaces que chacune des puissances lui feroit parcourir dans le même temps, si elle agissoit seule. Mais la somme des espaces KE est l'abscisse AE , & la somme des espaces $LF=IH$, est l'ordonnée EH : donc si l'on tire de la nature du mouvement qui auroit lieu suivant chacune des directions, si chaque puissance agissoit séparément, la valeur du temps dans lequel le corps parcourroit librement chaque espace AE , EH , & si l'on égale ces deux valeurs, attendu que le temps est le même, l'équation qui en résultera, sera celle de la ligne AGH , que le corps parcourt.

EXEMPLE I.

(58.) Supposons que le mouvement du corps A soit composé de deux autres qui, pris séparément, eussent été uniformes, le premier se faisant dans la direction AE , & le second dans la direction AF . Exprimons par a les espaces parcourus suivant la première direction, & la vitesse par u ; exprimons aussi par b les espaces parcourus suivant la seconde direction, & la vitesse par v . Cela posé, nous aurons (27.) $t = \frac{a}{u} = \frac{b}{v}$, ce qui donne $av = bu$; mais les mouvements étant uni-

formes, les vitesses sont constantes : cette équation appartient donc à la ligne droite *. Ainsi, dans ce cas, le corps décrira une ligne droite, en vertu du mouvement composé qu'on lui aura imprimé.

EXEMPLE II.

(59.) Supposons maintenant que le mouvement suivant AE ne soit pas uniforme, mais qu'il soit produit par une puissance accélératrice constante ; dans ce cas, nous aurons (36.) $a = Vt + \frac{at^2}{2}$, dans laquelle substituant $t = \frac{b}{v}$, & ordonnant, on a $\frac{av^2}{2} ; (a - \frac{Vb}{v})$, équation à la Parabole dont le parametre est $\frac{2Av^2}{a}$, le corps décrira donc cette courbe en vertu du mouvement composé qu'il aura reçu. ***

COROLLAIRE I.

(60.) De là il suit qu'en vertu du mouvement composé, le corps parcourra la ligne AG dans le même temps qu'il eût employé à parcourir la droite AK , ou AL , s'il n'eût éprouvé que l'action d'une seule puissance.

COROLLAIRE II.

(61.) La direction AGH du mouvement composé est toujours dans le même plan que les directions AK , AL des mouvements simples composants. Car si, par chaque point de la direction AL , on mène une parallèle à la direction AK , toutes ces parallèles composeront le plan dans lequel se trouvent les deux directions AK , AL des mouvements composants ; & comme le corps doit toujours se trouver sur ces parallèles, sans pouvoir jamais s'en écarter, (16.) il s'en-

* Les deux variables a & b n'étant qu'au premier degré, l'équation est à la ligne droite, car toute équation du premier degré appartient toujours à cette ligne.

** Cette équation appartient à la Parabole, parce qu'elle ne renferme que le carré d'une des variables, savoir, celui de l'espace b que parcourroit le corps suivant AE dans le temps t ; l'autre variable, qui est l'espace a qu'il parcourroit suivant AE dans le même temps, étant au premier degré. (Voyez, pour la démonstration, l'excellent Cours de Mathématiques de M. Bequet, part. III, §. 387.) La quantité $a - \frac{Vb}{v}$, qui représente en général l'abscisse de cette Parabole, $= a - Vt = \frac{at^2}{2}$ (36.) l'espace parcouru par le corps A , en vertu de la force accélératrice constante a (37.). Cela est d'ailleurs évident, en considérant que a est l'espace total que parcourt le corps dans le temps t , en vertu de sa vitesse initiale V , & de la force accélératrice constante a ; & que Vt est l'espace qu'il parcourt dans le même temps t , en vertu seulement de sa vitesse initiale. Donc, &c. Si le corps étoit en repos, lorsqu'il reçoit l'action de la force accélératrice, alors $V = 0$, & l'équation devient $\frac{2Av^2}{a} = b^2$.

suit qu'il ne peut jamais sortir du plan qui passe par ces deux directions.

COROLLAIRE III.

(62.) Si trois puissances agissent dans le même temps sur un corps, chacune suivant des directions particulières, la direction composée que prendra le corps, sera une ligne moyenne entre les trois directions; & l'équation de cette ligne se trouvera en égalant les valeurs du même temps, tirées de la nature du mouvement qu'auroit le corps, s'il marchoit librement suivant chacune de ces directions.

On voit clairement, sans qu'il soit nécessaire d'y insister, qu'on trouvera facilement la direction composée, dans le cas de trois puissances; car (61.) on trouvera d'abord la direction résultante de deux directions simples; & avec cette résultante & la troisième direction, on trouvera celle que suivra réellement le corps en vertu de ces trois puissances.

COROLLAIRE IV.

(63.) Si les trois directions sont dans un même plan, la direction résultante se trouvera aussi dans ce plan. C'est une conséquence nécessaire de ce qui a été dit.

COROLLAIRE V.

(64.) Ce qui a été dit au sujet de trois puissances, doit s'entendre également de quatre, de cinq, ou d'un plus grand nombre de puissances qui agiroient ensemble sur un même corps suivant des directions différentes.

PROPOSITION IX.

(65.) La différentielle GH de l'espace que le corps A parcourt en vertu des deux puissances α & β qui l'animent suivant les directions AE , AF , est $\frac{dt}{\Delta}((\alpha dt)^2 + (\beta dt)^2 \pm 2(\alpha dt)(\beta dt) \cos \Sigma)^{\frac{1}{2}}$; Σ exprimant l'angle EAF que forment les deux directions, & le rayon étant égal à l'unité.

Si du point G on abaisse sur EH , la perpendiculaire GN , on aura, par les Elements de Géométrie, $NI = GI \cos \Sigma$, & $GH^2 = GI^2 + IH^2 \pm 2NI \times IH = GI^2 + IH^2 \pm 2IH \cdot GI \cos \Sigma$. Le signe $+$ étant pour le cas où l'angle EAF sera aigu, & le signe $-$ pour le cas où il sera obtus. *

* Parce que l'angle EAF étant obtus, la perpendiculaire GN tombe en dedans du triangle GIH : au contraire, elle tombe en dehors, lorsque ce même angle est aigu. C'est le cas de la Figure.

Substituant maintenant dans cette équation les valeurs de $GI = da = (35.) \frac{dt}{A} f \alpha dt$, & de $IH = db = \frac{dt}{A} f \beta dt$, on aura $GH^2 = \frac{dt^2}{A^2} (f \alpha dt)^2 + \frac{dt^2}{A^2} (f \beta dt)^2 \pm \frac{2dt^2}{A^2} (f \alpha dt) (f \beta dt) \cos \Sigma$, & par conséquent $GH = \frac{dt}{A} ((f \alpha dt)^2 + (f \beta dt)^2 \pm 2 (f \alpha dt) (f \beta dt) \cos \Sigma)^{\frac{1}{2}}$.

SCOLIE I.

(66.) Dans tout le cours de cet Ouvrage nous exprimerons le rayon, ou sinus total, par l'unité, afin de simplifier le calcul.

COROLLAIRE I.

(67.) Si l'angle $EAF = \Sigma$ étoit $= 0$; c'est-à-dire, si les deux directions AE , AF , concouroient ensemble de manière à ne former qu'une seule & même direction, alors $\cos \Sigma = 1$, & la valeur de GH devient $= \frac{dt}{A} ((f \alpha dt)^2 + (f \beta dt)^2 \pm 2 (f \alpha dt) (f \beta dt))^{\frac{1}{2}} = \frac{dt}{A} f dt (\alpha \pm \beta)$.

COROLLAIRE II.

(68.) Si, outre cette condition, on avoit $\alpha = \beta$, on auroit $GH = \frac{2dt}{A} f \alpha dt$, pour le cas où l'angle GIH seroit obtus; c'est-à-dire, lorsque les deux puissances seroient dirigées dans le même sens; & $GH = \frac{dt}{A} f dt. 0 = 0$, pour le cas où l'angle GIH seroit aigu, ou que les deux puissances seroient dirigées en sens contraires.

COROLLAIRE III.

(69.) Dans ce dernier cas, le corps restera donc sans mouvement.

COROLLAIRE IV.

(70.) Si le corps reste sans mouvement, ce sera parce que des puissances égales agissent dans des directions opposées.

SCOLIE II.

(71.) De même qu'on a trouvé la valeur de GH , lorsque le corps n'est soumis qu'à l'action de deux puissances, on la trouvera également lorsqu'il y en aura trois, ou un plus grand nombre.

DÉFINITION XVII.

(72.) La décomposition du mouvement est la division qu'on en fait,

PLANC. I.

en supposant qu'il procède de différentes actions, quoique dans la réalité il ne procède que d'une seule, ou d'un moindre nombre que celui qu'on suppose.

PROPOSITION X.

FIG. 3.

(73.) Si l'on suppose que l'action d'une puissance α sur un corps A , suivant la direction AH ; procède de l'action de deux autres puissances $m\alpha$, $n\alpha$, suivant les directions AE , AF , de façon que l'effet de ces deux puissances soit égal à celui qui résulte de la seule puissance α ; ces puissances α , $m\alpha$ & $n\alpha$, seront entre elles comme les droites AH , AE & AF , qui sont déterminées par les droites HE , HF parallèles aux directions AE , AF ; m & n exprimant deux quantités constantes.

Car si deux puissances $m\alpha$ & $n\alpha$ agissant séparément sur le corps A suivant les directions AE , AF , sont telles que, par leurs actions séparées, l'une conduise le corps de A en E , & l'autre de A en F , dans le même temps; il est évident que, par leurs actions réunies, elles le conduiroient, dans le même temps, de A en H : (57.) or c'est précisément l'effet que produit la seule puissance α , agissant dans la direction AH . Mais on a (35.) $AH = \int (\frac{dt}{A} \alpha dt)$, $AE = \int (\frac{dt}{A} m\alpha dt)$ & $AF = \int (\frac{dt}{A} n\alpha dt)$: donc les droites AH , AE & AF seront entre elles comme $\frac{dt}{A} \alpha dt$, $\frac{dt}{A} m\alpha dt$ & $\frac{dt}{A} n\alpha dt$; ou comme 1 , m & n ; c'est-à-dire, comme α , $m\alpha$ & $n\alpha$.

COROLLAIRE I.

(74.) La puissance qui agit suivant AE sera donc $= \frac{AE}{AH} \alpha$, & celle qui agit suivant AF , sera $= \frac{AF}{AH} \alpha$.

COROLLAIRE II.

(75.) Puisque dans le triangle AEH , les côtés AH , AE & $EH = AF$ sont entre eux comme les sinus des angles qui leur sont opposés; il s'ensuit que les puissances α , $m\alpha$ & $n\alpha$ seront aussi entre elles comme ces mêmes sinus.

COROLLAIRE III.

(76.) La décomposition du mouvement étant arbitraire, on peut prendre

prendre comme on voudra les directions AE , AF ; & tirant ensuite d'un point quelconque H , les parallèles HF , HE , à ces directions; si alors on exprime par AH la puissance qui agit effectivement dans cette direction, les lignes AE , AF exprimeront les deux puissances dans lesquelles elle se décompose; & qui agissant dans ces directions, produiroient le même effet.

PROPOSITION XI.

(77.) Si l'on suppose que l'action d'une puissance qui agit sur un corps A dans la direction AH , provienne de trois autres puissances, qui, agissant dans les directions AF , AG , AE , produiroient le même effet; ces quatre puissances seront entre elles comme les lignes AH , AF , AG & AE .

FIG. 4

Car si la puissance qui agit suivant AH , est représentée par la ligne même AH , on peut la concevoir décomposée en deux autres AF , AI , qui produiroient le même effet (76.). La puissance qui agit suivant AI , peut l'être de même en deux autres AG , AE , qui produiroient le même effet qu'elle. Ainsi la puissance AH sera décomposée en trois autres AF , AG , AE , qui, par leurs actions réunies, produiront le même effet que cette puissance seule. Donc ces quatre puissances seront entre elles comme les lignes AH , AF , AG & AE .

COROLLAIRE I.

(78.) Les trois directions AF , AG , AE , étant arbitraires (76.), elles peuvent se prendre comme on voudra; & tirant d'un point quelconque H , & par le point A les parallèles arbitraires HF , AI , & ensuite les parallèles HI , IG , IE aux directions arbitraires AF , AE , AG , ces parallèles détermineront les lignes AF , AG , AE , qui exprimeront les puissances dans lesquelles se décompose la première puissance AH , & qui, par leur réunion, produiront le même effet qu'elle.

COROLLAIRE II.

(79.) On peut, par ce même procédé, décomposer une puissance quelconque en quatre, cinq, enfin en tel nombre de puissances qu'on voudra, & qui, par la réunion de leurs actions, produiront le même effet que cette puissance seule.

CHAPITRE III.

Du Centre de Gravité d'un Système de corps, & de son Mouvement.

D É F I N I T I O N X V I I I.

(80.) On appelle *Système de corps* un assemblage de plusieurs corps, comme *A, B, C*, &c. de même qu'on a nommé *Système du Monde*, l'assemblage du Soleil & des Planètes; &c. dont *Newton* a si parfaitement expliqué les mouvements par les seuls principes de la Mécanique, & par la loi de l'attraction universelle, que l'expérience confirme chaque jour de plus en plus.

P R O P O S I T I O N X I I.

(81.) Si deux corps, ou masses *A & B*, supposés en repos, sont mis en mouvement par l'action de deux puissances α & β , dont les directions *AE, BF*, soient parallèles; la différentielle de l'espace parcouru par le point *G* pris dans la ligne *Gg* parallèle aux directions *AE, BF* des puissances, sera $= \frac{A\alpha' dt \beta dt + B\beta' dt \alpha dt}{AB(A+B)}$: *A'* & *B'* exprimant les distances *AG, GB*, & *t* le temps.

Tirez la ligne *FH*, parallèle à *BA*, nommant *a* & *b* les espaces parcourus par les corps *A* & *B*, & prenant *AE* & *BF* pour les différentielles de ces espaces, on aura *HE* $= da - db$. Or, à cause des parallèles, on a *FH*, ou $(A' + B')$: *HE*, ou $(da - db)$

$\therefore FH$, ou $(B') : hg = \frac{B'}{A' + B'}(da - db)$: donc *Gg*, différentielle de l'espace parcouru par le point *G* $= db + \frac{B'}{A' + B'}(da - db) = \frac{A'db + B'da}{A' + B'}$. Si l'on substitue maintenant dans cette expression (35.) à la place de *db* sa valeur $\frac{dt}{B} \beta dt$, & à la place de *da* sa valeur $\frac{dt}{A} \alpha dt$, on aura *GH* $= \frac{A'dt \beta dt + B'dt \alpha dt}{A' + B'}$ $= \frac{A\alpha' dt \beta dt + B\beta' dt \alpha dt}{AB(A+B)}$.

S C O L E M.

(82.) On suppose, pour le présent, que la masse de chaque corps est infiniment petite, ou qu'elle est toute réunie en un point, & que c'est sur ce point que la puissance agit.

COROLLAIRE I.

PLANC. I.

(83.) Si $AA' = BB'$, la différencielle de l'espace parcouru par le point G , c'est-à-dire Gg , sera $= \frac{df(a+\beta)dt}{A+B}$; car en substituant AA' à la place de BB' , dans l'expression $Gg = \frac{AA'df\beta dt + BB'df\alpha dt}{AB(A+B)}$ elle deviendra $Gg = \frac{AA'df\beta dt + AA'df\alpha dt}{AA'(A+B)} = \frac{df(a+\beta)dt}{A+B}$.

COROLLAIRE II.

(84.) Comme les distances A' & B' n'entrent pas dans l'expression qu'on vient de trouver, il s'ensuit que ces distances n'en altèrent point la valeur. Cette expression sera donc toujours la même, à quelque distance du point G que soient les corps, pourvu que les distances A' & B' soient toujours en raison inverse des masses A & B ; condition exprimée par l'équation $AA' = BB'$.

COROLLAIRE III.

(85.) On voit encore qu'on peut supposer les distances GA , GB diminuées à l'infini; c'est-à-dire, les supposer égales à zéro, sans que l'expression ci-dessus en soit altérée. Dans ce cas les deux corps seront réunis dans le point G , & marcheront dans la ligne Gg . Pareillement, les deux puissances réunies agiront comme une seule $= a + \beta$ sur le corps $A + B$. Donc lorsque les corps A & B sont animés par les puissances α & β , le point G parcourt suivant Gg parallèle aux directions AE & BF , le même espace que lorsque les deux corps, réunis au point G , sont animés suivant Gg par la puissance $a + \beta$.

PROPOSITION XIII.

(86.) Si trois corps, ou masses, A , B , C sont animés par trois puissances α , β , γ , suivant les directions parallèles AE , BF , CH ; & si l'on prend le point G de manière qu'on ait $A \cdot Ag = B \cdot Bg$ & $(A+B) Gg = C \cdot Gc$; je dis que la différencielle de l'espace parcouru par le point G sera $= \frac{df(a+\beta+\gamma)dt}{A+B+C}$.

FIG. 6.

Le point g ayant été pris de manière qu'on ait $A \cdot Ag = B \cdot gB$, la différencielle de l'espace parcouru par le point g est la même que celle que parcourroit le corps $A+B$ placé en g , & animé par la puissance $a + \beta$, suivant la direction gh parallèle aux lignes AE , BF , CH .

PLANC. I.

Il est donc évident que, quant à l'effet, le cas est le même que si les deux corps C & $A+B$, l'un placé en C , & l'autre en g , étoient animés par les puissances γ & $\alpha+\beta$, suivant les directions parallèles CH , gh . Ainsi, la différencielle de l'espace parcouru par le point G , suivant la parallèle GI aux autres directions, ce point étant pris de manière qu'on ait $(A+B)Gg = C.GC$; ou, ce qui revient au même, de manière que les distances gG , GC soient en raison inverse des masses $A+B$ & C , cette différencielle, dis-je, sera exprimée par la formule $\frac{df(\alpha+\beta)dt}{A+B}$, en y substituant $\alpha+\beta$ à la place de α & γ à la place de β ; $A+B$ pour A , & C pour B . Donc la différencielle de l'espace parcouru par le point G , suivant la droite GI parallèle aux directions AE , BF , CH , sera $= \frac{df(\alpha+\beta+\gamma)dt}{A+B+C}$.

COROLLAIRE I.

(87.) Les distances Ag , gB , gG , GC , ne se trouvant point dans l'expression $\frac{df(\alpha+\beta+\gamma)dt}{A+B+C}$, il s'ensuit qu'elles n'ont aucune influence sur la valeur de cette expression; & par conséquent qu'elle restera toujours la même; quelles que puissent être ces distances, pourvu toutefois que Ag , gB , soient en raison inverse des masses A & B , & que de même gG & GC , soient en raison inverse des masses $A+B$, & C .

COROLLAIRE II.

(88.) Les distances Ag , gB , gG , GC , peuvent donc être diminuées à l'infini, ou se réduire à zéro, sans que la valeur de l'expression $\frac{df(\alpha+\beta+\gamma)dt}{A+B+C}$ en soit altérée: & comme dans ce cas les trois corps A , B , C se trouveront réunis dans le point G , ainsi que les trois puissances α , β & γ , qui n'en feront plus qu'une seule $= \alpha+\beta+\gamma$; il s'ensuit que le point G parcourra le même espace dans la direction GI parallèle aux directions AE , BF , GH , lorsque les corps A , B , C sont animés par les puissances α , β , γ , que si les trois corps réunis en un seul au point G , étoient animés, suivant la direction GI , par la puissance $\alpha+\beta+\gamma$.

PROPOSITION XIV.

PL. 7.

(89.) Si l'on a quatre corps, ou masses, comme A , B , C , D , animés par les quatre puissances α , β , γ , δ , chacune d'elles agissant

sur le corps qui lui correspond suivant les directions parallèles AE , BF , CH , DL ; & si l'on prend le point G de manière que $A. Ag = B. Bg$; que $(A+B) gK = C.KC$; & que $(A+B+C) GK = D. DG$: je dis que la différencielle de l'espace parcouru par le point G sera $= \frac{dt/(a+\beta+\gamma+\delta) dt}{A+B+C+D}$.

On vient de démontrer que la différencielle de l'espace parcouru par le point K , en vertu des trois puissances α , β , γ , qui animent les corps A , B , C , est la même que celle que parcourroient ces corps, si, étant réunis tous les trois en un seul au point K , ils étoient animés par la puissance $\alpha+\beta+\gamma$, suivant la direction KI parallèle aux autres directions AE , BF , &c. Donc, quant à l'effet, ce cas est le même que s'il y avoit seulement deux corps D , & $A+B+C$, l'un en D , & l'autre en K , qui seroient animés par les puissances δ , & $\alpha+\beta+\gamma$, selon des directions parallèles aux autres. Ainsi, la différencielle de l'espace parcouru par le point G , pris de façon qu'on ait $D. DG = (A+B+C) KG$, ou que les distances KG , DG soient en raison inverse des masses D , & $(A+B+C)$, sera celle que fournira la formule $\frac{dt/(a+\beta) dt}{A+B}$, en y substituant $\alpha+\beta+\gamma$ pour α , & δ pour β ; $A+B+C$ pour A , & D pour B . Donc la différencielle de l'espace parcouru par le point G suivant la parallèle GN aux autres directions AE , BF , &c. est $= \frac{dt/(a+\beta+\gamma+\delta) dt}{A+B+C+D}$.

COROLLAIRE I.

(90.) En raisonnant comme on vient de le faire, on arrivera toujours à la même conclusion, quel que soit le nombre des corps, ou masses, quand même il seroit infini; de sorte qu'en général, la différencielle de l'espace parcouru par le point G , pris d'après les conditions exprimées ci-dessus; sera $= \frac{dt/(a+\beta+\gamma+\delta+\epsilon) dt}{A+B+C+D+\epsilon}$, la même que parcourroient les corps réunis en un seul au point G , s'ils étoient animés par la puissance $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\epsilon$. C'est une conséquence nécessaire de ce que les distances respectives des corps les uns à l'égard des autres, ne se trouvent point dans l'expression générale de cette différencielle; & par conséquent on peut concevoir ces distances diminuées à l'infini, ou les faire chacune égale à zéro, sans que, pour cela, l'expression en soit altérée.

COROLLAIRE II.

(91.) Si nous faisons la somme des puissances $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\epsilon = \pi$;

PLANC. I.

& la somme des masses $A+B+C+D+E=M$, nous aurons la quantité $\frac{df \cdot dt}{M}$ pour l'expression de la différentielle de l'espace parcouru par le point G , ce point étant pris suivant la condition exprimée dans les Art. 81, 86 & 89.

PROPOSITION XV.

FIG. 8.

(92.) Si l'on prend le point G de manière que $AG \cdot A = BG \cdot B$, & qu'on abaisse sur un plan quelconque FE les perpendiculaires AE, Gg, BF ; on aura $gG = \frac{A \cdot AE + B \cdot BF}{A+B}$.

Faisant passer par le point G le plan HJ parallèle au plan EF , on aura le produit $A \cdot AE = A \cdot (gG + HA)$, & le produit $B \cdot BF = B \cdot (gG - IB)$; donc la somme des deux produits $A \cdot AE + B \cdot BF$ fera $= (A+B)gG + A \cdot HA - B \cdot IB$. Mais la similitude des triangles AHG, BIG donne $AG : AH :: GB : IB = \frac{AH \cdot GB}{AG}$; substituant cette valeur de IB dans l'équation précédente, on aura $A \cdot AE + B \cdot BF = (A+B)gG + A \cdot HA - \frac{B \cdot AH \cdot GB}{AG}$; & en mettant pour $B \cdot BG$ le produit $A \cdot AG$ qui lui est égal, cette équation devient $A \cdot AE + B \cdot BF = (A+B)gG + A \cdot HA - A \cdot HA = (A+B)gG$; d'où l'on tire $gG = \frac{A \cdot AE + B \cdot BF}{A+B}$.

COROLLAIRE.

(93.) Si au lieu des masses A & B , on prend les puissances α & β , de sorte qu'on ait $\alpha \cdot AG = \beta \cdot BG$, on aura encore $gG = \frac{\alpha \cdot AE + \beta \cdot BF}{\alpha + \beta}$.

PROPOSITION XVI.

FIG. 9.

(94.) Si l'on a trois corps, ou masses, comme A, B, C , & si l'on prend le point G de manière que $A \cdot AG = B \cdot BG$, & $(A+B)gG = C \cdot CG$; je dis que si l'on abaisse sur un plan quelconque FI , les perpendiculaires BF, AE, GH, CI , on aura $GH = \frac{A \cdot AE + B \cdot BF + C \cdot CI}{A+B+C}$.

Puisque $(A+B)gG = C \cdot CG$, on a (92.) $(A+B)gK + C \cdot CI = (A+B+C)GH$; & puisque $A \cdot Ag = B \cdot Bg$, on a $A \cdot AE + B \cdot BF = (A+B)gK$. Substituant cette valeur dans l'équation précédente, elle deviendra $A \cdot AE + B \cdot BF + C \cdot CI = (A+B+C)GH$; d'où l'on tire $GH = \frac{A \cdot AE + B \cdot BF + C \cdot CI}{A+B+C}$.

COROLLAIRE I.

(95.) Si, au lieu des masses A, B, C , on prend les puissances α, β, γ , & qu'on ait $\alpha \cdot Ag = \beta \cdot Bg$, & $(\alpha + \beta) gK = \gamma \cdot CG$, on aura encore $GH = \frac{\alpha \cdot AE + \beta \cdot BF + \gamma \cdot CI}{\alpha + \beta + \gamma}$.

COROLLAIRE II.

(96.) On démontrera la même chose pour quatre, cinq, &c. & même pour une infinité de corps, ou de puissances; en sorte que la distance perpendiculaire du point G , pris comme on l'a dit, *Art.* 92 & 94, à un plan quelconque, sera toujours égale à la somme des produits de chaque corps, ou puissance, par sa distance perpendiculaire au même plan, divisée par la somme des corps, ou des puissances.

COROLLAIRE III.

(97.) Réciproquement, si la distance perpendiculaire d'un point G à un plan quelconque, est égale à la somme des produits de chaque corps, par sa distance perpendiculaire au même plan, divisée par la somme des corps; ce point G sera celui dont on a parlé dans les Propositions 12, 13, 14, 15, 16 (81 & suiv. jusqu'à 94.); & par conséquent il aura toutes les propriétés qu'on lui a reconnues & assignées dans ces Propositions & leurs Corollaires.

DÉFINITION XIX.

(98.) Le point G déterminé de la manière qu'on l'a prescrit dans les Propositions 12, 13, 14, 15, 16 (81 jusqu'à 94.), s'appelle communément *Centre de gravité*.

SCOLIE

(99.) Ce nom de *Centre de gravité* ne convient proprement à ce point qu'autant que les puissances qui agissent sur le système, sont les gravités des corps, ou des masses: mais comme il arrive souvent que d'autres puissances différentes des gravités agissent sur les corps, & que le centre de ces puissances n'est point le même que celui des masses, comme on le verra ci-après; cette considération a engagé *Daniel Bernoulli* à distinguer ces deux centres, en appelant l'un *Centre des puissances*, & l'autre *Centre des masses*.

PLANG. I.

Comme ces deux centres sont réunis dans les corps graves, à cause que les puissances, ou gravités, sont entre elles comme les masses (48.), il convient d'appeller centre de gravité l'un ou l'autre de ces centres indistinctement. Ainsi, lorsqu'il ne sera question d'autre puissance que de la gravité, ce sera la même chose de dire *Centre des masses* que *Centre de gravité*, puisque, dans ce cas, ces deux centres ne diffèrent point l'un de l'autre.

PROPOSITION XVII.

FIG. 10.

(100.) *Quelles que soient les vitesses particulières avec lesquelles se meuvent les corps qui composent un système, lorsqu'ils marchent tous sur des directions parallèles, le centre des masses se maintiendra toujours dans une seule & même direction parallèle à celles que suivent les corps.*

Que $A, B, C, \&c.$ soient les corps qui composent le système, & qui se meuvent dans les directions AE, BF, CI , parallèles entre elles; qu'on prenne un plan quelconque LK , parallèle à ces directions: alors G étant le centre des masses, on aura $GH = \frac{A \cdot Ae + B \cdot Bf + C \cdot Ci + \&c.}{A + B + C + \&c.}$.

Or, dans cette expression toutes les masses demeurent constantes, ainsi que les perpendiculaires $Ae, Bf, Ci, \&c.$ quelles que soient les vitesses particulières avec lesquelles les corps se meuvent; pourvu qu'on les suppose marcher parallèlement au plan LK ; donc toute l'expression demeure constante, & par conséquent la ligne GH dont elle exprime la valeur. Donc le centre G des masses se mouvra dans une seule & même direction parallèle à celle que suivent les corps.

COROLLAIRE I.

(101.) La même chose arrivera au centre des puissances, si elles sont constantes, comme l'est la gravité.

COROLLAIRE II.

(102.) Il suit de ce qui a été dit, que la direction du centre des masses d'un système de corps sera toujours parallèle aux directions des puissances, si ces directions sont parallèles entre elles; & que la différentielle de l'espace parcouru par ce centre (91.) sera toujours $= \frac{df(a+e+r+s+\&c.)}{A+B+C+D+\&c.} dt = \frac{df}{M} dt$, la même que parcourroient les corps, ou masses, si elles étoient réunies à leur centre, & si elles étoient animées par la somme π des puissances, suivant une direction parallèle à celle des puissances.

COROLLAIRE III.

(103.) La distance perpendiculaire du centre des masses à un plan quelconque, est égale (96.) à la somme des produits de chaque masse par la distance perpendiculaire au même plan, divisée par la somme des masses.

COROLLAIRE IV.

(104.) Pareillement, la distance perpendiculaire du centre des puissances qui agissent dans un système, à un plan quelconque, sera (96.) égale à la somme des produits de chaque puissance par la distance perpendiculaire au même plan, divisée par la somme des puissances.

COROLLAIRE V.

(105.) Si l'on suppose l'espace parcouru par le centre des masses = g , & sa vitesse = W , on aura (29 & 90, 91.)

$$dg = W dt = \frac{df(a+\beta+\gamma+\delta+\epsilon)c}{A+B+C+D+E} dt = \frac{df \pi dt}{M}. \text{ Donc}$$

$$W = \frac{fadt + f\beta dt + f\gamma dt + f\delta dt + f\epsilon c}{A+B+C+D+E} = \frac{f \pi dt}{M}; dW = \frac{d^2 a + d^2 \beta + d^2 \gamma + d^2 \delta + d^2 \epsilon}{M} = \frac{\pi d^2}{M}; \text{ \&}$$

$$dt = \frac{M dW}{a + \beta + \gamma + \delta + \epsilon} = \frac{M dW}{\pi}.$$

COROLLAIRE VI.

(106.) Ayant trouvé ci-dessus (29.) $dg = W dt$, ou $W = \frac{dg}{dt}$,

& ayant pareillement (105.), $dW = \frac{(a+\beta+\gamma+\delta+\epsilon)c}{M} dt = \frac{\pi dt}{M}$; en multipliant ces deux équations l'une par l'autre, on aura aussi

$$W dW = \frac{(a+\beta+\gamma+\delta+\epsilon)c}{M} dg = \frac{\pi dg}{M}; \text{ d'où l'on tire, en intégrant,}$$

$$\frac{1}{2} W^2 = \frac{f(a+\beta+\gamma+\delta+\epsilon)c}{M} dg = \frac{1}{M} \int \pi dg; \text{ ou } W^2 = \frac{2f(a+\beta+\gamma+\delta+\epsilon)c}{M} dg = \frac{2}{M} \pi dg.$$

COROLLAIRE VII.

(107.) De même, si l'on substitue dans l'équation $W = \frac{fadt + f\beta dt + f\gamma dt + f\delta c}{A+B+C+D+E}$

la valeur de $adt = Adu$ (19.), & celle de $\beta dt = Bdv$, &c., nous aurons

$$W = \frac{fAdu + fBdv + f\gamma c}{A+B+C+E} = \frac{Au + Bv + \gamma c}{A+B+C+E}; \text{ c'est-à-dire que la vitesse}$$

du centre des masses est égale à la somme des produits de chaque masse par sa vitesse, divisée par la somme des masses.

COROLLAIRE VIII.

(108.) Si les puissances qui animent les corps ne sont pas dirigées suivant des lignes parallèles, on pourra les décomposer chacune en deux, ou en trois autres dirigées suivant des lignes parallèles à deux, ou trois lignes droites données de position, & perpendiculaires entre elles. Alors toutes les puissances qui sont dirigées parallèlement à l'une de ces lignes, donneront, avec la plus grande facilité, le mouvement du centre des masses suivant cette direction. On trouvera de même son mouvement suivant les autres directions; ensuite on déduira, avec la même facilité, le mouvement composé de ce centre.

COROLLAIRE IX.

(109.) Puisque, par le moyen de cette décomposition des puissances, on obtient le mouvement composé du centre de gravité, il suffira, pour résoudre un cas quelconque, de résoudre seulement celui dans lequel les puissances sont dirigées parallèlement: c'est aussi ce que nous ferons pour le présent.

COROLLAIRE X.

(110.) Si, dès le premier instant de l'action, la somme des puissances positives qui agissent sur le système, est égale à la somme des puissances négatives, le centre des masses demeurera immobile; car, dans ce cas, $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon \dots = 0$.

COROLLAIRE XI.

(111.) Comme les directions des puissances qui ne sont pas parallèles, se décomposent en d'autres qui le sont, il peut arriver que, l'espace parcouru par le centre des masses, suivant une ou deux directions, soit zéro, sans que, pour cela, celui qu'il parcourt suivant les autres directions cesse d'avoir lieu. Il suffit, pour cela, que, dès le commencement de l'action, la somme des puissances positives qui agissent suivant cette direction, ou ces directions, soit égale à la somme des puissances négatives.

COROLLAIRE XII.

(112.) Si les corps qui composent un système, au lieu d'être libres, sont liés, ou unis entre eux par des lignes inflexibles, de sorte qu'ils

ne puissent obéir à l'action des puissances, & prendre les directions suivant lesquelles ils sont sollicités; on peut, dans ce cas, considérer chaque corps comme animé par deux puissances, dont l'une est celle qui le meut réellement, & l'autre qui procède de la tension, ou de la force avec laquelle les corps se tirent mutuellement. Mais à chacune de ces dernières puissances, considérée positivement, répond toujours une puissance égale & négative, puisque l'action est égale à la réaction : donc, dès le premier instant de l'action, on aura $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 0$, par rapport aux forces avec lesquelles les corps se tirent mutuellement, & par conséquent le centre des masses demeurera immobile; c'est-à-dire, ne recevra aucun mouvement de l'action des forces avec lesquelles les corps se tirent mutuellement.*

COROLLAIRE XIII.

(113.) Il suit de là que le mouvement du centre des masses d'un système de corps liés entre eux par des lignes inflexibles, sera le même que s'il n'étoit soumis qu'à l'action des puissances qui mettent les corps en mouvement; par conséquent le mouvement du centre des masses du système sera toujours le même, soit que les corps soient libres, soit qu'ils soient liés entre eux par des lignes inflexibles.

COROLLAIRE XIV.

(114.) Un corps quelconque est la même chose qu'un système de corps infiniment petits, liés entre eux. Donc le centre de la masse totale d'un corps quelconque, soumis à l'action de puissances quelconques, se mouvra de la même manière que si chaque particule de la matière qui le compose étoit séparée & libre; ou comme si c'étoit un système de corps libres.

* Ce principe est de la plus grande fécondité dans la science du mouvement des corps; c'est à lui que les Sciences Physico-Mathématiques font redevables des progrès immenses qu'elles ont faits. Il est généralement attribué à M. d'Alembert, qui le publia en 1743. (Voyez la Dynamique.) M. Fontaine a semblé le revendiquer; (Voyez son Traité du calcul intégral.) mais cependant la gloire de l'invention est demeurée à M. d'Alembert; & nous pensons que c'est à juste titre. M. d'Alembert a publié ce principe dès 1743, & M. Fontaine n'en a parlé qu'en 1764. La postérité est inexorable, elle ne connoît que les dates, pour discerner les honneurs dus à ceux qui l'ont servie. Il faut publier promptement ce qu'on a fait & ce qu'on a vu de nouveau dans les sciences; les tardifs sont toujours malheureux. (M. Bailly, Hist. de l'Astronomie moderne, Tome II, page 103.)

COROLLAIRE X V.

(115.) On doit entendre la même chose d'un système de corps unis entre eux, quoique sa masse ne soit pas considérée comme réunie à son centre.

COROLLAIRE X V I.

(116.) D'après cela, nous aurons, généralement, pour quelque corps que ce soit, ou pour tout assemblage de corps libres, ou liés entre eux, $dg = \frac{dt(f_1dt + f_2dt + f_3dt + \&c.)}{M} = \frac{dt}{M} \int \pi dt.$

$$W = \frac{f_1dt + f_2dt + f_3dt + \&c.}{M} = \frac{1}{M} \int \pi dt. \quad dW = \frac{a + \beta + \gamma + \delta + \&c.}{M} = \frac{v dt}{M}.$$

$$dt = \frac{M dW}{a + \beta + \gamma + \delta + \&c.} = \frac{M dW}{v}, \quad W^2 = \frac{2}{M} \int (a + \beta + \gamma + \delta + \&c.) dg = \int \pi dg.$$

$$W = \frac{Au + Bv + \&c.}{M}.$$

COROLLAIRE X V I I.

(117.) Si l'on avoit $W=0$, on auroit aussi $Au + Bv + \&c. = 0$; & si le système n'étoit composé que des deux corps A & B , l'un agiroit positivement, & l'autre négativement; en sorte qu'on auroit $Au = Bv$; d'où l'on tire $u : v :: B : A$, ou :: $\frac{1}{A} : \frac{1}{B}$. C'est-à-dire que dans tout système, ou machine composée de deux corps, les vitesses des corps sont en raison inverse des masses, lorsque le centre des masses est immobile.

COROLLAIRE X V I I I.

(118.) Dans les corps graves, les puissances sont comme les masses: donc dans toute machine dont la gravité est le principe moteur, les vitesses que prennent les deux corps dont on suppose la machine composée, sont en raison inverse des puissances, ou des gravités, si le centre de gravité demeure fixe. Si au contraire ce centre est en mouvement, la raison qui régnera entre les puissances ne sera pas égale à celle qui régnera entre les vitesses prises dans un ordre inverse; c'est-à-dire que l'analogie du Corollaire précédent cesse d'avoir lieu.

COROLLAIRE X I X.

(119.) Si l'on avoit $a + \beta + \gamma + \&c. = 0$, on auroit $dW = 0$; & réciproquement, pour que $dW = 0$, il faut que la somme des puissances $a + \beta + \gamma + \&c.$ qui animent le corps, ou le système de corps,

soit égale à zéro. Ainsi le centre des masses d'un corps, ou d'un système, ne peut se mouvoir avec une vitesse, ou un mouvement uniforme, à moins que toutes les puissances agissantes ne se détruisent mutuellement, ou que l'action de chacune d'elles ne soit égale à zéro. *

C O R O L L A I R E X X.

(120.) Comme la supposition que les corps du système sont liés entre eux, ne change rien à la démonstration donnée dans les *Art.* 96 & 97, au sujet de la distance perpendiculaire du centre des masses à un plan quelconque; il s'ensuit que la distance perpendiculaire du centre de masse d'un corps quelconque à un plan, sera égale à la somme des produits de chaque particule de la masse qui le compose, par sa distance perpendiculaire au même plan, divisée par la somme desdites particules, ou par la masse totale du corps. Par conséquent, la distance perpendiculaire du centre des puissances qui agissent sur un corps à un plan quelconque, sera égale à la somme de tous les produits de chaque puissance, par sa distance perpendiculaire au même plan, divisée par la somme des puissances.

C O R O L L A I R E X X I.

(121.) On a vu (12.) que dans les corps d'une densité uniforme, la masse est proportionnelle à l'espace qu'ils occupent; il s'ensuit que, dans le calcul, on pourra prendre l'espace, ou le volume pour la masse: ainsi la distance perpendiculaire du centre des masses à un plan quelconque, sera égale à la somme des produits de chaque espace, ou volume différentiel, par sa distance perpendiculaire au même plan, divisée par tout l'espace qu'occupe le corps.

C O R O L L A I R E X X I I.

(122.) Si un corps uniformément dense peut être divisé en deux parties égales & semblables par des plans, & si on le divise par trois plans quelconques, qui se coupent entre eux perpendiculairement; le centre des masses sera dans le point commun à ces trois plans, c'est-à-dire, dans le point où les trois intersections des plans se ren-

* On voit assez, sans qu'il soit nécessaire d'y insister, qu'on suppose le centre de masse du système en mouvement avec la vitesse W , lorsque les puissances a , b , c , &c. commencent leur action; car il est évident (120.) qu'il ne pourroit recevoir aucun mouvement par l'action des puissances dont la somme = 0.

contrent. Car les produits des volumes différenciels qui sont situés d'un côté de l'un quelconque de ces trois plans , par leurs distances perpendiculaires au même plan , seront égaux aux produits correspondants des volumes différenciels situés de l'autre côté : mais ces produits étant les uns positifs , & les autres négatifs , se détruisent mutuellement ; leur somme sera donc égale à zéro : ainsi la distance perpendiculaire du centre de masse au plan , sera par conséquent égale à zéro ; ou , ce qui revient au même , le centre de masse se trouvera dans le même plan. Ce raisonnement pouvant se faire pour chacun des trois plans , il s'ensuit que le centre de masse doit aussi se trouver dans chacun des deux autres plans : il sera donc dans le point commun à ces trois plans , c'est-à-dire , au point où les trois intersections se rencontrent.

COROLLAIRE XXIII.

(123.) Le centre de la masse d'une sphere uniformément dense , sera donc le même que son centre de grandeur , ou de figure. Il en est de même du centre de la masse d'un ellipsoïde , d'un parallépipède , d'un cylindre , ou de tout autre corps susceptible d'être divisé en deux parties égales par trois plans qui se coupent perpendiculairement.

SCOLIE.

(124.) Après ce que nous venons de dire , il ne sera pas difficile de trouver le centre de masse d'un corps quelconque uniformément dense. Pour cela , il n'y aura qu'à imaginer un plan passant par un point quelconque du corps , nous l'appellerons *plan primitif* ; ensuite diviser le corps par deux plans parallèles au plan primitif , & infiniment près l'un de l'autre , afin qu'ils renferment une tranche , ou espace différenciel parallèle dans tous ses points au plan primitif. Cet espace différenciel étant multiplié par la distance perpendiculaire audit plan ; prenant ensuite l'intégrale du produit , & la divisant par le volume du corps , ou par l'espace total qu'il occupe , le quotient de la division exprimera la distance perpendiculaire du plan primitif à un plan qui lui est parallèle , & qui passe par le centre de masse du corps. Cette opération étant répétée par rapport à trois *plans primitifs* qui se croisent perpendiculairement , on aura la position de trois plans perpendiculaires entre eux , & qui passent tous par le centre de masse ; le point commun à ces trois plans sera par conséquent le centre de la masse totale du corps.

Mais il y a beaucoup de corps qui peuvent se diviser en deux parties égales & semblables par deux plans perpendiculaires entre eux, mais qui ne peuvent pas l'être par trois; tels sont les paraboloides, les hyperboloides, & tous les autres corps qui sont formés par la révolution d'une courbe quelconque. Dans ce cas, il est certain, par ce qui a été dit dans l'Art. 122, que, les corps étant toujours supposés d'une densité uniforme, le centre des masses sera dans la commune section des deux plans, ou dans l'axe de révolution de la courbe génératrice. Pour trouver le point précis de cet axe où se trouve le centre de la masse totale, il n'y aura donc plus qu'à supposer un plan qui lui soit perpendiculaire, & opérer, à l'égard de ce plan, comme on l'a dit ci-dessus. On peut, pour rendre le calcul plus facile, faire passer le plan primitif par l'origine des abscisses, ou par l'extrémité de l'axe; alors en appellant x les abscisses, & y les ordonnées de la courbe génératrice; & représentant par c la circonférence d'un cercle dont le rayon est l'unité; cy sera la circonférence du cercle que l'ordonnée décrira dans sa révolution, & $\frac{1}{2}cy^2$ sera l'aire de ce cercle, ou du plan parallèle à celui qu'on suppose passer par l'extrémité de l'axe. On aura donc $\frac{1}{2}cy^2dx$ pour l'expression de l'espace différentiel, ou de la tranche infiniment mince, qui est également éloignée dans tous les points du plan primitif, & $\frac{1}{2}cy^2x dx$ sera le produit de cet espace, par sa distance perpendiculaire à ce plan. La somme de ces produits sera donc $\frac{1}{2}c \int y^2 x dx$; mais $\frac{1}{2}c \int y^2 dx$ est la somme de tous ces espaces, ou le volume total du corps; donc on aura la distance du plan primitif, ou de l'extrémité de l'axe, au centre de masse du corps $= \frac{\frac{1}{2}c \int y^2 x dx}{\frac{1}{2}c \int y^2 dx} = \frac{\int y^2 x dx}{\int y^2 dx}$: formule générale pour trouver le centre de masse de tous les corps d'une densité uniforme, engendrés par la révolution d'une courbe quelconque autour d'un axe.

E X E M P L E I.

(125.) Soit proposé de trouver le centre de masse d'une demi-sphère. L'équation du cercle générateur, en prenant son centre pour l'origine des abscisses, & faisant son rayon $= r$, est $y^2 = r^2 - x^2$. Substituant cette valeur de y^2 dans la formule, on aura la distance du centre de la sphère, ou de l'origine des x au centre de masse, $= \frac{\int (r^2 - x^2) x dx}{\int (r^2 - x^2) dx} = \frac{(\frac{1}{2}r^2x - \frac{1}{3}x^3)}{r^2x - \frac{1}{3}x^3}$, d'où l'on tire $\frac{\frac{1}{2}r^2}{\frac{1}{3}r^2} = \frac{3}{2}r$ pour la valeur de la distance cherchée, en faisant $x = r$, afin de comprendre toute la demi-sphère dans l'expression.

E X E M P L E I I.

(126.) Qu'il soit question de trouver le centre de masse d'un paraboloïde. L'équation de la courbe génératrice est $y^2 = px$; substituant cette valeur de y^2 dans la formule générale, la distance de l'origine des abscisses au centre de la masse sera $= \frac{\int p x^2 dx}{\int p x dx} = \frac{\frac{1}{3} x^3}{\frac{1}{2} x^2} = \frac{2}{3} x$. Il en est de même de tous les autres corps de cette espèce.

COROLLAIRE XXIV.

(127.) On trouvera de la même manière le centre des puissances.

CHAPITRE IV.

De la Rotation d'un Système.

DÉFINITION XX.

(128.) ON appelle *Rotation d'un Système*, le mouvement par lequel il tourne sur un point, ou sur un axe quelconque mobile, ou immobile. L'angle que le système décrit en vertu de ce mouvement de rotation, s'appelle *Angle gyrotoire*, ou de *Rotation*.

PROPOSITION XVIII.

FIG. III.

(129.) Si deux corps A & B, liés ensemble par une ligne inflexible AB, sont mis en mouvement par l'action des puissances α & β , suivant les directions parallèles AF, BG, de sorte que, dans un instant, ou différencielle de temps dt , ils se trouvent en E & I; je dis que l'angle de rotation décrit pendant cet instant sera $= \frac{A' dt \sin \alpha - B' dt \sin \beta}{A' A + B' B}$; A' & B' désignant les distances respectives des corps A & B au centre N des masses, & $\angle$ l'angle KAB, que forment les directions des puissances avec la ligne AB.

On a vu (100.) que le centre de gravité N doit suivre la ligne NHM, parallèle aux directions des puissances; il s'ensuit que les deux distances HE, HI, doivent être respectivement égales à NA, NB; & que FE, GI seront les espaces que parcourront les corps, en vertu des forces avec lesquelles ils se tirent mutuellement. Mais ces forces exerçant toujours leurs actions suivant les lignes AB, EI, qui

qui unissent les corps (112.), n'affectent point les forces, ou puissances, qui animent ces corps perpendiculairement aux mêmes lignes AB , EL . Cela posé, les forces, ou puissances, qui agissent suivant AF , BG , sont (75.) aux forces qui agissent perpendiculairement à AB , comme le rayon est à $\sin \Sigma$: donc la puissance qui anime le corps A perpendiculairement à AB , sera $= \alpha \sin \Sigma$, & celle qui anime le corps B , dans la même direction, sera $= \beta \sin \Sigma$. La différentielle de l'espace parcouru par le corps A , perpendiculairement à AB , sera donc (35.) $= \frac{dt}{A} \alpha \sin \Sigma$, & celle de l'espace parcouru par le corps B , dans la même direction, sera $= \frac{dt}{B} \beta \sin \Sigma$, & la quantité LE , dont un de ces espaces différentiels surpasse l'autre, sera $= \frac{dt}{A} \alpha \sin \Sigma - \frac{dt}{B} \beta \sin \Sigma$. **

Or l'angle de rotation LIE est, selon la Géométrie, $= \frac{LE}{LI} = \frac{LE}{AB}$ ***;

donc l'expression de cet angle sera $= \frac{\frac{dt}{A} \alpha \sin \Sigma - \frac{dt}{B} \beta \sin \Sigma}{AB}$: ou (en

mettant pour AB sa valeur $A' + B') = \frac{\frac{dt}{A} \alpha \sin \Sigma - \frac{dt}{B} \beta \sin \Sigma}{A' + B'}$. Mais

(83.) $A'A = B'B$; donc on aura, pour l'expression de la valeur de cet angle, la quantité $\frac{\frac{dt}{A} \alpha \sin \Sigma - \frac{dt}{B} \beta \sin \Sigma}{A' + B'} = \frac{A' d\alpha \sin \Sigma - B' d\beta \sin \Sigma}{A'A(A' + B')}$
 $= \frac{A' d\alpha \sin \Sigma - B' d\beta \sin \Sigma}{A'A + B'B}$.

* Quoique ceci dérive directement de l'Art. 75, auquel l'Auteur renvoie, nous allons cependant en donner une démonstration particulière, en faveur des commençants. Soit la puissance α représentée par la portion Aq de la direction, décomposée en deux puissances As , An , la première perpendiculaire à AB , & l'autre suivant AB . Dans le triangle rectangle Aq , on aura $Aq : As :: 1 : \sin \Sigma$; donc la force $As = Aq \times \sin \Sigma$; & de même, dans le triangle rectangle Bq , on aura $Bq : Bn :: 1 : \sin \Sigma$; donc la force $Bn = Bq \times \sin \Sigma$. On démontrera de même dans le triangle Bux , que la force perpendiculaire à AB est $= \beta \sin \Sigma$.

** LE est véritablement l'excès, ou la différence des deux espaces différentiels décrits par les corps A & B , en vertu des forces perpendiculaires à AB . Car si, par le point I , on mène IL parallèle à AB ; & si de ce même point I , comme centre, & avec le rayon $IL = AB$, on décrit l'arc infiniment petit LE , qui pourra être considéré comme une ligne droite perpendiculaire à IL ; il est évident que, si les forces perpendiculaires à AB avoient eu la même énergie, ou avoient eu la propriété de se faire équilibre, les deux corps seroient restés constamment dans la même ligne parallèle à AB ; mais l'arc LE marque de combien le corps A s'est élevé au-dessus de la parallèle qui passe par le corps B arrivé en I : donc cet arc marque l'excès de l'espace différentiel parcouru par le corps A , en vertu de la force perpendiculaire à AB qui l'animoit, sur l'espace différentiel parcouru par le corps B , en vertu de la force semblable qui agitoit sur lui.

*** Il est aisé de concevoir que l'angle LIE est l'angle de rotation du système, & que son expression est $\frac{LE}{LI}$.

M

D É F I N I T I O N X X I.

(130.) On a aussi contume de donner le nom de *Vitesse angulaire* à cet angle de rotation décrit pendant l'instant dt .

C O R O L L A I R E I.

(131.) La différencielle de l'espace parcouru par le corps A étant $(29.) = udt = LE$; & l'angle de rotation, ou la vitesse angulaire

En effet, puisque les puissances agissent sur les corps A & B dans les directions parallèles AF , BG , elles tendent à leur communiquer, ainsi qu'à toutes les parties de la ligne AB qui les unit, un mouvement parallèle à ces directions; mouvement qui auroit effectivement & uniquement lieu, si cette ligne n'étoit pas inflexible, comme on le suppose. On a vu (100 & 112.) que le centre de gravité N du système se meut de la même manière que si les puissances α & β y étoient appliquées; donc son mouvement sera rectiligne & simple, dans la direction NM parallèle à celles des puissances. Mais à cause de la prépondérance de la puissance α sur la puissance β , la ligne AB doit s'incliner de plus en plus à l'égard de la situation primitive AB , tandis que le centre de gravité N s'avance dans la ligne NM : or pour que cette inclinaison ait lieu, il faut que le corps A tourne dans un sens, & le corps B dans le sens opposé; par conséquent toutes les parties du système participent à ce mouvement, à l'exception du centre de gravité N que nous avons vu en être exempt. Donc tout le système tourne sur son centre de gravité.

On voit par-là que tous les points de la ligne AB , à l'exception du point N , doivent avoir un mouvement composé de deux autres, l'un rectiligne, qui tend à leur faire parcourir, ainsi qu'au point N , des espaces parallèles aux directions AF , BG ; & l'autre de rotation autour de ce centre, qui tend à leur faire décrire, dans le même temps, des espaces proportionnels aux distances dont elles en sont éloignées. Ainsi, à parler rigoureusement, les corps A & B ne parcourent ni des lignes droites, ni des arcs de cercle; mais une courbe résultante de la combinaison d'un mouvement rectiligne & d'un circulaire; courbe qui, comme on le voit, est une *Cycloïde*. Mais, comme il ne s'agit ici que du mouvement de rotation pendant la différencielle de temps dt , nous ne considérerons que le mouvement circulaire.

Si l'on n'examine pas les mouvements absolus des deux corps A & B , ni ceux de la ligne AB , mais qu'on compare seulement ces mouvements à la position primitive AB que cette ligne avait avant l'action des puissances α & β ; il est évident que, pendant la différencielle de temps dt , AB a dû paroître tourner sur le point fixe C , intersection des deux lignes AB , EL , qui sont les positions du système au commencement & à la fin de l'instant dt . C'est ce point qu'on appelle *Centre de conversion*, & que *Bernoulli* a nommé *Centre spontané de rotation*.

Ceci posé, puisque le système a dû paroître tourner sur le point C , il est clair que l'angle de rotation est $\angle ACE =$ l'angle LIE : & en menant par le centre de gravité H la droite HR , parallèle à AB , on voit encore que cet angle est égal à l'angle RHE , qui est l'angle de rotation décrit autour du centre de gravité H .

Maintenant, on sait, par les éléments de Géométrie, qu'un angle est mesuré par l'arc de cercle décrit de son sommet comme centre, & intercepté entre ses côtés, que cet arc a toujours le même nombre de degrés, de quelque grandeur que soit son rayon, quoique la grandeur absolue soit plus ou moins grande. Or, il est évident que le rayon demeurant le même, l'angle croîtra en proportion de la grandeur de l'arc, c'est-à-dire, en raison directe de l'arc. Il est également évident que l'arc demeurant le même en grandeur absolue, l'angle croîtra à proportion que le rayon diminuera, c'est-à-dire, en raison inverse du rayon. Donc en général les angles sont en raison directe de la grandeur absolue des arcs qui leur servent de mesure, & en raison inverse du rayon de ces arcs; par conséquent $Angle = \frac{\text{Arc}}{\text{Rayon}}$. Donc $\frac{RH}{RE}$, ou $\frac{LE}{LI}$ est l'expression de l'angle de rotation.

étant $= \frac{LE}{LI}$; cette dernière vitesse sera par conséquent $= \frac{u dt}{LI}$; & la vitesse u du corps A sera $= \frac{LE}{dt} = \frac{LE}{LI} \cdot \frac{LI}{dt}$. Donc la vitesse u est égale à la vitesse angulaire multipliée par $\frac{LI}{dt}$.

D É F I N I T I O N X X I I .

(132.) Les produits $A'\alpha$, $B'\beta$, $a\alpha$, $b\beta$, des puissances α & β , par leurs distances $A' = AN$, $B' = BN$, ou $a = AO$ & $b = BQ$ au centre N des masses, ou à un plan QM qui passe par ce centre, s'appellent *Moments de ces puissances*.

D É F I N I T I O N X X I I I .

(133.) Pareillement, les produits $A'A$, $B'B$ s'appellent *Moments des masses*, ou *de la gravité*.

D É F I N I T I O N X X I V .

(134.) Les produits $A'^2 A$, $B'^2 B$ des masses par le quarré de leur distance au centre des masses, ont été nommés *Moments d'inertie* par Léonard Euler (*Scientia navalis*, §. 165.). Nous nous servirons de cette expression dans la suite.

L E M M E I .

(135.) Les quantités $A' \sin \Sigma$, $B' \sin \Sigma$, sont égales aux perpendiculaires AO , BQ , tirées des corps sur la ligne MN , qui passant par le centre N des masses, est parallèle aux directions AF , BG des puissances.

Les angles ANO , QNB sont égaux à l'angle KAB ; ils auront donc le même sinus, sçavoir, $\sin \Sigma$: de plus, les triangles ANO , QNB étant rectangles, on aura $1 : \sin \Sigma :: AN (A') : AO = A' \sin \Sigma$, & $1 : \sin \Sigma :: BN (B') : BQ = B' \sin \Sigma$. Donc, &c.

C O R O L L A I R E I .

(136.) Représentant donc par a & b les perpendiculaires AO , BQ ; l'expression de l'angle de rotation produit dans l'instant dt deviendra $= \frac{a \sin \alpha dt + b \sin \beta dt}{A' A + B' B}$.

Mais la ligne BQ étant de l'autre côté du centre des masses à l'égard de la droite AO , supposée positive, doit être considérée comme négative. Convenant donc de changer les signes des quantités qui

ne sont pas positives *, l'expression de la vitesse angulaire, ou de l'angle de rotation produit dans l'instant dt deviendra =

$$\frac{dfdt(a\alpha + b\beta)}{A'A + B'B} = \frac{dfdt \sin \Sigma (A'\alpha + B'\beta)}{A'A + B'B}.$$

S C O L I E.

(137.) Nous supposons pour le présent que les corps sont infiniment petits, ou que leurs masses sont réunies dans des points, c'est-à-dire, à leurs centres de masse.

C O R O L L A I R E II.

(138.) Puisque l'angle de rotation est $= \frac{dfdt \sin \Sigma (A\alpha - B\beta)}{A'A + B'B} = \frac{dfdt(a\alpha - b\beta)}{A'A + B'B}$, si, dès le commencement de l'action, la somme des moments $A\alpha - B\beta$, ou $a\alpha - b\beta$ étoit égale à zéro, le système ne tourneroit pas.

C O R O L L A I R E III.

(139.) Puisqu'on suppose que les puissances agissent constamment sur les deux corps A & B , suivant les directions AF , BG ; il s'ensuit que la rotation se fera (61.) dans le plan qui coïncide avec ces directions, & avec la droite AB qui passe par le centre des masses.

D É F I N I T I O N XXV.

(140.) Pour plus de clarté, nous appellerons désormais ce plan, *Plan gyrotoire*, ou *Plan de rotation*.

L E M M E I I.

(141.) Si l'un des corps est supposé infini, ce corps restera sans mouvement, & le centre des masses coïncidera avec lui; par conséquent le centre des masses restera également fixe, ou sans mouvement.

Car B étant le corps qu'on suppose infini, l'équation $\frac{db}{B} \int \beta dt = db$, fait voir que son mouvement est zéro : on voit de même par l'équation $B' = \frac{A'A}{B}$, que sa distance B' , au centre des masses est aussi zéro. Donc si l'un des corps, &c.

* Les quantités qui ne sont pas positives sont b & B' : car on voit que la distance $BN = B'$ étant de l'autre côté du centre des masses à l'égard de la distance $AN = A'$, qu'on suppose positive, elle doit être de signe contraire. On voit également que ce changement de signe n'affecte point le dénominateur des expressions de l'angle de rotation, puisque la quantité B' y est au carré : ainsi, ce dénominateur est toujours essentiellement positif. Cette remarque s'applique à l'Art. 129.

COROLLAIRE I.

(142.) Dans ce cas, la quantité $B' dt \beta dt \sin \Sigma$, ainsi que la quantité $B'^2 B$, qui se trouvent dans l'expression de l'angle de rotation, sont zéro. Ainsi, cette expression se réduit à $\frac{A' dt \beta dt \sin \Sigma}{A'^2 A} = \frac{dt \beta dt \sin \Sigma}{A' A}$, ou $= \frac{dt \beta dt \sin \Sigma}{A' A}$; d'où l'on voit que lorsqu'un seul corps A est obligé de tourner autour d'un point fixe dont il est éloigné de la quantité A' , l'angle de rotation produit pendant l'instant dt est $= \frac{dt \beta dt \sin \Sigma}{A' A} = \frac{dt \beta dt}{A' A} *$

COROLLAIRE II.

(143.) S'il n'y a qu'une seule puissance à agir, & qu'il y ait toujours deux corps; c'est-à-dire, si $\beta = 0$, l'angle de rotation sera $= \frac{A' dt \beta dt \sin \Sigma}{A'^2 A + B'^2 B} = \frac{dt \beta dt}{A'^2 A + B'^2 B}$.

COROLLAIRE III.

(144.) Cette expression peut se changer en celle-ci, $\frac{A' dt \beta dt \sin \Sigma}{A'^2 (A + \frac{B'^2}{A'^2} B)} = \frac{dt \beta dt}{A'^2 (A + \frac{B'^2}{A'^2} B)}$, laquelle est la même (142.) que celle qu'on

trouveroit, en supposant qu'un seul corps $= A + \frac{B'^2}{A'^2} B$, tourne par l'action de la puissance α , autour d'un point fixe éloigné de lui de la quantité A' . Donc la puissance α produit le même angle de rotation, lorsqu'elle fait tourner un seul corps $= A + \frac{B'^2}{A'^2} B$ autour d'un point fixe éloigné de lui de la quantité A' , que lorsqu'elle fait tourner les deux corps A & B , autour du même point fixe aux distances A' & B' .

COROLLAIRE IV.

(145.) Comme la quantité $B' \sin \Sigma$, ou la perpendiculaire b s'est évanouie de l'expression $\frac{dt \beta dt}{A'^2 A + B'^2 B}$; il s'ensuit que, pour l'angle de rotation, le lieu du corps B est indifférent, pourvu qu'il soit toujours éloigné du point fixe de la quantité B' .

* Réciproquement, on peut regarder le point fixe sur lequel un corps est assujéti à tourner, comme le centre de gravité d'un système de deux corps, dont l'un placé sur ce point, & par conséquent sans mouvement, est d'une masse infinie à l'égard de celle de l'autre qui est le corps qui se meut réellement. Le moment d'inertie du corps en mouvement est le seul qu'on doive considérer, puisque celui de l'autre est zéro; & ce moment est le produit de la masse de ce corps, par le carré de sa distance au point fixe.

COROLLAIRE V.

(146.) Il est évident, par ce qui a été dit à l'Art. 144, qu'au lieu de deux corps A & C qui feroient animés par la puissance α aux distances A' & C' du centre de gravité, nous pouvons supposer un seul corps $= A + \frac{C^2}{A^2} C$ soumis à l'action de la même puissance à la distance A' du même point. Substituant donc la quantité $A + \frac{C^2}{A^2} C$ en place de A seul, dans l'expression $\frac{dtfaadt + dtfbdt}{A^2 A + B^2 B}$, il en résultera l'angle de rotation produit dans le même instant dt , par l'action des deux puissances α & β , sur les trois corps A , B & C , situés dans le même plan de rotation; & la valeur de cet angle sera

$$= \frac{dtfaadt + dtfbdt}{A^2 (A + \frac{C^2}{A^2} C) + B^2 B} = \frac{dtfaadt + dtfbdt}{A^2 A + B^2 B + C^2 C}.$$

COROLLAIRE VI.

(147.) Pareillement, l'angle de rotation, produit par la seule puissance α qui agit sur les trois corps A , C & D , sera

$$= \frac{dtfaadt}{A^2 A + C^2 C + D^2 D} = \frac{dtfaadt}{A^2 (A + \frac{C^2}{A^2} C + \frac{D^2}{A^2} D)}.$$

Mais cet angle est le même que celui que produiroit la même puissance, si elle agissoit sur un seul corps $= A + \frac{C^2}{A^2} C + \frac{D^2}{A^2} D$: substituant donc la valeur de ce corps

en place de A dans l'expression $\frac{dtfaadt + dtfbdt}{A^2 A + B^2 B}$, on aura l'angle de rotation que produisent les deux puissances α & β agissant sur les quatre corps A , B , C & D , situés dans le même plan de rotation, & la valeur de cet angle sera

$$= \frac{dtfaadt + dtfbdt}{A^2 (A + \frac{C^2}{A^2} C + \frac{D^2}{A^2} D) + B^2 B} = \frac{dtfaadt + dtfbdt}{A^2 A + B^2 B + C^2 C + D^2 D}.$$

COROLLAIRE VII.

(148.) On dira la même chose de cinq, six, ou d'un plus grand nombre de corps: de sorte que l'angle de rotation produit dans un instant dt par l'action de deux puissances α & β , sur un nombre quelconque de corps situés dans le même plan de rotation, est

$$= \frac{dtfaadt + dtfbdt}{A^2 A + B^2 B + C^2 C + D^2 D + \dots}.$$

COROLLAIRE VIII.

(149.) S'il n'y avoit qu'un seul corps, & qu'il y eût toujours deux

Chap. IV. DE LA ROTATION D'UN SYSTÈME. 95
puissances; c'est-à-dire, si l'on avoit $B=0$; dans ce cas, l'expres-

sion de l'angle de rotation se réduiroit à $\frac{difsadt + djsbdt}{A^2A} = \frac{difsadt(\alpha + \frac{b}{a}\beta)}{A^2A}$.

COROLLAIRE IX.

(150.) On auroit la même expression, si la puissance $\alpha + \frac{b}{a}\beta$, agissoit seule sur le corps A à la distance perpendiculaire a de la direction qui passe par le centre des masses. Donc deux puissances α & β , dont les directions sont parallèles, & qui agissent à des distances perpendiculaires a & b de la direction qui passe par le centre des masses, produisent le même angle de rotation qu'une seule puissance $\alpha + \frac{b}{a}\beta$ qui agiroit à la distance a .

COROLLAIRE X.

(151.) Nous pouvons donc mettre dans l'expression $\frac{difsadt + djsbdt}{A^2A + B^2B + C^2C + D^2D + Ec}$, au lieu de deux puissances α & γ , qui agiroient aux distances a & c , une seule puissance $\alpha + \frac{c}{a}\gamma$, qui agisse à la distance a ; ce qui donnera l'angle de rotation produit par trois puissances qui agissent parallèlement sur un nombre quelconque de corps situés dans le même plan que les directions des puissances $= \frac{difsadt + djsbdt + djsctdt}{A^2A + B^2B + C^2C + D^2D + Ec} = \frac{difsadt + djsbdt + djsctdt}{A^2A + B^2B + C^2C + D^2D + Ec}$.

COROLLAIRE XI.

(152.) Pareillement, si l'on substitue dans cette dernière expression la quantité $sadt(\alpha + \frac{d}{a}\delta)$, à la place de $sadt$ seul, on aura l'angle de rotation produit par l'action de quatre puissances qui agissent suivant des directions parallèles sur un nombre quelconque de corps situés dans le même plan de rotation $= \frac{difsadt + djsbdt + djsctdt + djsdte}{A^2A + B^2B + C^2C + D^2D + Ec}$.

COROLLAIRE XII.

(153.) On dira la même chose d'un nombre quelconque de puissances qui agissent suivant des directions parallèles sur un nombre quelconque de corps situés dans un même plan de rotation. Donc en général, l'angle de rotation produit, pendant un temps infiniment petit dt , par un nombre quelconque de puissances qui agissent suivant des directions parallèles sur un nombre quelconque de corps unis entre eux par des lignes inflexibles, & situés dans le plan même

de la rotation , a pour expression $\frac{d\tau \{ aadt + d\tau \{ bbd + d\tau \{ ccd + d\tau \{ ddd + \&c. }{A'^2 A + B'^2 B + C'^2 C + D'^2 D + \&c.}$. Dans cette expression, on fera négatives les perpendiculaires $a, b, c, d, \&c.$ & les puissances $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \&c.$ qui doivent l'être (136.)

COROLLAIRE XIII.

(154.) Si l'on représente par p la distance perpendiculaire du centre des puissances à la direction qui passe par le centre des masses; & par π la somme des puissances, on aura (104.) $p\pi = \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \&c.$ somme des moments, & $d\tau p\pi dt = d\tau dt (\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \&c.)$. Donc, en substituant, on aura, pour la valeur de l'angle de rotation produit dans l'instant dt par l'action d'un nombre quelconque de puissances qui agissent, suivant des directions paralleles, sur un nombre quelconque de corps unis entre eux par des lignes inflexibles, & qui sont dans le même plan de rotation, la quantité $\frac{d\tau p\pi dt}{A'^2 A + B'^2 B + C'^2 C + D'^2 D + \&c.}$.

COROLLAIRE XIV.

(155.) L'expression $p\pi$ fait voir que l'angle de rotation n'éprouvera aucun changement, quelque situation qu'on donne aux puissances, dans le plan de rotation, soit qu'on les divise, soit qu'on les unisse comme on voudra, pourvu que la somme des puissances qu'on leur substitue, soit toujours égale à la même quantité π ; & que la distance perpendiculaire de leur centre à la direction qui passe par le centre des masses soit toujours égale à la même quantité p .

COROLLAIRE XV.

(156.) L'expression du dénominateur $A'^2 A + B'^2 B + C'^2 C + D'^2 D + \&c.$ fait voir pareillement que la valeur de l'angle de rotation n'éprouvera aucun changement, de quelque manière qu'on distribue les corps dans le plan de rotation, pourvu qu'on les conserve à la même distance du centre des masses; & si l'on fait varier ces distances en même temps que les corps, l'angle de rotation demeurera encore le même, si la somme $A'^2 A + B'^2 B + C'^2 C + D'^2 D + \&c.$ des moments d'inertie demeure toujours constante.

COROLLAIRE XVI.

(157.) Si nous supposons que la somme des moments d'inertie $A'^2 A + B'^2 B + C'^2 C + D'^2 D + \&c. = S$, l'angle de rotation produit pendant l'instant dt , par un nombre quelconque de puissances qui agissent

agissent parallèlement sur un nombre quelconque de corps unis entre eux par des lignes inflexibles, & situés dans le plan même de la rotation, sera $= \frac{d\sin \Sigma dt}{S}$.

PLANC. I.

COROLLAIRE XVII.

(158.) Pareillement, si l'on représente par P la distance du centre des masses à celui des puissances; & par Σ l'angle que forme la ligne qui joint ces deux centres avec les directions, on aura $1 : \sin \Sigma :: P : p = P \sin \Sigma$. Donc, en substituant, on pourra encore exprimer l'angle de rotation par $\frac{P(d\sin \Sigma dt)}{S}$, ou par $\frac{P(d\sin \Sigma dt \sin \Sigma)}{S}$, si P est constant.*

PROPOSITION XIX.

(159.) *Le mouvement de rotation sera le même, soit que le système soit libre, soit que son centre de masse soit fixe.*

Si l'on suppose qu'une nouvelle puissance, égale à la somme de toutes celles qui agissent sur le système, agisse dans une direction contraire sur le centre des masses, il est clair que ce centre demeurera en repos (110.) : mais cette nouvelle puissance étant appliquée au centre des masses, n'affectera point le numérateur de la formule de l'angle de rotation. Donc le mouvement de rotation du système se fera de la même manière, son centre de masse étant fixe, qu'il étoit libre.

PROPOSITION XX.

(160.) *Les formules que nous avons données pour la valeur de l'angle de rotation, ont encore lieu dans le cas où tous les corps, ainsi que toutes les puissances, ne sont pas dans le même plan de rotation.*

FIG. 18

Supposons que le système est composé de trois corps B, C, D , unis entre eux par des lignes inflexibles, & animés par les trois puissances β, γ, δ , dont les directions sont parallèles entre elles, & perpendiculaires à la droite DC qui joint les deux corps D & C . Soit de plus BA perpendiculaire à DC ; A le centre des masses des corps C & D ; & G celui des trois corps, ou celui des deux B & A , en supposant les deux corps C & D , réunis dans le point A , de manière à ne faire qu'un seul corps $A = C + D$. Soit encore supposé que le centre des deux puissances γ & δ , se trouve de

* On remarquera que ces expressions sont celles de l'angle de rotation pendant un temps fini t , au lieu que les précédentes n'en expriment que la différentielle, c'est-à-dire qu'elles expriment l'angle de rotation pendant un temps infiniment petit dt .

de même en A , afin que le système des deux corps C & D ne tourne point, & qu'en conséquence la ligne CD se conserve dans tout son mouvement perpendiculaire aux directions des puissances. Par le centre G des masses, menons la ligne IH parallèle à DC , & ensuite des points D & C abaïssons sur IH les perpendiculaires DH & CI ; de plus, représentons ces perpendiculaires par D' & C' , & la ligne AG par A' , ce qui donnera $A'=C'=D'$; & supposons enfin que $\gamma+\delta=\alpha$.

Substituant maintenant ces valeurs dans la formule trouvée pour l'angle de rotation produit dans le système des deux corps B & A , qui est $\frac{dfdt \sin z (A'\alpha+B'\delta)}{A'A+B'B}$, cette formule deviendra $\frac{dfdt \sin z (C'+D'+B'\delta)}{C'C+D'D+B'B}$, qui est l'expression de l'angle de rotation produit dans le système des trois corps B , C & D ; angle qui est le même que celui qui auroit lieu, si les trois corps étoient dans le même plan de rotation AB , & placés à des distances B' , C' & D' du point G : puisque cette expression de l'angle de rotation est identique avec celle qu'on a trouvée précédemment pour ce cas.

COROLLAIRE I.

(161.) On voit évidemment que le corps B peut pareillement se diviser en deux autres corps situés aux extrémités d'une ligne parallèle à DC , & les supposer animés par l'action de deux puissances, dont la somme est égale à β . Il en seroit de même d'un nombre quelconque de corps, dont se trouveroit composé un système, & qui seroient situés dans le même plan de rotation AB .

COROLLAIRE II.

(162.) On vient de voir comment deux corps A & B placés dans le même plan de rotation AB , peuvent être divisés, ou conçus divisés en plusieurs autres: par la même méthode, les corps divisés peuvent aussi être réunis, ou considérés comme réunis dans le même plan AB . Dans l'un & l'autre cas, le centre des puissances se trouve dans ce plan, & c'est sur ce même plan qu'on exprime la mesure de l'angle gyroïre, ou de rotation.

COROLLAIRE III.

(164.) Le plan de rotation sera donc, dans les deux cas, celui qui, passant par le centre des masses, passe aussi par celui des puissances, & est parallèle aux directions de ces dernières.

COROLLAIRE IV.

(163.) Puisque le mouvement de rotation du système se fait de

la même manière lorsque le système est libre, que lorsque le centre G des masses est fixe, le système tournera donc, dans le cas présent, de la même manière que si la ligne HI étoit fixe. Car, par la supposition, cette droite HI doit se maintenir constamment parallèle à DC , & celle-ci doit toujours être perpendiculaire aux directions des puissances.

DÉFINITION XXVI.

(165.) La ligne HI , considérée comme fixe, sur laquelle le système fait sa rotation, s'appelle *Axe de rotation*.

COROLLAIRE V.

(166.) Si, par l'axe de rotation HI , on fait passer un plan parallèle aux directions des puissances; & si, des points D , A & C , on abaisse des perpendiculaires à ce plan, ces perpendiculaires que nous nommerons d , a & c , seront égales entre elles, & à $D' \sin \Sigma$, $A' \sin \Sigma$, & $C' \sin \Sigma$ (135.). Substituant donc les lettres d , a & c dans la formule de l'angle de rotation, en place des quantités $D' \sin \Sigma$, $A' \sin \Sigma$, & $C' \sin \Sigma$, chacune pour celle qui lui correspond, cette formule deviendra $\frac{d \sin d + a \sin a + b \sin b}{C^2 C + D^2 D + B^2 B}$; expression qui, comme on le voit, est la même que celle qu'on a trouvée pour le cas où tous les corps du système sont dans le même plan de rotation AB .

DÉFINITION XXVII.

(167.) Nous appellerons *Plan directeur* ce plan qui, passant par l'axe de rotation, est parallèle aux directions des puissances.

COROLLAIRE VI.

(168.) Puisque d , c & b marquent les distances perpendiculaires des points D , C & B au plan directeur, si nous nommons p la distance perpendiculaire du centre de toutes les puissances au même plan; & si nous représentons par π la somme des mêmes puissances, on aura la somme des moments des puissances, c'est-à-dire, $\gamma c + d \delta + b \beta + \varepsilon c = p \pi$ (104.), d'où l'on tire $\frac{d \sin d + a \sin a + b \sin b}{C^2 C + D^2 D + B^2 B}$ pour l'expression de l'angle de rotation, ou enfin en faisant le dénominateur $C^2 C + D^2 D + B^2 B + \varepsilon c = S$, cette expression deviendra $\frac{d \sin d + a \sin a + b \sin b}{S}$: S marquant ici la somme des moments d'inertie.*

* Il est nécessaire de remarquer que depuis l'Art. 160, les moments d'inertie n'expriment

(169.) On verra aisément, en examinant ces formules, qu'elles n'exigent point que les centres de masse des corps pris deux à deux, comme D & C , se trouvent précisément dans la droite AB , comme nous l'avons supposé dans l'Art. 160 ; on peut les supposer plus hauts, ou plus bas, dans la même ligne CD ; car cela n'affecte nullement les distances DH , AG & CI , & par conséquent le dénominateur $C^2C + D^2D + B^2B + \&c.$, ni l'angle de rotation n'éprouvent aucun changement. La seule chose qui changera sera le centre G des masses ; mais il se maintiendra toujours dans la droite, ou axe HI .

COROLLAIRE VIII.

(170.) Les mêmes formules n'exigent pas non plus que les centres des puissances qui agissent sur les corps pris deux à deux, comme D & C , tombent précisément dans la ligne AB , ni dans le centre de masse des mêmes corps, comme nous l'avons supposé dans l'Art. 160 : elles exigent seulement que la distance p du centre de toutes les puissances au plan directeur, reste toujours la même ; que ce centre soit placé en K , ou en quelque autre point de la ligne LKN parallèle à l'axe, il en résultera toujours le même angle de rotation, puisque la quantité p conserve toujours la même valeur.

PROPOSITION XXI.

(171.) Si l'on faisoit varier le centre des puissances, de manière qu'il sortît de la ligne, ou plan GA , qui, passant par le centre des masses, est perpendiculaire au plan directeur HI , le système ne tourneroit pas alors sur l'axe fixe HI , mais sur un autre axe qui, passant par le centre de gravité, seroit perpendiculaire à un plan parallèle aux directions des puissances, & passant par le centre des masses & par celui des puissances.

Supposons que les directions des puissances sont perpendiculaires au plan du papier sur lequel la figure est tracée, & que leur centre se trouve en O . Soit imaginé le plan GO , parallèle aux directions ; & par le centre G soit élevé la perpendiculaire GQ sur ce plan, cette perpendiculaire sera l'axe fixe sur lequel le système fera sa rotation. Car supposons que le système puisse aussi tourner sur la

plus le produit de chaque corps par le carré de sa distance au centre des masses qui composent le système, comme notre Auteur les a définis d'après *Léonard Euler*, & comme il les avoit employés avant cet article ; mais ces moments expriment le produit de chaque corps par le carré de sa distance à l'axe de rotation. Cette dernière définition revient à la première, lorsque les corps sont dans un même plan.

ligne GO ; dans ce cas , les produits des puissances situées de part & d'autre du plan GO , par leurs distances perpendiculaires au même plan , doivent former le numérateur de l'expression de l'angle de rotation ; mais la somme de ces produits est égale à zéro : donc le système ne peut tourner sur la ligne GO , & par conséquent la ligne QT ne peut non plus tourner sur GO . Donc QT sera l'axe fixe sur lequel le système doit tourner. *

COROLLAIRE I.

(172.) Si l'on fait passer par GGT un plan parallèle aux directions des puissances , ce plan sera le plan directeur (167.) ; p exprimera la perpendiculaire abaissée du centre O des puissances sur le plan directeur GGT (168.) ; & GO sera le plan de rotation qui , passant par le centre G des masses , & par celui O des puissances , est parallèle aux directions de celles-ci (163.).

COROLLAIRE II.

(173.) Comme un corps fini quelconque peut être conçu divisé en une infinité d'autres corps infiniment petits , & unis entre eux par la nature , il s'ensuit que l'angle de rotation produit pendant la différencielle de temps dt , autour d'un axe , par un nombre quelconque de puissances qui agissent sur un corps dans des directions parallèles , sera
$$= \frac{ds p ds}{s} = \frac{P ds^2 ds \sin \Sigma}{s}$$
 : en marquant par P la distance du centre des puissances à l'axe de rotation ; & par Σ l'angle que forme la ligne qui mesure cette distance , avec le plan directeur.

COROLLAIRE III.

(174.) Si l'un des corps est infini , ce corps restera fixe (141.) , & son centre de gravité concourra avec le centre de gravité du système. Le système tournera alors autour de ce corps , ou sur un axe fixe qui , passant par son centre de gravité , sera perpendiculaire à un plan parallèle aux directions , & qui passe par ce point fixe , & par le centre des puissances.

COROLLAIRE IV.

(175.) L'expression de l'angle de rotation sera dans ce cas , comme

* Ceci paroît d'ailleurs évident , si l'on considère que le point O étant , par l'hypothèse , le centre des puissances , & que le système devant tourner sur son centre de gravité G , (Voyez les *Artic. 129*) & suiv. & particulièrement la troisième note de l'Article 129 : le plan GO parallèle aux directions des puissances , & dans lequel se trouve leur résultante , sera nécessairement le plan de rotation. Par conséquent toutes les parties du système décriront des arcs parallèles à ce plan GO . Donc le système tournera sur un axe perpendiculaire à ce plan , c'est-à-dire , sur la ligne QT .

ci-dessus, $= \frac{dtfaadt+dtfbadt+dtgc...+dtfcadt}{A^2.A+B^2.B+gc...+E^2.E}$; expression qui se réduit, le corps E étant infini, à $\frac{dtfaadt+dtfbadt+dtgc...}{A^2.A+B^2.B+gc...} * = \frac{dtfpdt}{S} = \frac{Pdtf \sin x}{S}$.

S C O L I E.

(176.) Dans ce cas, le centre de gravité du système est dans l'axe fixe: les distances $A', B', C', &c.$ sont celles des corps au même axe fixe; $a, b, c, &c.$ & p sont les perpendiculaires abaissées des puissances & de leur centre sur le plan directeur, lequel coïncide avec le même axe fixe; P est la distance perpendiculaire du centre des puissances à l'axe; π la somme de toutes les puissances; & S la somme des produits des corps, ou masses, par le carré de leurs distances perpendiculaires au même axe fixe.

L E M M E III.

(177.) Si l'on appelle Z la somme des produits des corps, ou masses, par le carré de leurs distances respectives à un axe qui passe par leur centre de masse, & qui soit en même temps parallèle à celui qui passe par le point fixe; & si de plus on appelle G la distance du même centre des masses à l'axe fixe, on aura $S = G^2 M + Z$.

Fig. 13:

Car soit $IKLN$ un corps qu'on peut regarder comme un système de corps liés entre eux; H son centre de gravité; O l'axe fixe perpendiculaire au plan de rotation, que nous supposerons être le même que celui de la figure; & Q un petit poids, un corpuscule, ou une petite ligne perpendiculaire au plan de rotation, ou parallèle aux axes. Cela posé, le carré de OQ , distance perpendiculaire du corpuscule Q à l'axe fixe O est égal à la somme des carrés de $OH = G$, & de HQ ; plus à deux rectangles de OH par HT . La même chose aura lieu pour chacun des corpuscules dont le corps est composé. Donc la somme des produits de chaque corpuscule, ou masse élémentaire, par le carré de sa distance perpendiculaire à l'axe fixe O , sera $= G^2 M + HQ^2. Q + 2GfHT. Q$; c'est-à-dire que $S = G^2 M + Z + 2GfHT. Q$. Mais $fHT. Q$ est la somme des pro-

* Cela est évident; car, par le Corollaire précédent, la distance E' , ainsi que la perpendiculaire e sont chacune égales à zéro.

On voit encore, par ces deux Corollaires, qu'on peut regarder le point fixe sur lequel un système de corps est assujéti à tourner, comme le centre de gravité d'un autre système qui auroit un corps de plus; ce corps additionnel étant supposé infini à l'égard de la somme des autres, & placé sur le point fixe. On voit, par ces formules, que la considération de ce corps infini est inutile relativement à l'angle de rotation, qui par conséquent sera le même dans les deux systèmes. Dans ce cas, comme dans tous les autres, les moments d'inertie sont le produit de chaque corps par le carré de la distance à l'axe fixe. Cette note est analogue à celle de l'Article 142.

duits des corpuscules, ou masses, par leurs distances au plan directeur YX ; & cette somme est égale (120.) au produit de la masse totale M , par la distance du centre des masses H au plan YX , laquelle distance est zéro : donc $\int HT. Q = 0$, & par conséquent $G^2 M + Z = S$.

PLANC. I.

COROLLAIRE I.

(178.) En substituant cette valeur de S dans les expressions de l'angle de rotation, elles deviendront dans le cas d'un axe fixe

$$= \frac{\int (ds p \, ds)}{G^2 M + Z} = \frac{P \int (ds^2 \, ds \, \sin \Sigma)}{G^2 M + Z}.$$

COROLLAIRE II.

(179.) Lorsque $G = 0$; c'est-à-dire, lorsque l'axe fixe passe par le centre des masses, ou que le système tourne sur son centre de masse, on a $S = Z$; dans ce cas, les expressions ci-dessus se réduisent à celles qu'on a données dans les Art. 157 & 158. Donc le système, ou le corps, étant libre, sa rotation se fait de la même manière que s'il tournoit sur son centre de masse supposé fixe; c'est ce qui a déjà été démontré, Art. 159.

COROLLAIRE III.

(180.) Quand le centre des puissances coïncide avec celui des masses, comme il arrive dans les corps pesants, lorsqu'ils descendent par la seule action de la gravité, on a $G = P$. Donc, dans ce cas, l'angle de rotation sur un axe fixe sera $= \frac{\int (ds p \, ds)}{P^2 M + Z} = \frac{P \int (ds^2 \, ds \, \sin \Sigma)}{P^2 M + Z}$.

PROPOSITION XXII.

(181.) *Le centre de gravité dans les corps pesants qui descendent par la seule action de la gravité, en tournant autour d'un point, ou axe fixe, ne peut parvenir au repos qu'en descendant le plus bas qu'il est possible.*

Soit $ABCD$ un corps pesant, qui doit tourner librement autour de l'axe E , par la seule action de la gravité. Soit G le centre de gravité du corps, HO un plan horizontal, & FI un plan vertical, qui passent par l'axe fixe E . Ayant tiré la ligne EG perpendiculaire à l'axe, elle sera $= P$, & l'angle $GEI = \Sigma$. Le seul cas où le corps peut rester sans mouvement, est sans contredire celui dans lequel, au commencement de l'action, la différentielle $\frac{P \, ds^2 \, ds \, \sin \Sigma}{P^2 M + Z}$ de l'angle de rotation est égale à zéro. Mais quelle que soit la situation du corps, cette quantité ne peut être zéro que lorsque $P \sin \Sigma = GK = 0$, ou lorsque $\Sigma = 0$. Donc il faut que le corps parvienne à cette si-

FIG. 14.

PLANC. I.

tuation pour pouvoir s'arrêter, ou rester en repos. Or cette situation ne peut avoir lieu que lorsque le corps parvient au point où la perpendiculaire $GN = P \cos \Sigma$ a la plus grande valeur, ou est un *maximum*; car, en différenciant, on a pour ce cas $P d\Sigma \sin \Sigma = 0$, qui donne $P \sin \Sigma = 0$. Donc un corps ne peut rester en repos que lorsque son centre de gravité G est parvenu à sa plus grande distance du plan horisontal HO , ou, ce qui revient au même, que lorsqu'il est descendu le plus bas qu'il est possible.

DES PENDULES.

DÉFINITION XXVIII.

(182.) On appelle *Pendule simple* un corps infiniment petit, ou entièrement réuni dans un point A suspendu à un fil infiniment mince, ou à une ligne inflexible AC .

DÉFINITION XXIX.

Fig. 15.

(183.) Le point C étant fixe, si l'on éloigne le corps A de la verticale CB , comme en CA , & qu'ensuite on l'abandonne à lui-même, le pendule se meut en vertu de la gravité qui est la puissance qui l'anime, & va jusqu'en Ca ; ensuite il revient de nouveau en CA , & ainsi continuellement. Chacune de ces allées & venues s'appelle une *Oscillation*.

COROLLAIRE I.

(184.) Comme il n'y a qu'un seul corps dans ce système, ou pendule simple, & qu'une seule puissance qui l'anime, toutes les quantités qui entrent dans l'expression de l'angle de rotation doivent, dans ce cas, être égales à zéro, excepté une: par conséquent l'angle de rotation du pendule simple $= \frac{dt \sin \alpha dt}{A' \cdot A} = \frac{P dt \sin \alpha dt}{A' \cdot A}$, ou à cause que $P = A' = CA$, $= \frac{dt \sin \alpha dt}{CA \cdot A}$.

COROLLAIRE II.

(185.) Comme la puissance α est constante dans les corps qui tombent par l'action de la gravité; & qu'on a $(50.) \frac{1}{A} = \xi$, il s'ensuit que l'angle de rotation du pendule simple sera $= \frac{\xi dt \sin \alpha dt}{CA}$; Σ marquant l'angle BCA que forme le pendule simple avec la verticale CB , à quelque instant que ce soit de son oscillation; de sorte que l'angle total, ou l'oscillation entière sera $= 2 \Sigma = \frac{\xi}{CA} \int (dt \sin \alpha dt)$.

DÉFINITION

DÉFINITION XXX.

PLANC. 2.

(186.) On appelle *Pendule composé* tout autre pendule dans lequel le corps, ou le fil, a quelque volume, ou qui est composé de plusieurs corps unis entre eux, comme *A & B*.

FIG. 16
& 17.

COROLLAIRE I.

(187.) L'angle de rotation du pendule composé est (180.)

$$= \frac{Pf(\frac{ds}{dt} \frac{ds}{dt} \sin \Sigma)}{P^2 M + Z} : \text{ou, à cause que } \pi \text{ est constant, \& que } \frac{Z}{M} = \xi(50.),$$

$$= \frac{P\xi M f(\frac{ds}{dt} \frac{ds}{dt} \sin \Sigma)}{P^2 M + Z}.$$

COROLLAIRE II.

(188.) Si un pendule simple & un pendule composé font leurs oscillations dans le même temps, & si ces oscillations sont d'ailleurs égales; c'est-à-dire, si l'angle Σ de l'une est toujours égal à l'angle Σ de l'autre, on aura $\frac{\xi f(\frac{ds}{dt} \frac{ds}{dt} \sin \Sigma)}{CA} = \frac{P\xi M f(\frac{ds}{dt} \frac{ds}{dt} \sin \Sigma)}{P^2 M + Z}$, ou à cause que la quantité $\xi f(\frac{ds}{dt} \frac{ds}{dt} \sin \Sigma)$, qui se trouve dans l'un & dans l'autre membre de l'équation, est la même de part & d'autre, par les conditions du problème, on aura, en réduisant, $\frac{1}{CA} = \frac{PM}{P^2 M + Z}$; expression qui donne la longueur du pendule simple isochrone au pendule composé; c'est-à-dire, $CA = \frac{P^2 M + Z}{PM} = P + \frac{Z}{PM}$.

COROLLAIRE III.

(189.) Substituant en place de $P^2 M + Z$ son égale S , la longueur CA du pendule simple isochrone au pendule composé sera $= \frac{S}{PM}$.

DÉFINITION XXXI.

(190.) Si, dans un pendule composé, on prend, dans la ligne qui joint le centre de gravité & l'axe fixe, un point qui soit éloigné de l'axe fixe de toute la longueur du pendule simple, dont les oscillations sont de la même grandeur & de la même durée que celles du pendule composé, ce point est ce qu'on appelle *Centre d'oscillation*.

COROLLAIRE I.

(191.) Le centre d'oscillation sera donc éloigné du centre de gravité, de la quantité $\frac{Z}{IM} = P + \frac{Z}{PM} - P$, qui est la différence entre les distances du centre d'oscillation & du centre de gravité à l'axe, ou au point fixe.

TOME I.

O

(192.) Le centre d'oscillation est donc toujours plus éloigné de l'axe fixe, que le centre de gravité, puisqu'on a $P + \frac{Z}{PM} > P$.

PROPOSITION XXXII.

(193.) La longueur du pendule simple isochrone est aussi
$$= \frac{(A'A + B'B + C'C + \&c.) \sin \Sigma}{A'A \sin \alpha + B'B \sin \beta + C'C \sin \gamma + \&c.}; \Sigma$$
 marquant l'angle DCG que forme la verticale CD, ou le plan vertical perpendiculaire aux directions, avec la ligne CG, qui passe par le centre de gravité G; & $\alpha, \beta, \gamma, \&c.$, les angles DCA, DCB, &c. que forme la même verticale, ou le même plan, avec les lignes tirées du point fixe C à chacun des corps dont est composé le pendule.

Car $P \sin \Sigma = p$ (158.), ou $P = \frac{p}{\sin \Sigma}$, en substituant cette valeur dans la formule de l'Art. 189, on aura la longueur du pendule simple isochrone $= \frac{S \sin \Sigma}{PM}$. Mettant dans cette expression, pour S, sa valeur $A'A + B'B + C'C + \&c.$, & pour PM sa valeur $A'A \sin \alpha + B'B \sin \beta + C'C \sin \gamma + \&c.$, la longueur du pendule simple isochrone sera $= \frac{(A'A + B'B + C'C + \&c.) \sin \Sigma}{A'A \sin \alpha + B'B \sin \beta + C'C \sin \gamma + \&c.}$.

COROLLAIRE.

(194.) Si tous les angles $\alpha, \beta, \gamma, \&c.$ sont égaux; c'est-à-dire, si tous les corps A, B, &c. sont dans une même ligne, ou plan BAC, qui passe par le point, ou axe fixe, C; & si chacun de ces corps en particulier peut être regardé comme réuni en un seul point de la même ligne, ou du plan, le numérateur & le dénominateur de l'expression pourront alors se diviser par le même sinus, & la longueur du pendule simple deviendra, pour ce cas, $= \frac{A'A + B'B + C'C + \&c.}{A'A + B'B + C'C + \&c.}$.

S C O L I E.

(195.) Cette formule que beaucoup d'Auteurs ont donnée comme générale, n'est certaine que dans le cas ci-dessus: dans tous les autres, où les corps qui composent le pendule ne seroient pas réunis dans une ligne qui passât par le point fixe, elle est tout-à-fait sans fondement.

DES LEVIERS.

DÉFINITION XXXII.

(196.) Lorsque deux puissances α & β agissent dans les directions

AD, BE, sur un corps inflexible *AB*, appuyé, ou fixé en *C*, cette espece d'instrument, ou corps inflexible s'appelle un *Levier*; & le point *C* sur lequel il est fixé, s'appelle *Point d'appui*, ou *Hypomochlion*.

PLANC. I.

FIG. 18.
19 & 20.

DÉFINITION XXXIII.

(197.) Lorsque l'hypomochlion est entre les deux puissances appliquées en *A* & *B*, on l'appelle *Levier de la premiere espece*. Si l'hypomochlion est à l'une des extrémités, la puissance β étant appliquée en *B*, c'est-à-dire, la plus éloignée de l'hypomochlion, tandis que l'autre puissance α , qu'elle est destinée à vaincre, est appliquée en *A*, c'est-à-dire, plus proche du point d'appui, ce levier s'appelle *Levier de la seconde espece*. Enfin si l'hypomochlion étant toujours à l'une des extrémités, la puissance β en est plus proche que la puissance α qu'elle est destinée à vaincre, on l'appelle *Levier de la troisieme espece*.

FIG. 18.

FIG. 19.

FIG. 20.

COROLLAIRE I.

(198.) L'angle *CAD* étant supposé $=\Sigma$, & l'angle *CBE* $=\sigma$, l'angle de rotation produit pendant la différencielle de temps *dt*, sera généralement dans les leviers $= \frac{dfdt(CB.\beta \sin \sigma - CA.\alpha \sin \Sigma)}{S}$ (129); *S* marquant la somme de tous les moments d'inertie, ou de tous les produits de chaque particule des masses mises en mouvement par le quarré de la distance au point fixe *C*.

COROLLAIRE II.

(199.) Puisque *CB. sin σ* = la perpendiculaire *CF*; & que *CA. sin Σ* = la perpendiculaire *CG*, l'angle de rotation produit pendant la différencielle de temps *dt* sera aussi $= \frac{dfdt(CF.\beta - CG.\alpha)}{S}$.

COROLLAIRE III.

(200.) Il suit de là que plus la perpendiculaire *CF* sera grande à l'égard de la perpendiculaire *CG*, moins il faudra que la puissance β destinée à vaincre la puissance α , soit considérable. Ce sera la même chose, plus la perpendiculaire *CG* sera petite à l'égard de la perpendiculaire *CF*.

COROLLAIRE IV.

(201.) Il convient donc que la direction *BE* soit perpendiculaire à la longueur du levier, afin que *CF* parvienne à la plus grande valeur qu'elle puisse avoir.

COROLLAIRE V.

(202.) Il convient encore que la matière dont le levier est composé ait le moins de densité qu'il est possible, ou que les efforts qu'il doit soutenir peuvent le permettre; parce qu'alors la masse étant la moindre qu'il est possible, les quantités qui forment le dénominateur, se trouvent diminuées le plus qu'il est possible; ce qui augmente la valeur de l'angle de rotation.

COROLLAIRE VI.

(203.) Si, dès le commencement de l'action des puissances, on avoit $CB.\beta \sin \sigma = CA.a \sin \Sigma$, ou $CF.\beta = CG.a$, l'angle de rotation seroit égal à zéro, & le levier resteroit sans mouvement, c'est-à-dire, en équilibre.

COROLLAIRE VII.

(204.) Ce qu'on vient de dire de deux puissances, doit s'entendre d'un nombre quelconque de puissances qu'on appliqueroit au levier; car on a vu dans l'Art. 104, que $p\pi = aa + bb + cc + dd + ee$. & par conséquent la somme des moments de toutes ces puissances produit le même effet qu'une seule puissance π placée à la distance p de l'hypomochlion.

COROLLAIRE VIII.

(205.) L'angle de rotation dans le levier pouvant s'exprimer généralement par $\frac{ds \cdot v dt}{S}$, π exprimant une puissance quelconque qui agit à la distance p de l'hypomochlion; & de même par $\frac{u dt}{p}$ (131.), en supposant que u représente la vitesse du point auquel la puissance est appliquée: on aura par conséquent $\frac{ds \cdot v dt}{S} = \frac{u dt}{p}$; d'où l'on tire, en divisant par dt , & en différenciant, $p^2 \pi dt = S du$; ce qui donne la puissance $\pi = \frac{S du}{p^2 dt}$.

COROLLAIRE IX.

(206.) Lorsqu'un levier tourne sur un point quelconque, l'action qu'il éprouve est proportionnelle à Sdu , c'est-à-dire que cette action est en raison composée de la somme S des moments d'inertie, & de la différentielle du .

COROLLAIRE X.

(207.) Puisque l'angle de rotation, ou la vitesse angulaire est $= \frac{u dt}{p}$, la différentielle du sera proportionnelle à la différentielle

de la vitesse angulaire; par conséquent l'action que souffre le levier sera en raison composée de la somme Σ des moments d'inertie, & de la différentielle de la vitesse angulaire.

PLANC. I.

SCOLIE I.

(208.) Lorsqu'un levier est fixé par un quelconque de ses points, sans avoir la liberté de tourner sur ce point, on doit considérer ce point comme l'*hypomochlion*, ou l'appui sur lequel le levier tend à tourner; mais comme, par l'hypothèse, il ne tourne pas, il faut qu'il y ait équilibre entre les moments (138): d'où l'on voit, que si tous les moments des forces qu'on a employées sont positifs, il faut nécessairement qu'il y en ait d'autres qui soient négatifs. Ces moments négatifs trouvent leur existence dans la masse même du levier, dans ses fibres qui agissent dans une direction contraire, en vertu de leurs forces d'attraction, de cohésion, ou d'une nature quelconque, comme l'expérience le fait voir. Ainsi, si des puissances quelconques agissoient sur le levier CA fixe sur sa base $KEDG$, de manière que leurs efforts réunis tendissent à le faire tourner sur l'axe GE , toutes les fibres, ou tous les points de la même base résisteroient, & le moment de chacune de ces fibres seroit la force effective qu'elle exerce, multipliée par sa distance perpendiculaire à l'axe EG . Si nous appellons donc f cette force effective de chaque fibre, & $a, b, c, d, \&c.$ les différentes distances perpendiculaires respectives des fibres à l'axe EG , on aura le moment de la résistance des fibres $= f(a+b+c+d+\&c.)$: donc, par la supposition que le levier ne peut pas tourner, on aura $p\pi = f(a+b+c+d+\&c.)$, ou $f = \frac{p\pi}{a+b+c+d+\&c.}$; π désignant la puissance qui agit sur le levier, & p la distance perpendiculaire de l'axe EG à la direction de cette même puissance.

FIG. III.

On observera que, dans ce cas, la lettre f ne désigne pas seulement l'intensité de la force absolue de chaque fibre, mais le produit de cette force, par l'amplitude, ou l'aire de la fibre. Supposant donc $CB = x$, & FH parallèle à l'axe $= y$, l'aire de la fibre sera $= dydx$; & si nous représentons par f l'intensité qui en résulte, la force de chaque fibre sera $= fdydx$: par conséquent toute la force de la différentielle HI sera $= fydx$, & son moment $= fyx dx$. Donc, dans le cas où le levier ne tourne pas, on aura $\int fyx dx = p\pi$, ou $f = \frac{p\pi}{\int yx dx}$; bien entendu que dans l'expression $fyx dx$ on renferme non seulement les moments positifs des fibres du segment

GDE, mais aussi les moments du segment *GKE* qui agissent aussi positivement, & résistent également à la rotation, quoique dans celui-ci les x soient négatives; parce que les forces $fydx$ des fibres sont en même temps négatives: car il est facile de voir que dans ce segment, les fibres se compriment, au lieu qu'elles se dilatent, ou tendent à se dilater dans l'autre segment. Les moments de chacun de ces segments sont égaux (103.) au produit de leur surface, par l'intensité f de la force des fibres, & par la distance de leur centre de gravité à l'axe *GE*. Donc si nous supposons la surface $GDE = A^2$, la surface $GKE = a^2$, la distance du centre de gravité de la première à l'axe $= K$, & celle de la seconde au même axe $= k$, on aura $fydx = KA^2 + ka^2$, & par conséquent $f = \frac{P^2}{KA^2 + ka^2}$.

COROLLAIRE XI.

(209.) On doit entendre la même chose, quoique le levier tourne sur un point quelconque; car quelle que soit l'action à laquelle il est soumis, l'effet de cette action doit nécessairement se manifester en quelque section comme *KD*.

COROLLAIRE XII.

(210.) On a vu (205.) que, dans la rotation du levier, on a $\pi = \frac{Sdu}{p^2 d\alpha}$; on aura donc aussi, dans ce cas, $f = \frac{Sdu}{p d\alpha (KA^2 + ka^2)}$; c'est-à-dire que l'action qui résulte sur les fibres, est comme *Sdu*, ou comme le produit de la somme *S* des moments d'inertie, par la différentielle de la vitesse angulaire.

COROLLAIRE XIII.

(211.) Si l'intensité totale, ou la force effective des fibres qui composent le levier, est plus grande que $\frac{P^2}{KA^2 + ka^2}$, ou que $\frac{Sdu}{p d\alpha (KA^2 + ka^2)}$, le levier résistera; mais il se rompra, si cette force est plus petite.

COROLLAIRE XIV.

(212.) Si l'on suppose que la base *KGDEK* augmente proportionnellement dans toutes ses dimensions linéaires, la quantité $KA^2 + ka^2$ sera comme $L^2 l^2$, *L* exprimant le diamètre *KD*, & *l* celui qui

* On peut aisément se rendre raison de ceci. Si l'on représente par L' & l' les dimensions linéaires homologues dans une autre base semblable à *KGDEK*, il est évident que les produits, ou moments correspondants KA'^2 , $K'A'^2$, donneront cette proportion $KA'^2 : K'A'^2 :: K^2 : K'^2$ (représentant les parties homologues des deux bases, par les mêmes lettres accentuées), ou

lui est perpendiculaire. Nous pourrions donc faire $KA^1 + ka^1 = nL^1l$, n désignant un nombre quelconque ; ce qui donnera $f = \frac{P\pi}{nL^1l}$, ou $f = \frac{Sdu}{pdt(nL^1l)}$.

COROLLAIRE XV.

(213.) Si l'on suppose dans un levier $f = \frac{P\pi}{nL^1l}$, & dans un autre $F = \frac{P\phi}{nL^1l'}$, on aura $f : F :: \frac{P\pi}{L^1l} : \frac{P\phi}{L^1l'}$.

COROLLAIRE XVI.

(214.) Si les leviers sont d'une même matière, on aura $f = F$, & $\frac{P\pi}{L^1l} = \frac{P\phi}{L^1l'}$: d'où il suit que les forces π & ϕ que ces leviers pourront supporter, seront entre elles comme $\frac{P}{L^1l}$ est à $\frac{P}{L^1l'}$, ou comme $\frac{L^1l'}{P}$ est à $\frac{L^1l}{P}$; c'est-à-dire, en raison directe de L^1l' , & en raison inverse de P ; ou en raison directe de $KA^1 + ka^1$, & en raison inverse de p .

COROLLAIRE XVII.

(215.) Ce qu'on vient de dire de la section KD , doit s'entendre d'une autre section quelconque, comme LM . L'intensité de la force des fibres, dans cette dernière section, sera pareillement $F = \frac{P\phi}{K'A^1 + k'a^1} = \frac{P\phi}{nL^1l'}$, avec la seule différence que, dans ce cas, P marque la distance de l'axe situé dans la section LM , à la direction de la puissance. Donc si nous supposons l'intensité de la force des fibres en $KD = f = \frac{P\pi}{nL^1l}$, & l'intensité en $LM = F = \frac{P\phi}{nL^1l'}$, comme ces deux intensités F & f sont égales lorsqu'il s'agit d'un levier homogène, nous aurons $\frac{P\pi}{L^1l} = \frac{P\phi}{L^1l'}$, ou $\pi : \phi :: PL^1l : pL^1l'$: ainsi, pour qu'un levier soit capable d'une même résistance dans tous ses points, ou dans toutes ses distances de la base, ou pour qu'il puisse supporter avec une égale force l'action de la même puissance $\phi = \pi$, on doit avoir $PL^1l = pL^1l'$, ou $L^1l : L^1l' :: p : P$; c'est-à-dire que les dimensions linéaires du levier, dans ses différents points, ou dans ses différentes sections, telles que KD , LM , doivent être comme

$:: L^1l : L^1l'$. Il en sera de même des produits, ou moments ka^1 , $k'a^1$; donc $KA^1 : K'A^1 :: ka^1 : k'a^1$, & par conséquent $KA^1 + ka^1 : K'A^1 + k'a^1 :: KA^1 : K'A^1$, ou $L^1l : L^1l'$, ou enfin $:: L^1l : L^1l'$. Mais à cause de la similitude des bases, on a $L^1l : L^1l' :: l : l'$; donc $L^1l : L^1l' :: L^1l : L^1l'$; par conséquent $KA^1 + ka^1 : K'A^1 + k'a^1 :: L^1l : L^1l'$. Donc, &c.

les racines cubiques de leurs distances à la direction de la puissance. *

COROLLAIRE XVIII.

(216.) Il suit de là que, pour que le levier soit également fort dans tous ses points, il doit avoir la forme d'un conoïde, dont les côtés KL & DM , soient des paraboles du second genre. Car, en supposant que y soit une des dimensions linéaires des sections KD, LM , x la distance de ces sections à la direction de la puissance, & que Q représente le paramètre de la parabole, on doit avoir constamment $y^3 = Q^2 x$, pour que le levier soit capable de la même résistance dans tous ses points. **

COROLLAIRE XIX.

(217.) Si, au lieu d'une seule puissance π agissante sur le levier, il y en avoit plusieurs qui fussent égales entre elles, & également distribuées sur sa longueur, il est évident que la somme des moments qu'elles exerceront à l'égard d'une section quelconque, comme les sections KD, LM , sera $= \frac{1}{2} x^2 a$; a exprimant une quelconque de ces puissances égales. Donc, pour que des leviers homogènes soient, dans la supposition actuelle, d'une égale force dans tous leurs points, il faut que la quantité $\frac{x^2 a}{y^3}$ soit constante; c'est-à-dire qu'on doit avoir $y^3 = Qx^2$; équation à une parabole du second genre, mais d'une espèce différente de celle du Corollaire précédent. ***

* Cette conséquence est évidente, d'après tout ce qu'on vient de dire, & particulièrement d'après la note de l'Art. 212 : car on a vu que $L^2 l : L'^2 l' :: L^3 : L'^3 :: l^3 : l'^3$; donc, en substituant, $L^3 : L'^3$, ou $l^3 : l'^3 :: p : P$, d'où l'on tire $L : L' :: l : l' :: \sqrt[3]{p} : \sqrt[3]{P}$.

** Pour rendre cette vérité plus sensible, supposons que y représentant une des dimensions linéaires de la section KD , y' représente une dimension homologue de la section LM ; & que x marquant la distance de la première section à la direction de la puissance, x' marque la distance de la seconde à la même direction : on aura, par le Corollaire précédent, $y^3 : y'^3 :: x : x'$. Donc si Q^2 est tel qu'en multipliant x , on ait $y^3 = Q^2 x$, on aura aussi $y'^3 = Q^2 x'$. Donc en général $y^3 = Q^2 x$, équation à la parabole du second genre; dont Q est le paramètre.

*** Quoique ce Corollaire soit une suite nécessaire de ce qui a été dit dans les deux précédents & dans leurs notes, nous allons cependant le développer davantage en faveur des commençants. Soit x la distance de la section KD à l'extrémité du levier; puisqu'on suppose sur tous les points du levier des puissances égales a , qui agissent dans des directions parallèles pour en opérer la rupture, il est évident que la somme des moments de ces puissances à l'égard de la section KD sera égale au moment de leur résultante. Mais cette résultante est égale à la somme ax de toutes les puissances; & sa distance à la section KD $= \frac{1}{2} x$, donc son moment $= \frac{1}{2} ax^2$. Marquant également par x' la distance de la section LM à l'extrémité du levier, on aura $\frac{1}{2} a' x'^2$ pour la somme des moments de puissances à l'égard de cette section.

Ceci posé, si l'on met ces moments à la place de p & de P (215), on aura $\frac{\frac{1}{2} ax^2}{L^2 l} = \frac{\frac{1}{2} a' x'^2}{L'^2 l'}$,

SCOLIE

SCOLIE II.

(218.) La situation de l'axe GE peut varier, c'est-à-dire que cet axe peut être plus ou moins éloigné du centre de la base $KGDEK$. Cela dépend de la figure de cette base, de la qualité de la matière dont le levier est composé, de la disposition dans laquelle il est assujéti, & enfin de la direction de la puissance qui agit sur lui. Cette situation de l'axe peut être plus ou moins avantageuse, ou donner au levier plus ou moins d'avantage pour résister. Supposons que l'axe GE puisse se placer plus voisin de l'extrémité K de la quantité z : dans ce cas, les moments du segment GDE seront $= \iint ydx (x+z)$; & ceux du segment $GKE = \iint ydx (x-z)$; c'est-à-dire que les premiers seront $= \iint yxdx + \iint yzdx$, & les seconds $= \iint yxdx - \iint yzdx$. Or, la somme de ces moments est plus grande que celle que nous avons eue pour le premier cas, dans lequel $z=0$, de la quantité $\iint yzdx - \iint yzdx$: c'est-à-dire, de fz . aire $GDE - fz$. aire GKE ; & cette quantité sera plus ou moins grande, selon la valeur de z . Donc plus z sera grand, plus $KA^2 + ka^2$, ou son égal nL^2 le sera aussi, & par conséquent plus la valeur de $f = \frac{P}{KA^2 + ka^2} = \frac{P}{nL^2}$ sera petite. Donc les fibres auront besoin de moins de force pour résister, ou, ce qui revient au même, elles résisteront davantage à un égal degré de force. Donc plus z sera grand, ou plus l'axe sera éloigné du point par lequel passe un axe qui divise la base $KGDEK$ en deux parties égales, plus le levier sera capable de résistance.

SCOLIE III.

(219.) On a supposé dans tout ce qu'on vient de dire, que la force des fibres, dans la section GKE , est égale à celle qui a lieu dans l'autre section GDE ; mais, comme dans la première de ces sections, les fibres résistent à leur compression, & que dans la seconde elles résistent à leur dilatation, il n'y a aucune certitude que ces deux espèces de résistances soient égales dans la nature. Cependant on peut les supposer ainsi, jusqu'à ce que l'expérience nous fasse con-

dans tous les points d'un levier homogène qu'on suppose capable d'une égale résistance. x & y représentant des dimensions linéaires homologues dans les deux sections, les quantités L^2 & L'^2 , qui sont proportionnelles à L^2 & L'^2 , sont aussi proportionnelles à y & y' ; donc $\frac{\frac{1}{2}x^2x}{y^3} = \frac{\frac{1}{2}x'^2x'}{y'^3}$, c'est-à-dire que $\frac{\frac{1}{2}x^2x}{y^3}$ est une quantité constante. Si l'on fait cette quantité $= m$, on aura $y^3 = \frac{x}{2m} \cdot x^2$, ou $y^3 = Qx^2$, en faisant $\frac{x}{2m} = Q$; équation à la parabole cubique.

TOMES I.

P.

noître la véritable loi suivant laquelle les fibres exercent leurs forces de résistance.

CHAPITRE V.

De l'axe & du rayon de Rotation.

DÉFINITION XXXIV.

(220.) **O**N appelle *Axe de Rotation* la ligne fixe dans un système de corps, sur laquelle tournent tous les corps qui le composent, en décrivant de petits arcs de cercle, quand même ce ne seroit que dans un instant, ou une différentielle de temps. La distance perpendiculaire du centre de gravité du système à cet axe, s'appelle *Rayon de Rotation*.

PROPOSITION XXIV.

(221.) *Trouver l'axe de rotation, ou le point sur lequel tourne un système.*

Soit un système libre composé d'un nombre quelconque de corps unis entre eux par des lignes inflexibles, lequel tourne dans le plan de la Figure; soit de plus C le centre de gravité du système qu'on suppose avoir parcouru, suivant la direction CI , l'espace CD , dans un instant, ou différentielle de temps. Supposant encore qu'un corps quelconque A passe de A en B dans le même instant, soit tiré les lignes ACE , BDE , prolongées jusqu'à ce qu'elles se coupent en E , l'angle AEB sera l'angle de rotation décrit par le système dans le même instant, ou différentielle de temps. (Voyez la note *** de l'Article 129). Soit pris $EH = ED$, & soit mené la ligne DH , ensuite par le point F qui divise la ligne CD en deux parties égales, soit élevé la perpendiculaire FG , & en faisant l'angle $CDG = EDH$, le point G sera celui où se trouve l'axe sur lequel tourne tout le système dans l'instant, ou la différentielle de temps, que le centre de gravité a employé à passer de C en D .

Les triangles HED , CGD , sont semblables par la construction, & par conséquent l'angle $HED = CGD$. L'angle $ACI = BDI + HED = BDI + CGD$, & l'angle $IDG = DCG + CGD$. En sommant ces deux égalités, on a $ACI + DCG + CGD = BDI + CGD + IDG$; c'est-à-dire, $ACI + DCG = BDI + IDG$, ou $ACG = BDG$: de sorte que, si, donnant un petit mouvement au système, on fait tomber C

sur D , & A sur B ; & la ligne AC sur BD , à cause des angles égaux ACG & BDG , la ligne CG tombera sur la ligne DG , & le point G sera demeuré immobile pendant le mouvement. De plus, les triangles ACG , BDG , étant semblables & égaux, donnent $AG=BG$, & par conséquent le corps A aura décrit, dans l'instant, ou la différentielle de temps, le petit arc AB , dont le rayon est AG .

On démontrera la même chose de tout autre corps du système: donc le point G , où le plan directeur est rencontré par la perpendiculaire FG à la direction CI , & menée du centre de gravité, sera celui où passe l'axe de rotation.

COROLLAIRE I.

(222.) A mesure que le centre de gravité passe d'un lieu à un autre, l'axe de rotation varie, & il ne peut être fixe, à moins que le centre de gravité ne le soit aussi; & dans ce cas, tout le système tourne sur un axe qui passe par ce centre.

COROLLAIRE II.

(223.) Donc il n'y a point d'axe fixe dans le système, si ce n'est pour un instant, ou différentielle de temps, lorsqu'il ne tourne pas sur celui qui passe par le centre de gravité.

PROPOSITION XXV.

(224.) Chacune des lignes DG , CG , ou le rayon de rotation, est

$$= \frac{S \dot{r} dt}{PM \dot{r} dt \sin \Sigma}.$$

Car l'angle $CGD = \frac{CD}{CG}$ (129, note ***) est égal à AED (221.), qui est l'angle de rotation; donc $\frac{CD}{CG} = \frac{P dt \dot{r} dt \sin \Sigma}{S}$. Substituant, dans cette équation, pour CD , sa valeur $\frac{dr \dot{r} dt}{M}$ (35, 105, ou 116.), on aura $\frac{dr \dot{r} dt}{M \cdot CG} = \frac{P dt \dot{r} dt \sin \Sigma}{S}$. Donc $CG = \frac{S \dot{r} dt}{PM \dot{r} dt \sin \Sigma}$.

COROLLAIRE I.

(225.) Comme $P \sin \Sigma = p$ (158.), on pourra encore exprimer le rayon de rotation par $\frac{S \dot{r} dt}{M p \dot{r} dt}$.

COROLLAIRE II.

(226.) Dans les corps qui tombent librement par la seule action de leur gravité, le centre des puissances coïncide avec celui de gravité; c'est-à-dire que $p=0$: donc le rayon de rotation sera infini; par conséquent les corps qui tombent librement par la seule

action de leur gravité, ne peuvent jamais avoir de mouvement de rotation. Il en est de même d'un corps qui seroit animé par des puissances dont le centre coïncideroit avec celui de gravité.

COROLLAIRE III.

(227.) Si la somme des puissances π est égale à zéro, ou si elles se détruisent mutuellement par l'opposition des quantités positives & des quantités négatives, sans que pour cela l'intégrale $\int \pi dt \sin \Sigma$, ou $\int p \pi dt$ cesse d'avoir une valeur, le rayon de rotation sera aussi zéro, & par conséquent le système tournera sur son centre de gravité. (110.) *

S C O L I E I.

(228.) M. Bouguer, dans son *Traité du Navire*, Liv. II, Section III, Chap. I, dit que, si une ligne droite est poussée ou tirée perpendiculairement par deux puissances égales, & de directions contraires, appliquées à ses extrémités, cette ligne tournera sur son centre de gravité. Cette assertion est vraie non-seulement dans ce cas, mais dans tous ceux où les puissances sont égales & de directions contraires, lors même qu'elles n'agissent pas perpendiculairement sur la ligne, & qu'elles ne sont pas appliquées à ses extrémités. Il suffit, pour cela, comme on vient de le voir, que la somme des puissances π soit $= 0$, comme elle l'est en effet lorsque les deux puissances sont égales & de directions contraires. Que les puissances soient d'ailleurs placées où l'on voudra, & qu'elles agissent sur la ligne, sous quelque angle que ce soit, cela est indifférent, pourvu qu'on n'ait pas $\int \pi dt \sin \Sigma$, ou $\int p \pi dt = 0$. Il est vrai que ce cas, bien examiné, est tout-à-fait imaginaire, & que la formule ne peut lui être appliquée, parce qu'en rigueur une ligne est immatérielle; & par conséquent, dans ce cas, M aussi-bien que S , sont zéro. Mais si l'on admet qu'il ne s'agit pas d'une ligne mathématique, mais d'un parallépipède matériel, notre remarque demeure dans toute sa force.

* On remarquera que l'expression $p\pi$, qui représente généralement la somme des moments des forces, n'est pas zéro toutes les fois que la somme π des puissances est zéro par l'opposition des puissances positives & négatives; car on voit (104.) que p est alors infini. La difficulté disparaîtroit, si l'on prend pour π , non le zéro absolu, mais une quantité infiniment petite. En général, $p\pi$ ne peut être zéro, quant à l'angle de rotation, que dans deux cas particuliers, savoir, lorsque $\pi = 0$, qui est le cas du Corollaire précédent, & lorsque la somme des puissances positives est non-seulement égale à celle des puissances négatives, mais encore lorsque le centre des unes coïncide avec le centre des autres, ou, ce qui revient au même, lorsque la résultante des unes est égale & directement opposée à celle des autres.

S C O L I E II.

(229.) *Jean Bernoulli*, dans le Tome IV de ses Œuvres, N°. CLXXVII, ne détermine le centre, ou l'axe de rotation que dans le cas où $\sin \Sigma = 1$; c'est-à-dire, dans le cas où la ligne menée du centre des puissances au centre de gravité, est perpendiculaire à la direction. La valeur du rayon de rotation se réduit, alors, à $\frac{S}{PM}$, qui est l'expression que nous avons trouvée (189.) pour la longueur du pendule simple, dont les oscillations sont de même grandeur & de même durée que celles du pendule composé, ou pour la distance de l'axe de rotation au centre d'oscillation du pendule, ou du système (190.); ce qui lui a fait croire que le système tournoit sur son centre d'oscillation. En effet, si l'on imagine que le système tourne sur son centre de gravité fixe, comme si c'étoit un pendule, dans ce cas, son centre d'oscillation sera éloigné de son centre de gravité, de la quantité $\frac{S}{PM}$, quoique du côté opposé à celui que nous avons vu que se trouve l'axe de rotation. *M. Bouguer*, dans son *Traité de la Manœuvre des Vaisseaux*, Liv. I, Section II, Chap. XIV, remarque bien que ce point est du côté opposé à celui où l'on place la puissance, par rapport au centre de gravité; mais il donne, pour règle générale, que la distance du centre de gravité à l'axe de rotation, est en raison inverse de celle de ce même centre à la puissance, ou comme $\frac{S}{PM}$, tandis que l'expression générale de la distance du centre de gravité à l'axe de rotation, est $\frac{S \int r \, dt}{PM \int r \, dt \sin \Sigma}$; expression qui ne se réduit à $\frac{S}{PM}$, & ne répond par conséquent avec la règle de *M. Bouguer*, que dans le cas où $\sin \Sigma = 1$, & est constant. Dans tous les autres cas, cette distance est en raison inverse de la distance P , & en raison directe de $\frac{\int r \, dt}{\int r \, dt \sin \Sigma}$. Cette différence vient de ce que, tant *M. Bouguer*, que *Jean Bernoulli*, n'ont cherché le lieu du centre, ou de l'axe de rotation, que dans le premier instant où le système se met en mouvement. Il est certain que pendant la durée de cet instant, on peut supposer $\sin \Sigma$ constant, quoiqu'il ne le soit pas dans les suivans. La quantité $\frac{\int r \, dt}{\int r \, dt \sin \Sigma}$ se trouve réduite, pour le premier instant, à $\frac{1}{\sin \Sigma}$, qui est une quantité constante; & par conséquent la distance du centre de gravité à l'axe de rotation se trouve par-là seulement en raison inverse de la distance P .

CHAPITRE VI.

De la Percussion.

DÉFINITION XXXV.

(230.) *LA Percussion* est le choc , ou le coup que se donnent les corps , lorsqu'ils se rencontrent , étant mus avec des vitesses , ou des directions différentes.

DÉFINITION XXXVI.

(231.) Si , après que le choc a eu son effet , les corps continuent à se mouvoir étant unis , & ne font seulement que se presser , l'action qu'ils exercent s'appelle une *Pression*.

DÉFINITION XXXVII.

(232.) Si , dans l'action du choc , aucun des corps ne se détermine à la rotation , le point dans lequel se fait le choc , s'appelle *Centre de percussion*.

On a vu que , dans les corps graves , on appelle *Centre de gravité* le point sur lequel le corps étant appuyé , demeure en équilibre , sans se déterminer à tourner , ni d'un côté ni de l'autre. Dans l'action du choc , on appelle de même *Centre de percussion* , le point dans lequel le corps , étant choqué , demeure en équilibre , sans se déterminer à la rotation , ni d'un côté , ni de l'autre.

AXIOME IV.

(233.) Les corps sont impénétrables , c'est-à-dire , ne peuvent se pénétrer de manière à occuper le même lieu dans le même temps.

Quoique nous voyions journellement qu'un corps s'introduit dans un autre , les particules de matière du premier n'occupent pas pour cela le même lieu que celles du second : celles de celui-ci cèdent leur place à celles du premier , & chaque particule occupe un lieu séparé , tant avant qu'après , & même dans le temps du choc , de sorte que deux particules ne peuvent jamais occuper le même lieu.

AXIOME V.

(234.) La nature opère par intervalles , ou par des mouvements successifs.

C'est ce que quelques-uns ont nommé la *Loi de continuité*. Un

corps qui se meut suivant une direction , ne peut passer d'un point à un autre , sans passer successivement par tous les points intermédiaires. Pareillement un corps ne peut passer d'une vitesse à une autre plus grande ou plus petite , sans avoir eu auparavant & successivement tous les autres degrés de vitesse intermédiaires : il en est de même de tous les cas à l'infini.

DÉFINITION XXXVIII.

(235.) Si un corps en rencontre , ou en choque un autre , comme (233.) ils ne peuvent se pénétrer , & que le corps choquant , en vertu de son inertie , tend à conserver son degré de vitesse , il doit agir peu à peu , & par des degrés successifs , sur le corps choqué , qui n'en a pas tant , & l'inertie de celui-ci doit s'exercer , avec une direction contraire , à chaque instant de l'action du corps choquant : par conséquent chacun des deux corps doit éprouver , dans le point du contact , ou dans les environs , une force , ou puissance , qui est une force d'action dans le corps choqué , de la part du corps choquant , & une force de réaction dans le corps choquant , de la part du corps choqué ; l'une & l'autre est égale (16.) à la force d'inertie des corps. Cette force , quelle qu'elle soit , s'appelle *Force de percussion*.

S C O L I E I.

(236.) Si les deux corps étoient parfaitement solides , ou denses ; c'est-à-dire , s'il n'y avoit aucuns pores , ou interstices entre les particules de matiere qui les composent ; il ne seroit pas possible que le corps choquant agit peu à peu , & par degrés , sur le corps choqué : il faudroit alors que le corps choqué reçût tout d'un coup toute la vitesse du corps choquant , ce qui est absolument contraire à ce qu'on a dit ci-dessus. (234.)

Cette difficulté a paru à quelques Auteurs une raison suffisante pour ne point admettre , dans la nature , de corps parfaitement solides. Cependant si l'on considère que , dans la division continue des corps , il faut nécessairement qu'on arrive aux atomes primitifs dont ils sont composés , & que ceux-ci sont tout-à-fait privés de pores ; on ne peut gueres souscrire à cette opinion , & par conséquent on ne peut pas exclure de la nature les corps parfaitement durs , ou solides. Il se présente encore d'autres difficultés , à mesure qu'on examine plus profondément les propriétés des premiers éléments de la matiere ; mais ces discussions n'entrent pas dans notre plan , puisque nous nous bornons à traiter des corps déjà composés de ces éléments ;

Il est certain, au reste, qu'on ne connoit point de corps dans toute la nature, dont les particules intégrantes ne soient séparées les unes des autres par des pores, ou interstices.

D É F I N I T I O N X X X I X.

(237.) C'est au moyen des pores, ou interstices, que les premières particules des corps cedent leur place à l'impulsion du choc, ou de la percussion, pour aller occuper des interstices plus éloignés. Dans certains corps, les particules cedent moins au choc, & dans d'autres elles cedent davantage; c'est ce qui fait qu'on dit que les corps sont plus ou moins durs, ou plus ou moins mous; en sorte qu'un corps est d'autant plus dur, que ses particules cedent moins leur place dans l'impulsion du choc, ou de la percussion.

S C O L I E I I.

(238.) De là viennent les enfoncements, cavités, ou impressions qui se forment dans les corps, par le moyen des chocs; de là les introductions, & pour ainsi dire, les pénétrations des corps les uns dans les autres. Nous disons tous les jours, quoiqu'improprement, qu'un boulet a pénétré dans un mur, un clou dans une planche, &c.

S C O L I E I I I.

(239.) Il est nécessaire de ne pas confondre la dureté des corps avec leur densité. L'or est plus dense que l'acier, mais l'acier est plus dur que l'or; le mercure est plus dense que l'argent, & n'est cependant point dur; il en est de même de beaucoup d'autres corps. On ne prétend pas pour cela établir que la dureté est absolument indépendante de la densité: le même or, battu avec le marteau, & réduit à un moindre volume, & par conséquent à une plus grande densité, acquiert aussi une plus grande dureté. Si un corps n'avoit pas de pores, où s'il étoit infiniment dense, aucune de ses parties ne pourroit céder au choc; par conséquent il seroit aussi infiniment dur. La dureté peut donc dépendre de la densité, mais elle peut aussi dépendre de la cohésion des parties mêmes. L'expérience est le seul moyen que nous ayons, jusqu'à présent, pour connoître le degré de dureté de chaque espèce de corps.

D É F I N I T I O N X L.

(240.) On appelle *Corps tenaces*, ceux dont les parties ne se rompent point, ou ne se séparent point les unes des autres, en cedant leurs

leurs places ; & la tenacité est d'autant plus grande , que les parties , résistent davantage à leur séparation.

D É F I N I T I O N X L I .

(241.) Les corps dont les parties ne peuvent céder leurs places sans se rompre , sont appelés *fragiles* , & la fragilité est d'autant plus grande , que les parties qui reçoivent le choc , se séparent , ou se rompent plus facilement.

D É F I N I T I O N X L I I .

(242.) *L'élasticité* est la force que l'expérience nous a fait découvrir dans les corps , par laquelle les parties qui ont été forcées , ou qui ont cédé à l'impression d'un choc , ou à celle d'une pression , tendent à se rétablir dans leur lieu respectif , telles qu'elles étoient avant le choc , ou la pression. C'est par cette force qu'une balle de paume se relève , lorsqu'elle tombe à terre ; c'est encore par cette force qu'un ressort , après avoir été comprimé , tend à se rétablir dans son premier état ; que l'arc décoche la fleche , &c. &c. &c. Cette force réside dans toutes les particules de matière qui cedent à l'impulsion du coup , à moins que , dans l'action , quelques-unes d'elles ne se rompent , ou ne se séparent totalement , ou en partie : car dans ce cas , elles perdent totalement , ou en partie , leur élasticité. Enfin cette force agit dans quelque instant que ce soit du choc , elle concourt avec celle de percussion , dont elle fait partie , ou même le tout , & elle tend à séparer les corps , en les poussant dans des directions opposées.

C O R O L L A I R E I .

(243.) L'élasticité augmente à proportion que le nombre des parties forcées , ou qui ont cédé à l'impulsion du choc , augmente ; ou , ce qui est la même chose , à proportion que l'impression devient plus grande ; & la force d'élasticité est la plus grande qu'il est possible , lorsque l'impression est parvenue à toute sa grandeur , ou qu'elle est devenue l'impression totale.

C O R O L L A I R E I I .

(244.) C'est dans cet état de la plus grande impression , que toute la force d'élasticité existe ; parce qu'avant été en augmentant par des degrés successifs , jusqu'à ce que la plus grande impression fût tout-à-fait formée , elle ne peut s'évanouir (234.) qu'en repassant par tous les degrés de diminution. Le corps choquant doit donc continuer à perdre

de sa vitesse, & le corps choqué à en acquérir, jusqu'à ce que les parties déplacées soient revenues entièrement, ou en partie, au lieu qu'elles occupoient avant le choc.

DÉFINITION XLIII.

(245.) Si le rétablissement des parties comprimées est total, c'est-à-dire, si elles reprennent entièrement la situation qu'elles avoient, on dit que l'élasticité est parfaite, ou que le corps est parfaitement élastique; mais si, au contraire, elles ne la reprennent qu'en partie, le corps n'est pas parfaitement élastique. Enfin s'il n'y a aucun rétablissement dans tout le temps du choc, le corps n'est nullement élastique.

SCOLIE IV.

(246.) On sçait par l'expérience que l'effet produit par la percussion, ou le choc, est beaucoup plus grand que celui qui est produit par la pression. Ce fait est trop commun, & se présente trop souvent à nos yeux, pour qu'il n'ait pas été dans tous les temps un sujet de réflexion. *Aristote*, dans la question 20 de sa *Mécanique*, demande pourquoi une hache coupe ou divise un corps par son coup, & qu'elle ne le fait pas quand elle est seulement comprimée, ou pressée? On ne doit pas trouver étonnant que ce Philosophe se soit contenté de faire la question, sans entreprendre d'y répondre, lorsqu'on voit que la difficulté n'est pas encore éclaircie, & a subsisté jusqu'ici, quoiqu'elle ait été le sujet de bien des discussions.

Leibnitz, considérant la diversité des effets, distingua la force que produit la percussion de celle que produit la pression; & il appella la première, *Force vive*, & la seconde, *Force morte*. Cette distinction a eu, & a peut-être encore aujourd'hui de grands partisans. *Jean Bernoulli*, dans son *Discours sur les loix de la communication du mouvement*, Chap. III, Déf. II, définit les deux forces en ces termes: La force vive est celle qui réside dans un corps, lorsqu'il est dans un mouvement uniforme; & la force morte, celle que reçoit un corps sans mouvement, lorsqu'il est sollicité & pressé de se mouvoir, ou à se mouvoir plus ou moins vite, lorsque le corps est déjà en mouvement. Cette définition ne fait pas dépendre la force vive du choc, puisque cette force réside dans un corps, lorsqu'il est dans un mouvement uniforme, sans exprimer aucunement qu'elle soit dépendante, ou non, de l'action du choc. Le même Auteur s'explique encore plus clairement dans sa *Dissertation sur la véritable notion des*

forçes vives, N^o. CXLV, §. I, où il dit : *Vis viva non confistit in actuali exercitio, sed in facultate agendi : subsistit enim, etiamsi non agat, neque habeat in quod agat.* La faculté d'agir que nous connoissons dans les corps, est la force d'inertie, ou, pour mieux dire, la force innée de la matiere ; aussi tous ceux qui ont adopté & soutenu cette distinction des forces vives, ne les ont point distinguées des forces d'inertie dont nous avons vu l'action dans le choc, ou au moins sont convenus que ce sont elles qui les produisent. Bernoulli convient de cela lui-même, puisque dans le Chap. V, §. 3 du Discours déjà cité, il dit, en parlant de la force vive : *Sa nature est toute différente ; elle ne peut ni naître, ni périr en un instant, comme la force morte ; il faut plus ou moins de temps pour produire une force vive dans un corps qui n'en avoit pas ; il faut aussi du temps pour la détruire dans un corps qui en a.* La force vive se produit successivement dans un corps, lorsque ce corps étant en repos, une pression quelconque, appliquée à ce corps, lui imprime peu à peu, & par degrés, un mouvement local. Ce mouvement s'acquiert par des degrés infiniment petits, & monte à une vitesse finie & déterminée, qui demeure uniforme à l'instant que la cause qui a mis le corps en mouvement cesse d'agir sur lui. Ainsi la force vive produite dans un corps, dans un temps fini, est équivalente à cette partie de la cause qui s'est consumée en la produisant. Dans un corps qui en choque un autre qui est en repos, l'inertie du corps choquant est, comme nous l'avons dit ci-dessus, la force qui imprime peu à peu, & par degrés, au corps choqué un mouvement local qui arrive à une vitesse déterminée ; & par conséquent l'inertie est la pression qui, appliquée au premier corps, ou qui, résidant en lui, produit la force vive dans le second. Il n'est pas nécessaire cependant, d'après cette définition, que ce soit le choc qui produise la force vive ; elle peut naître d'une puissance quelconque. La gravité, par exemple, agissant sur un corps libre, lui imprime peu à peu un mouvement local, ou une force vive, qui réside ensuite dans le corps. Enfin la force vive, suivant ces Auteurs, réside dans les corps, & y est produite par une pression, ou puissance quelconque ; mais elle n'est pourtant pas cette même pression, ou puissance qui la produit : c'est une autre chose dont aucun d'eux n'est encore parvenu à définir, ni à expliquer la nature.

L'obscurité de ces notions, & les doutes qu'elles présentent, ont fait qu'Euler (Tom. I des Mémoires de l'Académie Royale de Berlin) s'est naturellement persuadé que la force vive n'étoit autre chose que la force de percussion ; mais la force de percussion, suivant la défini-

nition que nous en avons donnée, est une puissance qui agit, & qui, suivant les Auteurs cités, ne peut être, tout au plus, que la cause productrice de la force vive. Les partisans de cette force sont même si éloignés de la confondre avec la force de percussion, ou de pression quelconque, qu'ils ne cessent de répéter que la première n'est comparable en aucune manière avec la seconde, pas plus que le fini ne l'est avec l'infini, ou une ligne avec une surface, comme le dit *Bernoulli* lui-même.

Mais si l'on ne nous a pas donné, jusqu'à présent, une définition exacte, ou une connoissance parfaite des forces vives, au moins nous assure-t-on en général qu'elles sont proportionnelles aux effets qu'elles produisent; c'est-à-dire, à l'impression qui résulte du choc. Cette notion, toute claire qu'elle paroisse, au premier coup-d'œil, ne fait que nous jeter dans de plus grandes difficultés. Une pression, quelle qu'elle soit, produit aussi une impression qui est bien sensible dans les corps mous; & les choses étant ainsi, comment peut-on les concilier avec l'affertion que la force de pression, & la force vive, sont incomparables, de la même manière que le fini n'est pas comparable avec l'infini? Il est vrai que la pression produit son impression relativement au temps; c'est-à-dire, qu'à chaque instant elle augmente son impression d'une quantité infiniment petite, au lieu qu'il ne paroît pas que les partisans des forces vives demandent que les choses arrivent ainsi; mais il faudroit pour cela que l'impression fût simultanée, c'est-à-dire qu'elle se fit dans un instant indivisible, ce qui est absolument contraire à ce qui a été dit, *Art.* 234. Et si on la suppose faite dans un temps déterminé, quelque court qu'il soit, il est clair alors que la force vive agit comme la force de pression, qu'elle n'en diffère aucunement, & n'en peut par conséquent être distinguée.

Cette question, de quelque façon qu'on l'envisage, n'est donc qu'une question de nom *, & on donne le nom de force vive à un être dont on n'a aucune connoissance; par conséquent cette discussion ne peut influer, en aucune manière, sur la théorie & le calcul du mouvement. Qu'on admette ou qu'on rejette cette force vive, il est toujours certain que le mouvement procède de la puissance qui agit; quelle que soit cette puissance, & de quelque façon qu'on

* Cette vérité a été mise dans tout son jour par M. d'Alembert. Voyez la préface de son *Traité de Dynamique*, ou le mot *force* de l'Encyclopédie, qui en est presque entièrement extrait. Voyez aussi la quatrième partie du *Cours de Mathématique* de M. *Beaumont*, art. 388.

en considère les effets, les vitesses qui en résultent, les espaces parcourus, & les temps de la durée de l'action, tant dans un système que dans l'autre, seront toujours les mêmes. Toute la difficulté consiste donc à sçavoir à quoi on doit donner le nom de force vive; difficulté d'autant plus embarrassante, qu'elle paroît exister même parmi les Auteurs & les partisans de cette force. Nous nous en tiendrons à ce qui a été dit dans l'Article 13; &, pour éviter tout doute & toute obscurité, nous n'entendrons autre chose par force, qu'une action, ou une puissance quelconque. On verra dans la suite que si c'est seulement par la grande différence qu'on remarque dans les effets, qu'on a introduit la force vive, on peut bien s'en passer, & même l'abandonner dès à présent, parce qu'on démontrera que la force de percussion suffit, pour rendre raison de tous les phénomènes de cette nature que peut nous présenter l'expérience.

D É F I N I T I O N X L I V.

(247.) Nous appellerons *Profondeur de l'impression*, la plus grande profondeur mesurée suivant la direction du mouvement; & l'*Amplitude de l'impression* est la plus grande section qu'on peut y faire perpendiculairement à la direction du mouvement.

P R O P O S I T I O N X X V I.

(248.) *La force de percussion est en raison composée de la dureté des corps & de l'amplitude des impressions.*

Un corps est d'autant plus dur, que ses particules cedent moins à l'impulsion du coup (237); c'est-à-dire, que la différentielle de la vitesse pendant un instant dt du choc, est plus grande *. Pareillement, plus le nombre des particules choquées sera grand, ou plus sera grande l'amplitude de l'impression, plus la même différentielle sera grande. Donc cette différentielle sera en raison directe composée de la dureté des corps, & de l'amplitude des impressions; mais la force qui agit (18.) est comme cette différentielle: donc aussi la force de percussion sera en raison composée de la dureté des corps, & de l'amplitude des impressions.

C O R O L L A I R E I.

(249.) Donc il n'y a point dans la nature de corps absolu-

* Car (236) si les corps étoient parfaitement durs, le corps choqué recevrait, tout d'un coup, toute la vitesse du corps choquant; alors la différentielle de sa vitesse dans le choc seroit un *maximum*: donc, plus cette différentielle de vitesse sera grande, c'est-à-dire, plus elle approchera du *maximum*, plus les corps auront de dureté.

ELANC. I. ment mous ; parce que n'y ayant point d'altération dans le mouvement , il n'y a point de force qui résiste ; & où il n'y a pas de résistance , il n'y a pas de corps.

COROLLAIRE II.

(250.) Il n'y a point de corps qui ne soit élastique ; car l'élasticité consistant dans la réaction d'une puissance capable de comprimer le corps, cette compression ne peut s'évanouir, ou devenir nulle, sans passer par tous les degrés de diminution , & par conséquent sans donner lieu aux parties déplacées de se rétablir, selon la direction suivant laquelle elles réagissent. Il pourroit seulement y avoir de la difficulté dans le cas des corps parfaitement durs ; mais nous avons déjà dit qu'il n'en existe point de tels dans la nature , si ce ne sont les premiers atômes dont les corps sont composés, & desquels nous ne prétendons pas traiter.

S C O L I E I.

(251.) Ce ce l'on vient de démontrer a également lieu lorsque les bases des impressions ne sont point planes & parallèles à leurs amplitudes ; car, de quelque manière que se fasse l'impression, il n'y a pas dans l'action d'autres points résistants suivant la direction du mouvement, que ceux qui sont compris dans l'amplitude : & quant à la résistance , c'est la même chose qu'ils soient tous à la même profondeur, ou à des profondeurs différentes, pourvu que la dureté ne soit pas changée par cette circonstance.

S C O L I E II.

(252.) Malgré la facilité avec laquelle on a déterminé la raison suivant laquelle agit la force de percussion, la détermination de sa mesure exacte est cependant bien difficile ; car, malgré que quelques Auteurs aient supposé généralement que la figure de l'impression est la même que celle du corps choquant, il est clair que cette opinion ne peut se soutenir pour les corps durs & tenaces. Dans un grand nombre de ces derniers, l'amplitude de l'impression est toujours beaucoup plus grande. Si un cylindre *AB*, par exemple, très-dur, & incapable d'aucune impression sensible, choque un autre corps *CD*, & y forme une impression, cette impression, si le corps choqué est tenace, n'aura point la figure même *EFGB* du cylindre ; mais elle sera de la forme *HFBI* : car les parties contiguës aux points *F* & *B* ne se détachant point avec facilité de leurs voisines, malgré que ces points cedent à l'impulsion, il est nécessaire que ces

parties cedent aussi, mais en entraînant avec elles celles qui les touchent, & que celles-ci entraînent de même celles qui les suivent immédiatement, & ainsi successivement; de sorte qu'il se forme, tout autour du cylindre, une cavité *HFE*. L'amplitude de l'impression se forme du diamètre *HI*, au lieu du diamètre *FB*; ce qui fait qu'il est difficile d'avoir une mesure exacte de l'impression réelle.

Au reste, cette observation, toute vraie qu'elle est, ne peut cependant être appliquée à tous les cas, sans aucune modification; car si le corps *AB*, au lieu d'être un cylindre, étoit une sphère, une cône, ou tout autre corps, dont la base *FB* ne fût point parallèle à *HI*, il est certain que la cavité peut, dans ce cas, diminuer beaucoup, & peut-être même s'évanouir entièrement, si le corps *CD* n'étoit pas d'une dureté & d'une ténacité extrêmes. En outre, quoique le corps choqué soit d'une même densité, ou dureté, dans toutes ses parties, cette dureté peut varier par le mouvement des particules supérieures qui s'approchent davantage des inférieures, & par-là il peut y avoir un plus grand nombre de particules dans la base *FB*, à la fin de l'impression qu'au commencement, particulièrement dans les corps tenaces & élastiques. Il arrive de là que la force de percussion qu'on auroit cru constante, parce qu'on ne voit aucune variation dans la base *FB*, ne peut cependant l'être, par quelques-unes des raisons que nous venons de développer.

PROPOSITION XXVII.

(253.) *Trouver la relation entre la force de percussion, la dureté des corps, & l'amplitude de l'impression.*

Si nous exprimons par *H* l'amplitude de l'impression *HI*, & par *D* la dureté du corps *CD*, dans un instant quelconque du choc, la force de percussion sera comme *DH* (248.): mais ceci n'a lieu cependant que dans le cas où le cylindre *AB* seroit extrêmement dur, ou incapable d'impression. Si le rapport de la dureté du cylindre à celle du corps *CD* n'est pas infini, les particules du cylindre dans la base *FB*, seront aussi déplacées, & la différentielle de la vitesse dépendra aussi de l'aire de la base *FB*, & de la dureté du cylindre. Appellant donc *H'* cette base, & représentant par *D'* la dureté du cylindre, la différentielle de la vitesse dépendra des produits *DH* & *D'H'*, ou sera en raison composée *DH . D'H'* des deux: mais lorsque *D'H'* est infini par rapport à *DH*, ou, ce qui revient au même, lorsque *DH* est zero, par rapport à *D'H'*, l'expression doit se réduire à *DH*; c'est-à-dire que la différentielle de la vitesse doit

BLANC. I.

être comme DH . Donc la différencielle de la vitesse, & par conséquent la force de percussion, est en général comme $\frac{DH.D'H'}{DH+D'H'}$.

S C O L I E I.

FIG. 24.

(254.) Lorsque les premières particules du corps CD viennent à se rompre, à cause de leur fragilité, il arrive ordinairement que, par leur force élastique, elles compriment les côtés AG , BF de l'autre corps AB , & les aspérités du corps CD forment, dans ces côtés, autant d'autres petites impressions latérales. Ces impressions doivent se considérer comme autant d'autres petites amplitudes d'impression, qui, réunies avec celles de la base GB , feront l'amplitude totale H . Après que l'impression totale est faite, la force d'élasticité qui agit à la base GB , tend à faire rétrograder le corps AB , tandis que les petites impressions latérales résistent à cette rétrogradation. L'action exercée dans ce cas dépendra donc de l'excès de la force élastique en GB , sur celle qui seroit nécessaire pour vaincre la résistance des petites impressions latérales. Si la première de ces forces est plus grande que la seconde, le corps AB rétrogradera; & si elle est moindre, il demeurera en repos dès l'instant qu'il aura perdu toute sa vitesse positive. Mais il est évident que la force d'élasticité en GB , à l'instant que le corps AB cesse de se mouvoir, ne peut manquer d'être plus grande que la force nécessaire pour vaincre les petites impressions latérales, parce qu'elle est égale à la force d'inertie du corps AB , qui a vaincu non-seulement la résistance des parties en GB , mais encore celle des petites impressions latérales: ainsi, de toute nécessité, le corps retournera toujours en arrière aussitôt qu'il aura cessé de se mouvoir. Il peut arriver, à la vérité, que ce ne soit que d'une très-petite quantité, parce que l'élasticité de GB va toujours en diminuant à mesure que le corps AB rétrograde; & elle peut diminuer au point de n'être plus suffisante pour vaincre les petites impressions latérales. On doit entendre la même chose des corps visqueux, tant parce qu'il se forme aussi, dans ces corps, quelques inégalités latérales, que parce que la viscosité même, ou la cohésion des parties les retient. Si le corps AB venoit à pénétrer entièrement dans le corps CD , le nombre des petites impressions latérales seroit alors constant. Dans ce cas, la dureté du corps demeurant la même, ainsi que l'amplitude de l'impression principale, la force de percussion ne peut manquer d'être constante.

S C O L I E II.

(255.) Nous supposons généralement dans nos calculs, que les deux

deux corps qui se choquent , se meuvent dans la même direction , ou dans des directions opposées ; car , s'ils se mouvoient dans des directions différentes , il seroit facile de décomposer leur mouvement , & de faire le calcul pour chaque force séparément. Nous supposons encore , pour plus de facilité , que les corps sont uniformément denses , & qu'ils sont réguliers , comme deux cylindres , deux spheres , deux parallélipèdes , &c. , afin qu'étant mus suivant la direction de leurs axes , la force de percussion , ou du choc , agisse dans la même direction. Car les corps ayant une figure égale & semblable , & étant uniformément denses , toutes leurs parties seront semblablement disposées autour du point dans lequel la force de percussion agit , & il n'y a pas de raison pour que la force de percussion s'incline , ou agisse plus d'un côté que de l'autre , attendu que les dimensions de l'impression en longueur & largeur , doivent être égales dans tous les sens : par conséquent la force de percussion doit agir également de tous les côtés ; & ainsi elle ne peut produire son effet dans une autre direction que celle que tiennent les corps.

Nous supposerons aussi que , si quelques puissances agissent sur les corps , elles sont appliquées à leurs centres de gravité , afin qu'il n'en résulte aucun mouvement de rotation , ou que le choc se fasse aux centres de percussion , pour éviter également le mouvement de rotation.

Enfin nous supposerons que les corps sont d'une grandeur suffisante pour que les impressions ne les pénètrent pas , ou ne parviennent pas jusqu'à leurs centres de gravité , afin que le mouvement de ces centres ne soit pas affecté par le changement de leur situation à l'égard des autres parties du corps.

Nous établirons en général que

A & B sont les deux corps qui doivent se choquer.

z & x les longueurs , ou profondeurs , des impressions qui se font en eux.

α & β les puissances constantes qui les animent.

U & V les vitesses avec lesquelles le choc commence.

u & v les vitesses dans un instant quelconque du choc.

a & b les espaces parcourus dans le temps même du choc.

D' & D les duretés des corps *.

* Tout ce qui précède & tout ce qui suit , nous indique qu'il y a , dans cet endroit , une faute typographique dans l'original ; on y trouve le mot *densité* pour celui *dureté*. On ne peut pas confondre ces deux qualités des corps (239) ; cependant , deux corps d'une même matière , mais dans deux états différents , comme seroit du cuivre fondu & du cuivre écroui

H' & H les amplitudes des impressions.

t le temps.

$$\pi \text{ la force de percussion} = \frac{DH D'H'}{D'H + D'H'}.$$

On suppose que le corps A suit & choque le corps B , & par conséquent que la vitesse U est plus grande que V ; sans cela on voit que le choc ne pourroit pas s'effectuer, à moins que la vitesse V ne fût négative. Mais, pour plus de facilité dans le calcul, nous supposons toujours que les puissances α & β , ainsi que les vitesses U & V sont positives; car il est très-facile de faire négatives, dans le résultat du calcul, les quantités qui le seroient.

PROPOSITION XXVIII.

(256.) *Trouver la relation entre les impressions & les espaces parcourus par les corps dans le temps du choc.*

Puisque le corps A suit le corps B , & qu'il se forme en eux des impressions dont les longueurs sont z & x , l'espace a parcouru par le corps A , doit être égal à l'espace b parcouru par le corps B , plus les longueurs, ou profondeurs z & x des impressions, lesquelles sont les espaces parcourus par les parties des mêmes corps qui ont cédé. Donc on aura $a = b + z + x$, ou $a - b = x + z$.

COROLLAIRE.

(257.) Si, à la fin de la percussion, les corps viennent à se séparer, parce qu'ils auroient une élasticité presque parfaite, alors $x + z = 0$: donc aussi $a - b = 0$, ou $a = b$; c'est-à-dire qu'à la fin de la percussion des corps parfaitement élastiques, ou à-peu-près, l'espace parcouru, pendant le choc, par le corps A , est toujours égale à l'espace parcouru, dans le même temps, par le corps B .

PROPOSITION XXIX.

(258.) *Trouver la valeur de la différentielle du temps, c'est-à-dire, la valeur de dt .*

De l'équation $a - b = x + z$, on tire $da - db = dx + dz$; mais (29.) $u dt = da$, & $v dt = db$: donc $(u - v) dt = da - db$. Donc aussi $(u - v) dt = dx + dz$; d'où l'on tire $dt = \frac{dx + dz}{u - v}$.

COROLLAIRE.

(259.) Lorsque les impressions parviennent à toute leur grandeur,

long-temps à coups de marteaux, pourroient bien avoir leur dureté proportionnelle à leur densité, & on pourroit alors exprimer les duretés relatives, par les mêmes lettres que les densités relatives. C'est à l'expérience à décider ce qui en est.

c'est-à-dire, lorsque x & z arrivent à leurs plus grandes valeurs, on a $dx + dz = 0$, d'où l'on conclut $u - v = 0$, ou $u = v$; c'est-à-dire que, dans l'instant où s'achevent les plus grandes impressions, les corps marchent avec des vitesses égales.

PROPOSITION XXX.

(260.) Trouver la relation entre les vitesses des corps.

Les forces, ou puissances, qui animent le corps A , sont α & π , & comme cette dernière est négative, il s'ensuit que $(\alpha - \pi)dt = Adu$ (19.)

Les deux puissances qui animent le corps B , sont β & π , & routes les deux sont positives; ainsi nous aurons $(\beta + \pi)dt = Bdv$.

En prenant la somme de ces deux équations, nous aurons $(\alpha + \beta)dt = Adu + Bdv$; & en intégrant $(\alpha + \beta)t = A(u - U) + B(v - V)$;* d'où l'on tire $Au + Bv = (\alpha + \beta)t + AU + BV$; & par conséquent $v = \frac{(\alpha + \beta)t + AU + BV - Au}{B}$.

COROLLAIRE I.

(261.) Le temps t pendant lequel se fait le choc, est extrêmement court, comme l'expérience nous l'apprend, & comme nous le démontrerons ci-après. Donc si les vitesses U & V , ou l'une quelconque d'elles, étoient d'une valeur infinie par rapport au temps t , la quantité $(\alpha + \beta)t$ seroit zéro à l'égard des autres, à moins que $\alpha + \beta$ ne fût infini, & l'on auroit $AU + BV = Au + Bv$.

COROLLAIRE II.

(262.) $AU + BV$ est la somme des mouvements des corps, avant, ou au commencement du choc, & $Au + Bv$, est la somme des mouvements des mêmes corps dans un instant quelconque du choc: donc la somme des mouvements dans un instant quelconque du choc, est égale à la somme des mouvements, avant, ou au commencement du choc.

SCOLIE I.

(263.) Cette proposition est donnée comme généralement vraie, par tous les Auteurs de Mécanique; cependant on vient de voir qu'elle n'est certaine que dans le cas où $(\alpha + \beta)t = 0$, ou quand cette quantité est susceptible d'être négligée à l'égard de U , ou de V .

* Cette intégrale est $Au + Bv + C$; & comme elle doit convenir à tous les instants du choc, il est évident qu'elle doit être zéro, en même temps que t ; c'est-à-dire, lorsque le choc commence: mais dans ce cas $u = v$ & $U = V$; donc $AU + BV + C = 0$, ou $C = -AU - BV$; substituant cette valeur de C dans l'intégrale trouvée, elle devient $A(u - U) + B(v - V)$.

Cette condition n'ayant pas lieu, l'équation est $AU + BV + (a + \beta)t = Au + Bv$: d'où l'on voit que lorsqu'il y a des puissances qui agissent, il n'est pas vrai que la quantité de mouvement dans un instant quelconque du choc, soit la même qu'auparavant, ou au commencement du choc.

S C O L I E I I.

(264.) Il se présente ici une question qui a été le sujet de bien des discussions parmi les Philosophes. On demande si la même quantité de mouvement se conserve ou non. Par ce qui vient d'être démontré, il paroît que l'affirmative est vraie. Le raisonnement de ceux qui soutiennent le contraire, consiste en ce que si l'on fait V négative, on aura, en supposant a & $\beta = 0$, $AU - BV = Au + Bv$; que par conséquent, dans ce cas, la différence des deux mouvements AU & BV est égale à la somme de Au & Bv : donc, continuent-ils, en prenant BV positivement, comme le font tous ceux qui soutiennent cette opinion, il n'y pas de doute qu'on n'ait $AU + BV > Au + Bv = AU - BV$; de sorte que la perte totale du mouvement sera $2BV$. Ce raisonnement n'affecte aucunement la rigueur de notre démonstration; car lorsqu'on parle de la somme des mouvements, on entend que ceux qui sont négatifs sont pris négativement, & non positivement; & dans ce cas, la loi, ou le principe, a lieu généralement.

C O R O L L A I R E I I I.

(265.) A l'instant où se fait la plus grande impression, on a trouvé (259.) $u - v = 0$, ou $u = v$: donc, en substituant l'une ou l'autre valeur dans l'équation $Au + Bv = (a + \beta)t + AU + BV$; il en résulte $u = v = \frac{(a + \beta)t + AU + BV}{A + B}$; expression de la vitesse des deux corps, à l'instant de la plus grande impression.

C O R O L L A I R E I V.

(266.) Si la quantité $(a + \beta)t$ est susceptible d'être négligée par rapport aux autres, l'expression précédente deviendra $u = v = \frac{AU + BV}{A + B}$.

S C O L I E I I I.

(267.) Les corps d'une très-petite élasticité, ou qui n'en ont aucune, continuent à marcher avec la vitesse qu'ils se trouvent avoir lors de la plus grande impression, parce qu'il n'y a aucune force dont l'action puisse l'altérer. Donc la vitesse trouvée ci-dessus sera celle avec laquelle les corps d'une très-petite élasticité, ou qui n'en ont aucune, se mouveront après le choc.

SCOLIE IV.

(268.) Il est temps présentement de résoudre la difficulté dont nous avons parlé dans l'Art. 21. Il est question de savoir si l'équation $\alpha = \frac{Adu}{dt}$ est applicable au cas où une puissance α pousse un corps A . Un Auteur des plus respectables de l'Europe, & digne des plus grands éloges, paroît en douter; & pour justifier ses doutes, il suppose que deux corps se choquent, l'un d'eux étant en repos, & raisonne en cette manière. Le changement, ou l'altération du mouvement du dernier de ces corps sera $Bu = Bv = \frac{AUB}{A+B}$, V étant supposé $= 0$. Rien n'est plus vrai, c'est d'ailleurs une suite de ce que nous avons démontré; nous n'éleverons donc aucun doute à ce sujet. Mais, continue-t-il, pour que l'effet soit proportionnel à la puissance qui l'a produit, comme on le suppose dans l'équation $\alpha = \frac{Adu}{dt}$, il est nécessaire, dans ce cas, que la cause qui a produit le changement $\frac{AUB}{A+B}$ soit proportionnelle à ce même changement; or c'est ce qu'il n'est pas possible de démontrer.* Notre réponse à ce raisonnement, est qu'il nous paroît que l'effet total $\frac{AUB}{A+B}$ doit être proportionnel à la somme de toutes les actions de la puissance durant tout le temps de l'action, & non à une action instantanée de cette puissance. L'effet qui doit être proportionnel à une action instantanée est la différentielle, ou l'altération instantanée du mouvement. Si c'est le corps A qui choque le corps B , la puissance du premier est son inertie, qui est proportionnelle à Adu ; & l'on aura, dans un instant quelconque $Adu = Bdv$ **. En intégrant cette équation, on trouve $A(U-u) = Bv$, en supposant $V=0$. Donc aussi-tôt qu'on arrive, par la continuité de l'action, jusqu'à avoir $u=v$, on a $u = \frac{AU}{A+B}$, & $Bu = \frac{AUB}{A+B}$; c'est-à-dire, que tout le mouvement produit dans le corps B , pendant la durée de l'action, jusqu'à ce qu'on ait $u=v$, sera proportionnel à $\frac{AUB}{A+B}$. Ceci ne prouve point que l'action instantanée Adu ne soit pas proportionnelle au

* Voyez les Ouvrages cités dans la note de la page 60; & sur-tout Part. 158 de la Dynamique de M. d'Alembert.

** Cette équation qui marque l'égalité entre la différentielle du mouvement perdu par le corps A , & celle du mouvement gagné par le corps B , paroît supposer ce qui est en question; mais elle est évidente, puisqu'on voit qu'en l'admettant on en déduit une vérité dont elle est indépendante. On voit d'ailleurs, que les différentielles du , dv doivent être de signe contraire, puisque la vitesse du corps A diminue de la quantité du , tandis que celle du corps B augmente de dv .

changement instantané Bdv ; mais prouve, au contraire, que cette proportionnalité a effectivement lieu, puisque de sa supposition il résulte une vérité manifeste.

PROPOSITION XXXI.

(269.) *Trouver la relation entre les différentielles des vitesses, & celles des impressions.*

De l'équation $(\alpha - \pi) dt = Adu$, & de l'équation $(\beta + \pi) dt = Bdv$, on tire $\frac{(\alpha - \pi)dt}{A} = du$, & $\frac{(\beta + \pi)dt}{B} = dv$: soustrayant la seconde équation de la première, on a $(\frac{\alpha - \pi}{A} - \frac{\beta + \pi}{B}) dt = du - dv$; ou $(\alpha B - \beta A - \pi(A + B)) dt = AB(du - dv)$. Substituant la valeur de $dt = \frac{dx + dz}{u - v}$ (258), on aura enfin $(\alpha B - \beta A - \pi(A + B))(dx + dz) = AB(u - v)(du - dv)$.

COROLLAIRE I.

(270.) Si l'on intègre la quantité $(\alpha B - \beta A - \pi(A + B))(dx + dz)$, toutes les quantités qui en résulteront se trouveront multipliées par x , ou par z ; mais à la fin du choc des corps parfaitement élastiques, ou à-peu-près, on a $x = 0$, & $z = 0$. Donc à la fin du choc de ces corps, on a $\int AB(u - v)(du - dv) = \frac{1}{2} AB(u - v)^2 - \frac{1}{2} AB(U - V)^2 = 0^*$, ce qui donne $U - V = v - u$; c'est-à-dire, que les corps parfaitement élastiques, ou à-peu-près, ont leur vitesse relative avant le choc, égale à leur vitesse relative après le choc.

* Cette intégrale est facile à trouver; car $\int AB(u - v)(du - dv) = \int AB(udu - vdu - u dv + v dv)$: Prenant les deux termes $udu - vdu$ affectés de la différentielle du de la même variable, & intégrant comme si v étoit une constante; on aura $\frac{1}{2} u^2 - vu$: différenciant ensuite cette quantité, & la retranchant de la différentielle proposée, on a $v dv$ pour reste, dont l'intégrale $\frac{1}{2} v^2$ étant jointe avec la première, donne $\frac{1}{2} u^2 - vu + \frac{1}{2} v^2$, ou $\frac{1}{2} (u - v)^2$ pour l'intégrale totale: donc en multipliant par AB , & ajoutant une constante, l'intégrale cherchée devient $\frac{1}{2} AB(u - v)^2 + C$. Cette règle porte avec elle sa démonstration, on peut d'ailleurs voir la quatrième partie du Cours de Mathématiques de M. Bézout, Art. 148.

A l'égard de la constante C , voici comment on la détermine; cette intégrale étant celle du second membre de l'équation générale de l'Art. 269, convient à tous les instants du choc, elle doit par conséquent être zéro lorsque le choc commence; or, dans ce cas, $u = U$, & $v = V$, donc $\frac{1}{2} AB(U - V)^2 + C = 0$, d'où l'on tire $C = -\frac{1}{2} AB(U - V)^2$. Substituant cette valeur de C dans l'intégrale trouvée, & remplissant la condition du Corollaire, on a l'expression même de l'Auteur. Faisons encore observer que pour que l'expression convienne après le choc, il faut écrire $v - u$ au lieu de $u - v$ que l'équation paroît fournir directement, car alors $u - v$ est une quantité négative, qui ne peut être égale, que numériquement, à la quantité positive $U - V$; tant que ces quantités sont au carré, il n'importe pas dans quel ordre on les écrit; mais lorsqu'elles sont au premier degré, il est nécessaire de les mettre dans l'ordre convenable, à ce qu'on veut exprimer.

COROLLAIRE I I.

(271.) Si l'on substitue, dans l'équation $U-V=v-u$, en place de place v , sa valeur qu'on vient de trouver (260.), qui est $\frac{(\alpha+\beta)t+AU+BV-Au}{B}$, on aura, pour la fin du choc des corps parfaitement élastiques, ou à-peu-près, $U-V+u=\frac{(\alpha+\beta)t+AU+BV-Au}{B}$; d'où l'on tire $u=\frac{(\alpha+\beta)t+U(A-B)+2BV}{A+B}$.

COROLLAIRE I I I.

(272.) Si l'on substitue de même cette valeur dans l'équation $v-U+V=u$, on aura $v-U+V=\frac{(\alpha+\beta)t+U(A-B)+2BV}{A+B}$, qui donne $v=\frac{(\alpha+\beta)t+V(B-A)+2AU}{A+B}$.

COROLLAIRE I V.

(273.) Si la quantité $(\alpha+\beta)t$ étoit extrêmement petite, ou négligeable à l'égard des autres, les équations ci-dessus deviendroient $u=\frac{U(A-B)+2BV}{A+B}$, & $v=\frac{V(B-A)+2AU}{A+B}$.

COROLLAIRE V.

(274.) Dans la même supposition que $(\alpha+\beta)t$ est négligeable à l'égard des autres quantités, nous aurons aussi $u^2=\dots$
 $\frac{U^2(A-B)^2+4BUV(A-B)+4B^2V^2}{(A+B)^2}$; $Au^2=\frac{AU^2(A-B)^2+4AEBUV(A-B)+4AEB^2V^2}{(A+B)^2}$. De même, $v^2=\frac{V^2(B-A)^2+4AUV(B-A)+4A^2U^2}{(A+B)^2}$; $Bv^2=\frac{BV^2(B-A)^2+4ABUV(B-A)+4AB^2U^2}{(A+B)^2}$; par conséquent $Au^2+Bv^2=\frac{AU^2(A-B)^2+4A^2BU^2+BV^2(B-A)^2+4AB^2V^2}{(A+B)^2}$,
 $=\frac{AU^2(A+B)^2+B^2V^2(A+B)^2}{(A+B)^2}=AU^2+B^2V^2$. Donc dans les corps parfaitement élastiques, ou à peu-près, lorsque $\alpha+\beta$ est négligeable à l'égard des autres quantités, la somme des produits de chaque masse, par le carré de sa vitesse, est la même au commencement & à la fin du choc, ou la même avant & après le choc.*

PROPOSITION XXXII.

(275.) Le produit $DHdx$ de l'amolitude de l'impression, & de la

* C'est ce qu'on appelle la *Conservation des Forces vives*. Cette expression est encore admise par la plus grande partie des Géomètres, même par ceux qui n'admettent pas la distinction des Forces vives, & des Forces mortes, proposée par Leibniz, & sur-tout son principe sur la mesure de la Force des Corps en mouvement, qui est de multiplier la masse par le carré de la vitesse. Voyez la Préface du *Traité de Dynamique*, de M. d'Alembert.

différentielle dx parcourue par les particules du corps choqué, est toujours égale au produit $D'H'dz$ des quantités semblables du corps choquant.

Le produit DH de la dureté par l'amplitude, est proportionnel au nombre des particules choquées (248.), & la différentielle dx (29.) est comme la vitesse avec laquelle se meuvent lesdites particules: donc le produit $DHdx$ est comme la quantité de mouvement des mêmes particules. $DHdx - D'H'dz$, sera donc, d'après cela, comme la quantité de mouvement de toutes les particules, laquelle quantité est constante (264.). Mais, au commencement du choc, ce mouvement est zéro. Donc on aura toujours $DHdx - D'H'dz = 0$; ou $DHdx = D'H'dz$, & $dz = \frac{DHdx}{D'H'}$.

PROPOSITION XXXIII.

(276.) Trouver la relation entre les vitesses & les impressions.

Si l'on substitue dans l'équation (269.) $(\alpha B - \beta A - \pi(A+B))(dx + dz) = AB(u-v)(du-dv)$, les valeurs de $\pi = \frac{DH \cdot D'H'}{DH + D'H'}$ (253.), & de $dz = \frac{DH}{D'H'}dx$ (275.), on aura l'équation $(\alpha B - \beta A - (A+B) \frac{DH \cdot D'H'}{DH + D'H'}) (dx + \frac{DH}{D'H'}dx) = AB(u-v)(du-dv)$, qui, en réduisant devient $(\alpha B - \beta A) \frac{(DH + D'H')}{D'H'} dx - (A+B) DHdx = AB(u-v)(du-dv)$, & en intégrant, $(\alpha B - \beta A) \int \frac{(DH + D'H')}{D'H'} dx - (A+B) \int DH dx = \dots \frac{1}{2} AB((u-v)^2 - (U-V)^2)$. Mais $\int \frac{(DH + D'H')}{D'H'} dx = x + \zeta^*$, substituant donc cette valeur, on a $(\alpha B - \beta A)(x + \zeta) - (A+B) \int DH dx = \frac{1}{2} AB((u-v)^2 - (U-V)^2)$.

PROPOSITION XXXIV.

(277.) Trouver la vitesse u , avec laquelle se meut le corps A, dans un instant quelconque du choc.

Qu'on dégage de l'équation précédente la valeur de $u-v$, on aura $u-v = \pm \left((U-V)^2 + \frac{(\alpha B - \beta A)(x + \zeta)}{\frac{1}{2}AB} - \frac{(A+B) \int DHdx}{\frac{1}{2}AB} \right)^{\frac{1}{2}}$; qu'on substitue ensuite la valeur de v trouvée dans l'Art. 260, qui est $\frac{(\alpha + \beta)t + AU + BV - Au}{B}$, & l'on aura $\frac{Au + Bu - AU - BV - (\alpha + \beta)t}{B} = \pm \left((U-V)^2 + \frac{(\alpha B - \beta A)(x + \zeta)}{\frac{1}{2}AB} - \frac{(A+B) \int DHdx}{\frac{1}{2}AB} \right)^{\frac{1}{2}}$, d'où l'on tire $u = \frac{AU + BV + (\alpha + \beta)t}{A + B} \pm \frac{B}{A+B} \left((U-V)^2 + \frac{(\alpha B - \beta A)(x + \zeta)}{\frac{1}{2}AB} - \frac{(A+B) \int DHdx}{\frac{1}{2}AB} \right)^{\frac{1}{2}}$.

* Car $\frac{DH + D'H'}{D'H'} dx = \frac{DHdx}{D'H'} + dx = dz + dx$ (275.). Donc, &c.

Le signe supérieur est pour le cas où la plus grande impression n'est pas encore parvenue à toute sa grandeur, & l'inférieur a lieu après que la plus grande impression est achevée. *

COROLLAIRE I.

(278.) Si l'on avoit $V=0$, & $B=\infty$, on auroit
 $u = \pm \left(U^2 + \frac{a(x+v)}{\frac{1}{2}A} \frac{\int D H dx}{\frac{1}{2}A} \right)^{\frac{1}{2}}.$

COROLLAIRE II.

(279.) Si les deux corps A & B étoient parfaitement élastiques, de sorte que, pendant la rétrogradation du corps A , la quantité DH ne variât point, les deux vitesses de ce corps, positive & négative, feroient égales à distances égales de l'origine des x , ou à égales distances du point où se termine la plus grande impression.

COROLLAIRE III.

(280.) Si les corps n'étoient pas parfaitement élastiques, comme cela arrive régulièrement dans la nature, la quantité DH seroit *plus grande* ** pendant la rétrogradation, à égales distances de l'origine des x ; & par conséquent la vitesse négative seroit moindre que la positive, à égales distances du point où se termine la plus grande impression.

COROLLAIRE IV.

(281.) On ne pourra donc pas avoir $u=U$ dans l'origine des x , mais seulement $u < U$. Les premières particules des corps ne pourront donc aussi retourner entièrement dans leur première situation: il restera par conséquent une petite impression, lorsque les corps se

* Cela suit de ce qu'après la plus grande impression achevée, la quantité $u-v$ est négative.

** Il y a dans l'original, *la quantité DH seroit moindre*; mais nous croyons que c'est une faute typographique: car il est évident que, l'élasticité étant imparfaite, les parties qui ont été forcées & rapprochées les unes des autres par l'action du choc, ne reprennent pas entièrement la même disposition qu'avant le choc: à égales distances de l'origine des x , ou du point où se termine la plus grande impression, les parties seront donc plus rapprochées dans la rétrogradation du corps A , qu'avant la formation de la plus grande impression: donc la durée D , qui est une suite du rapprochement des parties, sera plus grande, & par conséquent DH le sera aussi (252.). Cette correction faite, les conséquences de ce Corollaire & des suivants viennent naturellement, au lieu qu'elles nous paroissent devoir être absolument contraires. En effet, si DH étoit réellement moindre dans la rétrogradation, $\frac{\int D H dx}{\frac{1}{2}A}$

le seroit aussi: & comme cette quantité est à soustraire, il est clair que la vitesse négative u seroit plus grande que la positive, & non pas moindre, comme elle doit l'être, & comme le dit l'Auteur, &c. On fera attention que l'origine des x ou des profondeurs de l'impression, est le point de la surface du corps choqué dans lequel commence le choc, ou le point du premier contact de ce corps, avant que ses parties eussent été forcées par l'impulsion du choc. Lorsque le corps A , dans la rétrogradation, passe aux mêmes distances de l'origine des x , il est aussi aux mêmes distances du point où se termine la plus grande impression: & c'est de ce dernier point que commence la vitesse négative.

sépareront, & la vitesse, dans cet instant, sera moindre que celle qu'auroit le corps A dans l'origine des x : par conséquent elle sera beaucoup moindre que la vitesse primitive U .

COROLLAIRE V.

(282.) Comme la puissance a agit négativement pendant la rétrogradation, ou retarde le mouvement du corps A , même après qu'il est séparé du corps B , elle parviendra donc à détruire tout le mouvement du corps A , qui à la fin s'arrêtera, comme on l'a expliqué en parlant du mouvement retardé; & la puissance a retournant à agir positivement, il se fera un second choc, le corps A acquérant (281.), jusqu'au moment de sa nouvelle rencontre avec le corps B , la même vitesse qu'il avoit lorsqu'il s'en est d'abord séparé, c'est-à-dire, une vitesse moindre que U , & cette nouvelle vitesse fera la vitesse primitive relativement à ce second choc.

COROLLAIRE VI.

(283.) L'origine des x sera aussi placée plus profondément pour le second choc, puisque les premières particules des corps n'ont pas pu, ans le premier choc, retourner précisément à leur première situation.

COROLLAIRE VII.

(284.) La même chose arrivera dans le troisième, le quatrième, & dans tous les chocs suivants; la vitesse primitive ira toujours en diminuant, jusqu'à ce qu'enfin le corps A s'arrête après avoir fait, dans les derniers chocs, des impressions d'une quantité infiniment petite; & alors (231.) la force de percussion se réduira à une simple pression; c'est-à-dire, qu'on aura $\pi = a$.

PROPOSITION XXXV.

(285.) Trouver la vitesse v , avec laquelle se meut le corps B , dans un instant quelconque du choc.

Si l'on substitue la valeur de u , qu'on vient de trouver, dans l'équation de l'Art. 260, qui est $v = \frac{(a+b)c + AU + BV - Au}{B}$, après la réduction faite, on trouvera

$$v = \frac{AU + BV + (a+b)c}{A+B} \mp \frac{A}{A+B} \left((U-V)^2 + \frac{(aB-bA)(x+i)}{\frac{1}{2}AB} - \frac{(A+B)DHdx}{\frac{1}{2}AB} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le signe supérieur est pour le cas où la plus grande impression n'est pas encore achevée; & l'inférieur a lieu après qu'elle est achevée.

PROPOSITION XXXVI.

(286.) Trouver la valeur de l'impression, en supposant que la dureté D est constante.

Puisqu'on suppose la dureté D constante, on aura $\int DHdx = D\int Hdx$; mais $\int Hdx$ est la valeur de l'impression, puisque H désigne son amplitude, & dx la différencielle de sa profondeur: donc, en substituant, dans l'équation de l'Art. 276, $D\int Hdx$ en place de $\int DHdx$, & ordonnant, on aura, pour la valeur de l'impression, dans le cas où la dureté D est constante, $\int Hdx = \frac{\frac{1}{2}AB((U-V)^2 - (u-v)^2) + (aB - \beta A)(x+t)}{D(A+B)}$.

PROPOSITION XXXVII.

(287.) Trouver la valeur de la plus grande impression, dans le cas où la dureté D est constante.

Dans l'instant de la plus grande impression, on a $u-v=0$ (259.): substituant donc cette valeur dans l'expression précédente, & appelant I la plus grande impression, on aura $I = \frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2 + (aB - \beta A)(x+t)}{D(A+B)}$.

COROLLAIRE I.

(288.) Si le corps B étoit immobile, il n'y auroit qu'à supposer $B=\infty$, & $V=0$, & la valeur de la plus grande impression deviendrait, pour ces cas, $I = \frac{\frac{1}{2}AU^2 + a(x+t)}{D}$.

COROLLAIRE II.

(289.) Dans les corps qui tombent librement par la seule action de la gravité, on a (52.) $a=32A$, ou $A=\frac{1}{32}a$. Substituant cette valeur dans l'équation précédente, elle deviendra $I = \frac{\frac{1}{64}aU^2 + a(x+t)}{D}$.

Mais si nous appellons e la hauteur d'où le corps tombe, on aura (52.) $e = \frac{1}{64}U^2$, ou $64e = U^2$. Substituant donc cette valeur de U^2 , on aura, pour les corps qui tombent librement par la seule action de la gravité, $I = \frac{a(e+x+t)}{D}$.

COROLLAIRE III.

(290.) Si les quantités x & z étoient assez petites pour être négligeables à l'égard de e , on auroit $I = \frac{ae}{D} = \frac{aU^2}{64D}$; ou, en mettant pour a sa valeur $32A$, $I = \frac{32Ae}{D} = \frac{AU^2}{2D}$. Donc les impressions faites par les corps qui tombent par l'action de la gravité, sont en raison directe composée des corps & des hauteurs d'où ils tombent, ou en raison directe composée des corps & des quarrés des vitesses primitives avec lesquelles ils choquent, & en raison inverse des duretés, ou densités.

S C O L I E I.

(291.) Ces formules sont parfaitement d'accord avec l'expérience. Pour s'en convaincre, il ne faut que consulter les Ouvrages des Auteurs qui ont écrit sur la Physique Expérimentale. Le Docteur *'s Gravesande*, dans le 1^{er}. volume de son Ouvrage intitulé, *Physices Elementa Mathematica*, décrit (§. 833.) une machine pour faire tomber avec précision différentes sphères de cuivre sur de l'argille. * Dans la troisième expérience, il en fait tomber trois de même diamètre, mais d'un poids différent, en ayant fait deux creuses : leurs poids étoient entre eux comme 1, 2 & 3. La hauteur de la chute de ces trois sphères étoit de 9 pouces ; & les impressions qu'elles firent, se trouverent aussi comme 1, 2 & 3. Dans la dixième expérience, (§. 855.), il fit tomber les deux plus pesantes, de 18 pouces de hauteur, & trouva que leurs impressions étoient comme 4 à 6, c'est-à-dire, doubles des premières. On voit par-là qu'en effet les impressions sont en raison composée des poids, ou masses, & des hauteurs d'où ils tombent, ou en raison composée des poids, ou masses, & des quarrés des vitesses primitives.

C O R O L L A I R E IV.

(292.) Si les deux corps qui se choquent, étoient égaux & que, dans le choc, ils ne fussent animés par aucune puissance, on auroit $B = A$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$; ce qui réduit la valeur de l'impression (287.) à $I = \frac{A(U-V)^2}{4D}$; & dans le cas de $V = 0$, à $I = \frac{AU^2}{4D}$. On voit donc, comme ci-dessus, que les impressions sont en raison directe composée des poids, ou des masses, & des quarrés des vitesses avec lesquelles ils se choquent, & en raison inverse des duretés.

* Nous traduisons le mot *Greda* par le mot *Argille*, quoique, d'après l'autorité des différents Dictionnaires que nous avons été à même de consulter, ce mot signifie proprement de la Croie. Nous nous sommes crus fondés à faire cette correction, parce que les expériences du Docteur *'s Gravesande*, dont il est ici question, ont été réellement faites en laissant tomber les sphères de cuivre sur de l'argille, telle que celle dont se servent les Potiers pour leurs ouvrages du plus bas prix. Ce scavant la préfère aux autres ; voici comment il s'exprime dans le §. 821 de l'Ouvrage cité. *Argilla omnium maxime commode adhibetur ; sed illam ex quibus vasa fictilia, maxime vulgaria, & vilioris pretii, efficiuntur, eligimus. Hac pura deficeretur, & admixta aqua ita temperanda est, ut quidem inquinet manus, non autem adhaereat.... Ubi massa ex tali Argilla statuitur, facit, & in quibusdam locis separatio partium datur ; quando hanc habet proprietatem, partes que intromittuntur, dum cedunt, inter adjacentes penetrant. Et dans le §. 822. Si liam argillam magis albam, & ad naturam cretae accedentem, adhibeamus, non facile fatiscit, & partes etiam inter adjacentes penetrant, dum cedunt ; sed his potius remouent ; quod pro diversa natura Argillae diversimodè contingit. Hac de tali creta Argilla, primum indicat, utor ; quia quid huic contingere debeat ratiocinio deducere possumus ; effectus omnes fixis regulis subiiciuntur, praevideri possunt, & experimenta ratiocinia confirmant, &c. &c.*

SCOLIE II.

(293.) Ceci est encore confirmé par plusieurs autres expériences que le Docteur *'s Gravesande* expose dans l'endroit cité, & dont il déduit que les effets étant proportionnels aux causes, & les mêmes effets aux impressions, il est nécessaire que les causes qu'il prétend avec *Leibnitz* être les *forces vives*, soient aussi en raison composée des masses & des quarrés des vitesses. *

SCOLIE III.

(294.) Puisque l'expérience s'accorde avec nos formules, non-seulement dans le cas des corps mous comme l'argille, mais encore dans celui des corps durs & élastiques, lorsque la dureté *D* est constante; il est évident que, dans ces cas, la dureté a été au moins sensiblement constante, & que nous pouvons la supposer telle. On voit encore, par la conformité de l'expérience avec le calcul, dans lequel nous avons supposé l'impression de la même figure sphérique que le corps choquant *A*; on voit, dis-je, qu'il est évident, au moins dans les corps mous tels que l'argille, que, dans ces cas, le creux, ou l'enfoncement latéral *HFE*, n'a pas eu lieu. Cependant cet enfoncement ne peut manquer d'exister dans des corps plus élastiques: il existe même dans les corps mous comme l'argille, suivant le Docteur *'s Gravesande*, §. 824, lorsque l'amplitude de l'impression est très-grande relativement à sa profondeur, parce que, dans ce cas, les raisons sur lesquelles il s'est fondé, ne peuvent avoir lieu; car, de quelque nature que soit l'argille, ses particules cèdent latéralement; ** ce qui prouve que le creux, ou l'enfoncement latéral se forme même dans les corps mous, pourvu que la figure du corps choquant ne soit pas telle que son amplitude augmente par degrés.

FIG. 15.

PROPOSITION XXXVIII.

(295.) Déterminer la profondeur de l'impression, dans le cas où l'on auroit $H = Qx$; *Q* désignant une quantité constante.

Si l'on substitue Qx pour *H* dans l'équation $\int Hdx = . : . . .$
 $\frac{1}{2}AC((U-V)^2 - (u-v)^2) + (x^2B - A^2)(x+1) \quad (286.);$ & si ensuite on integre,

* Voyez, sur la mesure des forces vives, les Ouvrages cités dans la note de la page 60, sur-tout la Préface du *Traité de Dynamique* de M. d'Alembert; voyez aussi la 4^e. partie du *Cours de Mécaniques* de M. Beqout, Art. 388.

** Voici ce §. 824. *Si cavitatis latitudo magna sit respectu profunditatis, ratiocinia in hac ipsa Argilla (celle qu'il avoit adoptée) locum non habent; quia in hoc caso, quaecumque sit natura Argillæ, faciliè partes lateraliter cedunt, & pars tantum cavitatis, harum introitum, tribuenda est.*

on aura $\frac{1}{2} Qx^2 = \frac{1}{2} AB((U-V)^2 - (u-v)^2) + (\alpha B - \beta A)(x+Q)$. Or, dans la supposition de $H = Qx$, on aura aussi $H' = Qz^*$, & l'équation $DHdx = D'H'dz$ (276.) se réduira à $DQxdx = D'Qzdz$, d'où l'on tire, en divisant par Q , & intégrant, $Dx^2 = D'z^2$, & $z = \frac{D^{\frac{1}{2}}}{D'^{\frac{1}{2}}} x$. Si l'on substitue maintenant cette valeur de z dans l'équation, il en résultera $\frac{1}{2} Qx^2 = \frac{1}{2} AB D^{\frac{1}{2}}((U-V)^2 - (u-v)^2) + (\alpha B - \beta A)(D^{\frac{1}{2}} + D'^{\frac{1}{2}})x$, & en dégageant x , on a

$$x = \frac{(\alpha B - \beta A)(D^{\frac{1}{2}} + D'^{\frac{1}{2}})}{D D'^{\frac{1}{2}} Q (A+B)} \pm \left(\frac{((\alpha B - \beta A)(D^{\frac{1}{2}} + D'^{\frac{1}{2}}))^2}{(D D'^{\frac{1}{2}} Q (A+B))^2} + \frac{AB((U-V)^2 - (u-v)^2)}{D Q (A+B)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

COROLLAIRE I.

(296.) Dans le cas de la plus grande profondeur, ou impression, où $u-v=0$ (259.) ; donc on aura la plus grande profondeur

$$x = \frac{(\alpha B - \beta A)(D^{\frac{1}{2}} + D'^{\frac{1}{2}})}{D D'^{\frac{1}{2}} Q (A+B)} \pm \left(\frac{((\alpha B - \beta A)(D^{\frac{1}{2}} + D'^{\frac{1}{2}}))^2}{D D'^{\frac{1}{2}} Q (A+B)} + \frac{AB(U-V)^2}{D Q (A+B)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

COROLLAIRE II.

(297.) Si l'on avoit $V=0$, & $B=\infty$, la plus grande profondeur x seroit $= \frac{\alpha(D^{\frac{1}{2}} + D'^{\frac{1}{2}})}{D D'^{\frac{1}{2}} Q} \pm \left(\left(\frac{\alpha(D^{\frac{1}{2}} + D'^{\frac{1}{2}})}{D D'^{\frac{1}{2}} Q} \right)^2 + \frac{AU^2}{DQ} \right)^{\frac{1}{2}}.$

COROLLAIRE III.

(298.) Si, outre cela, on avoit aussi $U=0$, la plus grande x seroit alors $= \frac{\alpha(D^{\frac{1}{2}} + D'^{\frac{1}{2}})}{D D'^{\frac{1}{2}} Q}$; c'est-à-dire, en raison directe simple de la puissance α , qui agit sur le corps A .

PROPOSITION XXXIX.

(299.) Déterminer la profondeur de l'impression, dans le cas où π est constante.

Qu'on suppose $\pi(A+B) = \frac{DHD'H'}{DH+D'H'}(A+B) = n(\alpha B - \beta A)$, n désignant un nombre quelconque ; puisque, dans la supposition présente, DH & $D'H'$ sont des quantités constantes, l'équation (275.) $DHdx = D'H'dz$, donnera, en intégrant, $DHx = D'H'z$, d'où l'on tire $D'H' = \frac{DHx}{z}$. Substituant cette valeur dans la première équation

* Est-il bien certain que si $H=Qx$, on doive en inferer que $H=Qz$? Nous croyons qu'on peut en douter. Quoiqu'il semble que cela dérive de la supposition qu'on a faite que les duretés sont constantes ; cependant il ne nous paroît pas certain qu'on en puisse conclure avec l'évidence mathématique, que si la raison de H à x est Q , celle de H à z soit aussi Q .

tion, on aura $\frac{DHx(A+B)}{x+\zeta} = n(\alpha B - \beta A)$, ce qui donne
 $Hx = \frac{n(\alpha B - \beta A)(x+\zeta)}{D(A+B)} = (286.) \frac{\frac{1}{2}AB((U-V)^2 - (u-v)^2) + (\alpha B - \beta A)(x+\zeta)}{D(A+B)}$, d'où
 l'on déduit $x+\zeta = \frac{\frac{1}{2}AB((U-V)^2 - (u-v)^2)}{(n-1)(\alpha B - \beta A)}$; ou en substituant $\frac{\pi(A+B)}{\alpha B - \beta A}$ à la
 place de n , $x+\zeta = \frac{\frac{1}{2}AB((U-V)^2 - (u-v)^2)}{\pi(A+B) - (\alpha B - \beta A)}$.

COROLLAIRE I.

(300.) Si l'on avoit $V=0$, & $B=\infty$, on auroit $x+\zeta = \frac{\frac{1}{2}AU^2}{\pi - \alpha}$.

COROLLAIRE II.

(301.) Dans le cas de la plus grande impression, on a $u-v=0$:
 on aura donc, pour ce cas, $x+\zeta = \frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2}{\pi(A+B) - (\alpha B - \beta A)}$.

COROLLAIRE III.

(302.) Il n'y a donc point alors de plus grande impression, ou,
 ce qui est la même chose, l'impression n'a point de limite, à moins
 que $\pi(A+B) - (\alpha B - \beta A)$ ne soit positif, ou que l'on n'ait
 $\pi(A+B) > \alpha B - \beta A$.

COROLLAIRE IV.

(303.) Si l'on avoit $V=0$, & $B=\infty$, on auroit la plus grande
 profondeur $x+\zeta = \frac{\frac{1}{2}AU^2}{\pi - \alpha}$.

PROPOSITION XL.

(304.) Trouver la valeur de la dureté D .

Puisque la dureté D a été trouvée constante, ou sensiblement
 constante, l'équation de l'Art. 276 se réduira à
 $(\alpha B - \beta A)(x+\zeta) - D(A+B) \int H dx = \frac{1}{2}AB((u-v)^2 - (U-V)^2)$; d'où
 l'on tire $D = \frac{\frac{1}{2}AB((U-V)^2 - (u-v)^2) + (\alpha B - \beta A)(x+\zeta)}{(A+B) \int H dx}$; & pour le cas de
 plus grande impression, dans lequel on a $u-v=0$, on aura
 $D = \frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2 + (\alpha B - \beta A)(x+\zeta)}{(A+B)I}$.

COROLLAIRE I.

(305.) Si l'on avoit $B=\infty$, & $V=0$, comme dans les expé-
 riences, rapportées ci-dessus, faites sur l'argille par le Docteur's *Grave-*
sande, on auroit $D = \frac{\frac{1}{2}AU^2 + \pi x}{I} = \frac{\alpha(c+x)}{I}$.

S C O L I E

PLANC. A.

(306) Prenons, pour exemple, la première expérience, rapportée ci-dessus (291.), dans laquelle on faisoit tomber la sphère la moins pesante de 9 pouces de hauteur, & dans laquelle on a trouvé le diamètre de l'impression de $\frac{61}{800}$ *, celui de la sphère étant de $\frac{1}{2}$. De là on déduit la valeur de $x = \frac{100 - (10000 - 61.61)^{\frac{1}{2}}}{1600} = \frac{3}{200}$. Celle de $I = cx^2 \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{3}x \right)$; c marquant la circonférence, dont le diamètre est

* Les trois sphères avec lesquelles le Docteur *s. Gravesande* a fait ses expériences, avoient 1 pouce $\frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{2}$ de pied, de diamètre (*Physicæ Elementa mathematica*, §. 833.). Lorsqu'il faisoit tomber la sphère la moins pesante de la hauteur de 9 pouces, ou $\frac{1}{2}$ de pied, elle faisoit une impression sur l'argille, dont le diamètre étoit de $\frac{61}{800}$ de celui de la sphère; c'est-à-dire, de $\frac{61}{800}$ de pied. (*Ibid.* 855.). Il est aisé, d'après ces données, de concevoir les calculs de ce Scolie. Soit A la sphère, ou le corps choquant de l'expérience citée, AR le corps choqué, ou l'argille sur laquelle on faisoit tomber la sphère A : soit nommé $2a$ le diamètre SP de la sphère, $2y$ le diamètre GI de l'impression qu'elle formoit sur l'argille, & x la profondeur PK de la même impression, ou la flèche du segment $GPIK$; on aura $a = \frac{1}{16}$, & $y = \frac{61}{1600}$. Ceci posé, par la propriété du cercle $yy = 2ax - xx$, donc $x = a \pm (a - yy)^{\frac{1}{2}}$, ou simplement $x = a - (a - yy)^{\frac{1}{2}}$, puisque, dans le cas dont il s'agit ici, il est évident qu'on a $x < a$. Substituant, dans cette équation, à la place des lettres, leurs valeurs numériques, on a $x = \frac{1}{16} - \left(\frac{10000 - 61.61}{1600} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{100 - (10000 - 61.61)^{\frac{1}{2}}}{1600} = \frac{3}{200}$.

La valeur de I , ou de la plus grande impression, est la solidité du segment $GPIK$: pour la calculer, je représente par c la circonférence du cercle dont le diamètre est l'unité, alors $2cy$ sera la circonférence qui termine l'impression, & dont $GI = 2y$ est le diamètre; $2cy^{\frac{2}{3}} = cy^2$ en sera la surface; & $cy^2 dx$ sera un des éléments de la solidité de la sphère. Substituant pour yy sa valeur $2ax - xx$, cet élément devient $2acx dx - cx^2 dx$, & en intégrant, on aura la solidité d'un segment quelconque de la sphère $= f(2acx dx - cx^2 dx) = acx^2 - \frac{1}{3}cx^3 = cx^2(a - \frac{1}{3}x)$. Si l'on fait $x = 2a$, on aura la solidité de la sphère entière $= 4ac^2(\frac{2}{3}a) = \frac{8}{3}ac^2(\frac{2}{3}a) = \frac{8ac^3}{3}$. Remarquons en passant que l'expression générale que nous venons de trouver, étant traduite en langage ordinaire, fait voir que la solidité d'un segment sphérique, est égale à celle d'un cylindre dont le rayon de la base est la flèche du segment, & dont la hauteur est le rayon de la sphère moins le tiers de la flèche. Mettant pour a sa valeur $\frac{1}{16}$, on a $I = cx^2 \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{3}x \right)$. Faisant la même substitution dans la solidité de la sphère, elle devient $\frac{4c^3}{3 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16}$: mais comme il s'agit ici de la sphère la moins pesante, qui n'est que le tiers de la plus pesante (291), il faut prendre le tiers de cette expression, & on aura $\frac{4c^3}{9 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16}$ pour cette solidité. Il est évident qu'on peut prendre cette quantité pour représenter A , puisque l'auteur n'a en vue ici que de trouver l'expression de la dureté des sphères que le Docteur *s. Gravesande* a soumises à l'expérience, & de faire voir que toutes les expériences donnent le même résultat: car ces sphères étant d'une même matière, elles ont leurs masses proportionnelles à leurs volumes. Mais s'il s'agissoit de comparer les duretés de plusieurs sphères de différentes matières, il seroit absolument nécessaire de prendre pour A le poids absolu de chacune, parce que les poids sont proportionnels aux masses, au lieu que les volumes ne le sont pas. Les calculs du reste de ce Scolie sont si aisés, d'après ce que nous venons de dire, que nous ne croyons pas nécessaire de nous y arrêter plus long temps. Notre résultat est différent de celui de l'Auteur qui donne $D = 200 \frac{3500}{2736}$; mais il est évident qu'il y a une faute dans l'original.

l'unité

l'unité. Celle de A , qui est la masse totale de la sphere $= \frac{4c}{9.16.16.16}$, ce qui donne $a = \frac{4.32.c}{9.16.16.16}$ (290.). Ces valeurs de a & de I étant substituées dans l'équation $D = \frac{a(c+r)}{I}$, donnent $D = \frac{c+r}{6x(3-16x)} = \frac{\frac{1+1}{4+160}}{\frac{6.3}{40000}(3-\frac{1}{100})} = 205 \frac{100}{111}$. On aura le même résultat, à quelques petites différences près, en calculant d'après les autres expériences. On trouvera de la même manière la valeur de D , avec quelque matière qu'on fasse les expériences.

COROLLAIRE II.

(307.) Ayant trouvé la valeur de D par l'équation
 $D = \frac{AB(U-V)^2 + (aB-aA)(x+r)}{(A+B)I}$, on trouvera de même celle de D' : car ayant $DfHdx = D'fH'dz$, ou $DI = D'I'$, I' marquant la grandeur de la plus grande impression faite dans le corps A , on aura $D' = \frac{DI}{I'}$. Calculant donc, d'après l'expérience, la valeur de I' , on aura celle de D' .

PROPOSITION XLI.

(308.) La plus grande force de percussion est celle qui agit au moment que s'achève l'impression totale.

A l'instant de l'action de la plus grande force de percussion, la différentielle de π , ou de son égale $\frac{DH.D'H'}{DH+D'H'}$ est $= 0$; c'est-à-dire que $\frac{H'dH}{DH+D'H'} + \frac{HdH'}{DH+D'H'} - \frac{HH'(DdH+D'dH')}{(DH+D'H')^2} = 0$; ou en réduisant, . . .
 $D'H'^2dH + DH^2dH' = 0$; mais cette quantité ne peut être zéro, sans que les différentielles dH & dH' ne soient aussi zéro; c'est-à-dire, sans que les amplitudes H & H' , ou les impressions, n'aient reçu toute l'augmentation qu'elles peuvent avoir. Donc la plus grande force de percussion est celle qui agit au moment que s'achève l'impression totale.

PROPOSITION XLII.

(309.) Trouver l'expression de la force de percussion π .

La force de percussion, à quelque instant du choc que ce soit, est $\pi = \frac{DH.D'H'}{DH+D'H'}$. Substituant, dans cette équation, la valeur de $D' = \frac{DI}{I'}$ (307.), on aura $\pi = \frac{D.HIH'}{I(DH+\frac{DIH'}{I})} = \frac{DHIH'}{HI'+HI}$. Substituant main-

tenant, dans cette équation, la valeur de $D = \frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2 + (aB - bA)(x + i)}{(A+B)I}$ (304), & on aura $\pi = \frac{HH'}{HI + HI'} \left(\frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2 + (aB - bA)(x + i)}{A+B} \right)$. *

S C O L I E.

(310.) On sçait déjà que les quantités I & I' expriment les plus grandes impressions; mais on doit remarquer que les x & z sont aussi les profondeurs des plus grandes impressions, puisque ces quantités sont introduites dans la valeur de π , par la substitution de la valeur de D , prise pour le cas de la plus grande impression (304.). Les quantités H & H' sont donc les seules qu'on doive regarder comme variables dans cette équation, pour obtenir les différentes valeurs de la force π .

C O R O L L A I R E I.

(311.) La plus grande force de percussion étant celle qui a lieu, lorsque les quantités H & H' parviennent à leur plus grande valeur, il s'ensuit qu'en mettant dans l'équation les plus grandes valeurs de H & H' , on aura la plus grande force de percussion.

C O R O L L A I R E I I.

(312.) Dans le cas où $B = \infty$, $V = 0$, & $\frac{D}{D'} = 0$, d'où il résulte $I' = 0$, & $z = 0$ **, on aura $\pi = \frac{H}{I} \left(\frac{1}{2}AU^2 + ax \right)$: & dans la chute des corps par la seule action de la gravité, où l'on a $\frac{1}{2}AU^2 = ae$ (46.), $\pi = \frac{Ha}{I} (e + x)$.

C O R O L L A I R E I I I.

(313.) La force de gravité sera donc à celle de percussion, comme a est à $\frac{Ha}{I}(e+x)$, ou comme 1 est à $\frac{H}{I}(e+x)$; ou enfin comme I est à $H(e+x)$.

* On pourroit penser que cette valeur de π seroit celle de la plus grande force de percussion, puisqu'on l'obtient en y introduisant la valeur de D prise dans le cas de la plus grande impression, qui concourt avec celui de la plus grande force de percussion (308.). Mais il faut remarquer qu'ayant supposé la dureté D constante, on auroit la même valeur pour π , en substituant une valeur de D prise dans une autre circonstance que celle de la plus grande impression, en ayant attention à prendre la valeur de l'impression & de sa profondeur qui correspondent à ce cas. Ainsi cette valeur de π ne peut exprimer la plus grande force de percussion, que dans le cas où H & H' seroient les amplitudes de la plus grande impression.

** On voit facilement que pour avoir $\frac{D}{D'} = 0$, il faut que la dureté du corps A soit infinie à l'égard de celle du corps B ; alors il est évident que la plus grande impression I , & sa profondeur z faite dans le corps A , sont chacune $= 0$.

SCOLIE I.

(314.) Dans les expériences du Docteur *s Gravesande* sur l'argille, on a $H = cx(\frac{1}{4} - x)$; * & (306. *Voyez aussi la note de cet Art.*) $I = cx^2(\frac{1}{16} - \frac{1}{4}x)$: donc on aura $\frac{H}{I} = \frac{cx(\frac{1}{4} - x)}{cx^2(\frac{1}{16} - \frac{1}{4}x)} = \frac{\frac{1}{4} - x}{x(\frac{1}{16} - \frac{1}{4}x)}$; d'où il suit que la force de la gravité est à celle de percussion, comme 1 est à $\frac{(e+x)(\frac{1}{4} - x)}{x(\frac{1}{16} - \frac{1}{4}x)}$ (313.). Dans la première expérience, on avoit $e = \frac{1}{4}$, & l'on a trouvé $x = \frac{1}{100}$. Donc la force de gravité étoit à celle de percussion, comme 1 est à $\frac{(\frac{5}{4} + \frac{1}{100})(\frac{1}{4} - \frac{1}{100})}{\frac{1}{100}(\frac{1}{16} - \frac{1}{100})}$; ou comme 1 est à $97\frac{11}{12}$; de sorte que la force de percussion, quoique dans un corps mou comme l'argille, & la sphere tombant seulement de 9 pouces de hauteur, étoit plus de 97 fois plus grande que celle de la gravité.

COROLLAIRE IV.

(315.) Si $B = \infty$, $V = 0$, & $D = D'$, & qu'on ait à-peu-près $H = H'$, $I = I'$, $\zeta = x$, on aura $\pi = \frac{H}{2I}(\frac{1}{2}AU^2 + 2ax)$; & dans la chute des corps qui tombent par la gravité, $\pi = \frac{H_a}{2I}(e + 2x)$.

COROLLAIRE V.

(316.) La force de gravité sera donc, dans ce cas, à celle de percussion, comme 1 est à $\frac{H}{2I}(e + 2x)$.

SCOLIE II.

(317.) Lorsque deux corps très-durs, comme le sont deux corps de fer, viennent à se choquer, l'impression I qui se fait dans chacun, est presque infiniment petite par rapport à $H(e + 2x)$: donc, dans ce cas, la force de percussion est presque infinie, à l'égard de celle de gravité. Prenons pour exemple le coup d'un marteau sur une enclume. Puisque I représente la grandeur de l'impression, qui doit être comme le produit de H , qui est son amplitude, par une quantité proportionnelle à sa profondeur, que nous savons par l'expérience être extrêmement petite, nous pouvons supposer $I = H \cdot \frac{1}{k}$, k exprimant un nombre quelconque, tel que $\frac{1}{k}$, soit

* H designe l'amplitude de l'impression, ou la surface du cercle qui termine l'impression (247). Or, par la note de l'article 306, cette surface est cy^2 , qui devient $cx(\frac{1}{4} - x)$ en substituant pour y^2 sa valeur $2ax - xx$, & ensuite pour a sa valeur $\frac{1}{4}$. Le résultat des calculs de ce Scolie est encore erroné; l'Auteur fait la force de gravité à celle de percussion dans le rapport de 1 à $109\frac{7}{12}$. Il est visible que c'est une faute de calcul.

PLANC. I.

encore moindre que la profondeur de l'impression, * qui, lorsqu'elle est la plus grande, ne peut gueres être que de $\frac{1}{11000}$, ou $\frac{1}{12000}$ de pied. Cette valeur de I étant donc substituée dans l'expression, on trouvera que la force de gravité est à celle de percussion, comme 1 est à $\frac{H}{2H \cdot \frac{1}{k}} (c+2x) = \frac{1}{k} (c+2x)$; ou, négligeant x , comme étant

très-petite, comme 1 est à $\frac{1}{k}c$. Maintenant si la vitesse du marteau est équivalente à celle qu'il prendroit en tombant librement de 10 pieds de hauteur; & si nous faisons seulement $k=12000$, on aura la force de gravité du marteau à celle de percussion du même marteau, comme 1 à 60000; c'est-à-dire que cette dernière force sera 60000 fois plus grande que celle de la gravité; & que l'effet du marteau équivaldra à celui que pourroit causer, sur le même point où s'est donné le coup, un poids 60000 fois plus grand que celui du marteau. Ceci suffit déjà pour ne pas être étonné de l'effet prodigieux de la force de percussion.

S C O L I E R I I I.

FIG. 25.

(318.) Cette théorie peut aussi s'appliquer aux cordes; car si l'on imagine que l'une des extrémités d'une corde soit attachée à un point fixe E , & qu'il y ait à l'autre extrémité un poids A ; si on laisse tomber ce poids d'une hauteur quelconque, il est clair que l'action qu'il exerce à la fin de sa chute, lorsque la corde est étendue dans toute sa longueur, comme en EF , est une véritable percussion. Pour appliquer les mêmes formules à ce cas, H désignera la section perpendiculaire à la corde; D la qualité de la matière dont elle est faite, ou sa force; I le produit de H par la plus grande quantité dont la corde s'allonge dans l'action; & enfin x la quantité dont elle s'allonge dans un cas quelconque. On remarquera, en outre, que le point fixe E , étant celui sur lequel s'exerce l'action, doit être considéré comme un corps infini: on aura donc $B=\infty$, $V=0$, $\frac{D}{B}=0$, $I'=0$, & $z=0$. Ainsi la formule qui convient à ce cas est (312.) $\pi = \frac{H}{I} \cdot AU + ax$; U désignant la vitesse du corps A à l'instant qu'il parvient au point le plus bas de sa chute; ou bien, en supposant $I=HX$, X marquant

* Ceci suppose que l'impression est moins étendue dans le fond qu'à la surface, ce qui a toujours lieu (252 & 294.). Si l'amplitude étoit la même dans toute la profondeur de l'impression, ce qui ne peut avoir lieu dans les corps durs & tenaces, alors $\frac{1}{k}$ seroit égal à la profondeur de l'impression.

toute la quantité dont la corde peut s'allonger jusqu'à ce qu'elle se rompe, ou qu'elle soit sur le point de se rompre, $\pi = \frac{1}{X} (\frac{1}{2}AU^2 + ax)$; & lorsqu'il s'agit de la chute des corps qui tombent par l'action seule de la gravité, cette équation devient $\pi = \frac{a}{X}(c+x)$.

Lorsque le corps A est seulement suspendu à la corde, pour qu'elle le soutienne, sans qu'il y ait aucune chute, $c=0$; donc, dans ce cas, $\pi = \frac{ax}{X}$; & si le poids du corps A étoit tel qu'il s'en fallût infiniment peu qu'il ne fit rompre la corde, on auroit $x=X$, & $\pi=a$; c'est-à-dire que la force de percussion, qui, dans ce cas, est une force de pression, est égale au poids du corps, que nous pouvons appeler P . Soit nommé p le plus grand poids dont la même corde puisse supporter l'action, en supposant qu'il tombe de la hauteur e ; comme cette force de résistance dans la corde est constante, nous aurons $P = \frac{p}{X}(c+X)$ pour le point précis de sa rupture, ou pour celui où elle est infiniment près de se rompre dans la chute du corps p ; c'est-à-dire que le poids p qui, par sa chute de la hauteur e , auroit précisément la force nécessaire pour rompre la corde, est donné par l'équation $p = \frac{PX}{c+X}$. La quantité X est proportionnelle à la longueur de la corde; puisque chacune de ses parties s'allonge proportionnellement. Donc si nous exprimons par l la longueur de la corde, & par $\frac{1}{n}$, le rapport suivant lequel elle s'allonge relativement à sa

longueur, on aura $X = \frac{l}{n}$, & $p = \frac{P \cdot \frac{l}{n}}{e + \frac{l}{n}} = \frac{Pl}{ne+l}$.

On ne doit pas entendre ici, par l'allongement d'une corde, la quantité dont elle s'allonge effectivement aux premiers efforts qu'elle fait lorsqu'elle est neuve; mais l'allongement dont elle est susceptible, depuis l'état où elle se trouve après s'être rétablie, ayant supporté ces premiers efforts, & qu'elle vient à s'allonger de nouveau par l'action d'une puissance; cet allongement n'étant réellement que la quantité dont la corde raccourcit, en revenant dans sa longueur ordinaire, par l'effet de son élasticité naturelle.

* Cette équation suit naturellement de ce que, dans la rupture de la corde par la seule suspension du poids P , on a $\pi=a=P$; & que, dans le cas de la même rupture par la chute du corps p de la hauteur e , on a $\pi=p$; ce qui donne $\pi = \frac{P}{p}(c+X)$. Or, comme la résistance dont la corde est capable jusqu'à sa rupture, est constante, de quelque manière que cette rupture se fasse, on a la puissance π , qui produit cet effet dans le premier cas, égale à la puissance π qui le produit dans le second, ou $P = \frac{p}{X}(c+X)$.

On sçait par l'expérience qu'une corde de chanvre, de 3 pouces de circonférence, peut soutenir; lorsqu'elle est bien faite, jusqu'à la charge de 65 quintaux, & qu'en ce cas elle s'allonge de $\frac{1}{10}$. On aura donc $P=65$, & $\frac{1}{n}=\frac{1}{10}$, ou $n=10$, ce qui donne $P=\frac{651}{10+1}$. Si l'on suppose donc que la corde ait 100 pieds de longueur, & qu'on laisse tomber le poids p qui lui est attaché, de cette même hauteur de 100 pieds, on aura $p=\frac{651 \times 100}{100+1}=\frac{651}{1.01}=5$ quintaux $\frac{1}{2}$; c'est le moindre poids qui puisse faire rompre la corde*. On voit, par la formule, & par tout ce que nous venons de dire, que plus la corde sera longue, plus elle résistera dans la percussion; ou, comme disent les Marins Espagnols, dans l'*Estrechon*: car si, au lieu de 100 pieds de longueur, la corde en avoit seulement 50, on auroit $p=\frac{651 \times 10}{100+1}=\frac{651}{10.1}=3$ quintaux $\frac{1}{2}$; ce poids tombant de la même hauteur de 100 pieds, seroit suffisant pour rompre la corde.

PROPOSITION XLIII.

(319.) Trouver le temps de la durée du choc.

Ayant vu (258.) que $dt=\frac{dx+dz}{u-v}$, & (277.) que $u-v=\dots$
 $\pm \left((U-V)^2 + \frac{(AB-B^2A)(x+t)}{\frac{1}{2}AB} - \frac{(A+B)DfHdx}{\frac{1}{2}AB} \right)^{\frac{1}{2}}$, on aura, en substituant cette valeur dans l'équation précédente, ...
 $dt=\frac{dx+dz}{\pm \left((U-V)^2 + \frac{(AB-B^2A)(x+t)}{\frac{1}{2}AB} - \frac{(A+B)DfHdx}{\frac{1}{2}AB} \right)^{\frac{1}{2}}}$; ou en multipliant le numérateur & le dénominateur par $\left(\frac{\frac{1}{2}AB}{(A+B)D} \right)^{\frac{1}{2}}$, ...

$$dt=\frac{\left(\frac{AB}{2D(A+B)} \right)^{\frac{1}{2}}(dx+dz)}{\pm \left(\frac{AB(U-V)^2}{2D(A+B)} + \frac{(AB-B^2A)(x+t)}{D(A+B)} - fHdx \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

COROLLAIRE I.

(320.) Dans le cas où l'on auroit à très-peu près $z=0$, & $dz=0$, on auroit $dt=\frac{\left(\frac{AB}{2D(A+B)} \right)^{\frac{1}{2}} dx}{\pm \left(\frac{AB(U-V)^2}{2D(A+B)} + \frac{(AB-B^2A)x}{D(A+B)} - fHdx \right)^{\frac{1}{2}}}.$

* Ce poids est le moindre qui puisse faire rompre la corde lorsqu'on le fait tomber de la hauteur de 100 pieds; mais si on le faisoit tomber d'une hauteur plus considérable, ce qui pourroit avoir lieu, dans la supposition présente, en disposant le point de suspension de manière qu'il ne gênât pas le corps dans sa chute; alors e pourroit être $=21$, & il est évident que p pourroit alors n'être que de 3 quintaux $\frac{1}{2}$; c'est le moindre poids possible qui puisse faire rompre la corde.

COROLLAIRE II.

(321.) Dans le cas où $z=x$, & $dz=dx$, on a :

$$dt = \frac{\left(\frac{2AB}{D(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}} dx}{\pm \left(\frac{AB(U-V)^2}{2D(A+B)} + \frac{2(aB-\beta A)x}{D(A+B)} - \int Hdx\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

COROLLAIRE III.

(322.) Pour déduire de ce second cas le précédent, il ne sera donc nécessaire que de diviser par 2 le terme dans lequel se trouve $aB-\beta A$, & de diviser ensuite toute l'expression du temps, pareillement par 2.

S C O L I E.

(323.) Il ne reste donc qu'à intégrer pour avoir la valeur de t . Cette opération dépend de la valeur qu'on donnera à H , & celle-ci dépend de la figure, de la disposition, & de la dureté réciproque des deux corps choqués. Pour cela nous pouvons supposer $\int Hdx$ égale à une fonction quelconque de x avec des constantes; car quoi-qu'il ne soit pas possible que cette supposition convienne à tous les corps, il s'en trouvera toujours un, ou quelques-uns auxquels elle correspondra.

P R O P O S I T I O N X L I V.

(324.) Trouver la valeur de la durée du choc, en supposant $\int Hdx=Qx^2$, $z=x$, & $dz=dx$; Q étant une constante.

L'équation de l'Art. 319 se réduit, dans ce cas, à :

$$dt = \frac{\left(\frac{2AB}{D(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}} dx}{\pm \left(\frac{AB(U-V)^2}{2D(A+B)} + \frac{2(aB-\beta A)x}{D(A+B)} - Qx^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

ou, en divisant le numérateur & le dénominateur par $Q^{\frac{1}{2}}$, à $dt = \frac{\left(\frac{2AB}{QD(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}} dx}{\pm \left(\frac{AB(U-V)^2}{2QD(A+B)} + \frac{2(aB-\beta A)x}{QD(A+B)} - x^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$

Faisant, dans cette expression, $\frac{AB(U-V)^2}{2QD(A+B)} + \frac{(aB-\beta A)^2}{Q^2D^2(A+B)^2} = R^2$, on

$$\text{aura } dt = \frac{\left(\frac{2AB}{R^2QD(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}} Rdx}{\left(R^2 - \left(x - \frac{(aB-\beta A)}{QD(A+B)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}; \text{ \& en intégrant, on trouvera}$$

$t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\text{Arc sin } \frac{aB-\beta A}{RDQ(A+B)} + \text{Arc sin} \left(\frac{x}{R} - \frac{aB-\beta A}{RDQ(A+B)} \right) \right)$, pour le temps dans lequel se forme, ou augmente, l'impression; &

$t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(C + \text{Arc sin } \frac{aB - \beta A}{RDQ(A+B)} - \text{Arc sin } \left(\frac{x}{R} - \frac{aB - \beta A}{RDQ(A+B)} \right) \right)$,
 pour le temps dans lequel l'impression va en diminuant, en comptant
 pareillement depuis le commencement du choc, C marquant la demi-
 circonférence d'un cercle, dont le rayon est l'unité. *

COROLLAIRE I.

(325.) Ces deux temps doivent être égaux à l'instant où s'achève
 la plus grande impression, puisque ce cas correspond à l'un & à
 l'autre : donc au moment de la plus grande impression, on aura
 $\text{Arc sin } \left(\frac{x}{R} - \frac{aB - \beta A}{RDQ(A+B)} \right) = C - \text{Arc sin } \left(\frac{x}{R} - \frac{aB - \beta A}{RDQ(A+B)} \right) \dots \dots \dots$
 ou $\text{Arc sin } \left(\frac{x}{R} - \frac{aB - \beta A}{RDQ(A+B)} \right) = \frac{1}{2}C$. Substituant cette valeur dans l'une
 quelconque des deux expressions du temps, on aura, pour tout le

* Comme les calculs de cette Proposition pourroient embarrasser quelques Lecteurs, nous
 allons les développer un peu plus que l'Auteur ne l'a fait.

Le dénominateur de l'expression $dt = \frac{\left(\frac{2AB}{QD(A+B)} \right)^{\frac{1}{2}} dx}{\pm \left(\frac{AB(U-V)^2}{2QD(A+B)} + \frac{2(aB - \beta A)x}{QD(A+B)} - x^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$ contient le
 carré de x , & un autre terme affecté de x au premier degré. Si l'on ajoute, & si l'on
 retranche de ce dénominateur le carré de la moitié du multiplicateur de x , on n'en changera
 point la valeur, & il contiendra alors un carré parfait ; c'est-à-dire que ce dénominateur sera
 $\pm \left(\frac{AB(U-V)^2}{2QD(A+B)} + \left(\frac{aB - \beta A}{QD(A+B)} \right)^2 - \left(\frac{aB - \beta A}{QD(A+B)} \right)x + \frac{2(aB - \beta A)x}{QD(A+B)} - x^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$
 $\pm \left(\frac{AB(U-V)^2}{2QD(A+B)} + \left(\frac{aB - \beta A}{QD(A+B)} \right)^2 - \left(x - \frac{aB - \beta A}{QD(A+B)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Faisant maintenant . . .
 $\frac{AB(U-V)^2}{2QD(A+B)} + \left(\frac{aB - \beta A}{QD(A+B)} \right)^2 = R^2$, & substituant dans la valeur de dt , on aura . . .
 $dt = \frac{\left(\frac{2AB}{QD(A+B)} \right)^{\frac{1}{2}} dx}{\pm \left(R^2 - \left(x - \frac{aB - \beta A}{QD(A+B)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$.

Ceci posé, supposons que EI représente un arc quelconque, CI son sinus, & l'arc infini-
 niment petit li sa différentielle ; si nous menons ic parallèle à CI , & la perpendiculaire lr ,
 ainsi que le rayon IL , le triangle lri pourra être considéré comme rectiligne, & semblable
 au triangle ICL , ce qui donnera $CL : IL :: ri : li$. Faisant donc $CI = u$, $IL = r$, l'arc $EI = a$,
 nous aurons $li = da$, $ri = du$, $CL = (IL^2 - CI^2)^{\frac{1}{2}} = (r^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}$; par conséquent la proportion
 précédente se change en celle-ci $(r^2 - u^2)^{\frac{1}{2}} : r :: du : da = \frac{rdu}{(r^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}}$; expression générale de
 l'élément d'un arc de cercle, dont le sinus $= u$, & le rayon $= r$. Remarquons maintenant que
 da est également la différentielle de l'arc FI supplément de EI , & que pour cet arc supplé-
 m. taire, le sinus CI augmentant de du , l'arc diminue de da ; donc da est alors négative : par con-
 séquent $\pm \frac{rdu}{(r^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}}$ est l'élément d'un arc de cercle, ou de son supplément.

Si l'on multiplie par R un des facteurs du numérateur de la valeur de dt , & si l'on divise
 temps

temps que les corps emploient à former la plus grande impression, PLANC. A.

$$t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} C + \text{Arc sin} \frac{AB-BA}{RDQ(A+B)} \right).$$

en même temps l'autre facteur aussi par R , cela n'en changera point la valeur, & donnera

$$dt = \frac{\left(\frac{2AB}{R^2 DQ(A+B)} \right)^{\frac{1}{2}} R dx}{\pm \left(R^2 - \left(x - \frac{AB-BA}{DQ(A+B)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{2AB}{R^2 DQ(A+B)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\pm \left(R^2 - \left(x - \frac{AB-BA}{DQ(A+B)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right);$$

expression dont le second facteur est absolument identique avec $\frac{r du}{\pm (r^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}}$, & par conséquent

ce second facteur représente l'élément d'un arc de cercle, dont le sinus est $x - \frac{AB-BA}{DQ(A+B)}$ & le rayon $= R$; ou bien l'élément de son supplément à 180° .

Pour réduire l'expression de cet élément à ce qu'elle seroit, si le rayon du cercle étoit l'unité, il est évident qu'il ne s'agit que de la diviser par R ; ou, ce qui revient au même, de diviser son numérateur par R^2 , & son dénominateur par R , afin que l'expression du sinus se trouvant aussi divisée par R , la forme nécessaire à l'intégration soit conservée. Faisant donc cette division, & multipliant en même temps le premier facteur de dt par la même quantité R , pour que la valeur de dt ne soit pas changée, nous aurons

$$dt = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\frac{dx}{R}}{\left(1 - \left(\frac{x}{R} - \frac{AB-BA}{RDQ(A+B)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \right); \text{ quantité dont le second fac-}$$

teur représente l'élément d'un arc de cercle, dont le rayon $= 1$, & le sinus $= \frac{x}{R} - \frac{AB-BA}{RDQ(A+B)}$.

Donc, si l'on intègre cette équation, on aura $t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\text{Arc sin} \left(\frac{x}{R} - \frac{AB-BA}{RDQ(A+B)} \right) \right) + M$. (M représentant la constante qui complète l'intégrale).

Maintenant si l'on considère que cette quantité doit être zéro au commencement du choc; c'est-à-dire, lorsque $x = 0$, & qu'alors $\text{sin} \left(\frac{x}{R} - \frac{AB-BA}{RDQ(A+B)} \right)$ devient $-\text{sin} \frac{AB-BA}{RDQ(A+B)}$,

on aura $\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(-\text{Arc sin} \frac{AB-BA}{RDQ(A+B)} \right) + M = 0$, & par conséquent $M =$

$\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\text{Arc sin} \frac{AB-BA}{RDQ(A+B)} \right)$. Substituant cette quantité dans la valeur de t , on aura enfin

$t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\text{Arc sin} \left(\frac{x}{R} - \frac{AB-BA}{RDQ(A+B)} \right) + \text{Arc sin} \frac{AB-BA}{RDQ(A+B)} \right)$; c'est la

première valeur donnée par l'Auteur. Pour trouver la seconde, on se rappellera ce que nous venons de dire, à savoir, que le second facteur de la valeur de dt , considéré comme affecté du signe $-$,

représente l'élément d'un arc de cercle dont le sinus $= \frac{x}{R} - \frac{AB-BA}{RDQ(A+B)}$;

or cet arc a pour expression $C - \text{Arc sin} \left(\frac{x}{R} - \frac{AB-BA}{RDQ(A+B)} \right)$, C désignant la demi-circon-

férence d'un cercle dont le rayon $= 1$. Intégrant donc l'équation précédente sous ce dernier point de vue, & ajoutant la même constante pour compléter l'intégrale, on aura

$$t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(C + \text{Arc sin} \frac{AB-BA}{RDQ(A+B)} - \text{Arc sin} \left(\frac{x}{R} - \frac{AB-BA}{RDQ(A+B)} \right) \right).$$

On remarquera qu'on a ajouté la même constante dans cette seconde intégration que dans la première, afin que le temps t soit toujours compté depuis le commencement du choc, c'est-à-dire, avant qu'il y eût aucune impression de formée. Si l'on avoit cherché une constante

COROLLAIRE II.

(326.) Dans les corps parfaitement élastiques l'impression diminue au point que x devient $= 0$: donc , en substituant cette valeur de x dans la seconde équation du temps, on aura, pour l'expression de toute la durée du choc, lorsque les corps sont parfaitement élastiques, $t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(C + 2A\pi \sin \frac{aB - \beta A}{RQD(A+B)} \right)$.

COROLLAIRE III.

(327.) Il suit des deux Corollaires précédents, que pour les corps parfaitement élastiques, le temps de toute la durée du choc est double de celui qu'ils emploient à former la plus grande impression; ou, ce qui est la même chose, le temps qui s'écoule depuis le commencement du choc, jusqu'à ce que la plus grande impression soit achevée, est égal à celui qui s'écoule depuis le moment de cette plus grande impression, jusqu'à la fin du choc.

COROLLAIRE IV.

(328.) Comme les corps qui n'ont que peu, ou point d'élasticité sensible, terminent leur choc au moment de la plus grande impression, le temps de la durée du choc de ces corps sera donc . . .

$$t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} C + A\pi \sin \frac{aB - \beta A}{RQD(A+B)} \right).$$

COROLLAIRE V.

(329.) Si l'on avoit $\alpha = 0$ & $\beta = 0$, on auroit pour le temps dans lequel se forme la plus grande impression, ou pour le temps de la durée du choc des corps qui n'ont aucune élasticité sensible,

$$t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} C; \text{ \& pour celui de la durée du choc des corps d'une élasticité parfaite, ou à très-peu près parfaite, } t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot C.$$

COROLLAIRE VI.

(330.) On voit que la quantité R , qui est l'unique qui contienne

particulière à ce second cas, qui n'a lieu qu'après que la plus grande impression est formée, c'est-à-dire, dans la rétrogradation (277.), on auroit trouvé la même expression que la précédente, mais avec des signes contraires, comme cela doit être; alors t auroit marqué, dans ce second cas, le temps écoulé depuis l'instant où la plus grande impression est achevée jusqu'à la fin du choc; ce qui auroit fait voir aussi que ce temps est le même que celui qui s'écoule depuis le commencement du choc, jusqu'à ce que la plus grande impression soit tout-à fait formée; vérité que l'Auteur démontre plus bas, Art. 327. On voit encore clairement que le second temps que nous avons trouvé est plus grand que le premier, comme cela doit être, d'après la théorie de la percussion.

les vitesses primitives U & V , ne se trouve point dans ces expressions du temps ; il faut en conclure que dans les corps qui se choquent , sans être animés par des puissances , la durée du choc ne dépend en aucune manière des vitesses avec lesquelles ils se choquent ; & cette durée sera toujours la même , quelles que soient ces vitesses.

COROLLAIRE VII.

(331.) Si l'impression se formoit par la seule pression , ou action des puissances α & β , les vitesses U & V étant $=0$, comme il arrive dans les corps pesants , lorsqu'un corps est posé sur un autre , & le presse seulement par son poids , on auroit $R = \frac{(\alpha\beta - \beta\alpha)}{DQ(A+B)}$. Cette valeur de R étant substituée dans les expressions du temps $t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(C + 2Arc \sin \frac{\alpha\beta - \beta\alpha}{RDQ(A+B)} \right)$, & $t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(C + 2Arc \sin \frac{\alpha\beta - \beta\alpha}{RDQ(A+B)} \right)$, on aura le temps dans lequel se forme la plus grande impression , & son double , qui est celui de toute la durée du choc dans les corps d'une élasticité parfaite , ou à peu près , lorsque U & $V=0$; & ces expressions sont $t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}} . C$, & $t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}} . 2C$.

COROLLAIRE VIII.

(332.) Les temps de la durée du choc des corps , lorsqu'ils ne sont animés que par les puissances , sans le concours d'aucune vitesse primitive , sont donc doubles des temps de la durée du choc des mêmes corps , lorsqu'aucune puissance ne les anime , & que ce sont seulement les vitesses primitives qui produisent le choc.

COROLLAIRE IX.

(333.) Comme les expressions du temps , dans le cas où les corps ne sont animés que par l'action des puissances , ne renferment point ces puissances , il est évident que ce temps sera le même , quelles que soient ces puissances.

COROLLAIRE X.

(334.) Si nous supposons la profondeur de la plus grande impression $= X$, on aura $QX^2 = I$ (286 , 287 & 324.) , ce qui donne $Q = \frac{I}{X^2}$; & par conséquent (304.) $D = \frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2 + (\alpha\beta - \beta\alpha)2X}{(A+B)I}$ * ; d'où

* On ne doit pas perdre de vue la supposition qui a été faite , Art. 311 , & au commencement de cette Proposition , Art. 324 , qui est que $x = t$, & par conséquent que $x + t = 2x$, ou que $X + Z = 2X$, lorsqu'il s'agit des plus grandes impressions.

il résulte $DQ(A+B) = \frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2 + (aB-\beta A)2X}{X^2}$. Celaposté, prenons

l'équation $R^2 = \frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2}{DQ(A+B)} + \frac{(aB-\beta A)^2}{D^2Q^2(A+B)^2}$, & nous en déduirons

$$R^2 D^2 Q^2 (A+B)^2 = \frac{1}{2}ABDQ(A+B)(U-V)^2 + (aB-\beta A)^2 = \frac{\frac{1}{2}AB^2(U-V)^2 + AB(U-V)^2(aB-\beta A)X + (aB-\beta A)^2X^2}{X^2}, \text{ d'où l'on tire } RDQ(A+B)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2 + (aB-\beta A)X}{X}. \text{ Substituant ces valeurs de } DQ(A+B),$$

& de $RDQ(A+B)$, dans les expressions du temps $t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}C + \text{Arc sin} \frac{aB-\beta A}{RDQ(A+B)}\right); \dots\dots\dots$

& $t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(C + 2 \text{Arc sin} \frac{aB-\beta A}{RDQ(A+B)}\right)$, elles deviendront...

$$t = \left(\frac{2ABX^2}{\frac{1}{2}AB(U-V)^2 + 2(aB-\beta A)X}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}C + \text{Arc sin} \frac{(aB-\beta A)X}{\frac{1}{2}AB(U-V)^2 + (aB-\beta A)X}\right); \&$$

$$t = \left(\frac{2ABX^2}{\frac{1}{2}AB(U-V)^2 + 2(aB-\beta A)X}\right)^{\frac{1}{2}} \left(C + 2 \text{Arc sin} \frac{(aB-\beta A)X}{\frac{1}{2}AB(U-V)^2 + (aB-\beta A)X}\right).$$

COROLLAIRE XI.

(335.) Si l'on avoit $a=0$ & $\beta=0$, le temps dans lequel se forme la plus grande impression, seroit $t = \left(\frac{4X^2}{(U-V)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}C = \frac{CX}{U-V}$.

SCOLIE,

(336.) Soit, par exemple, la vitesse respective $U-V$, avec laquelle se choquent deux corps sphériques, d'un pied par seconde. Puisque $C=3,14$, on aura $t=3,14 \cdot X$; & si l'on suppose que la profondeur de l'impression faite en eux pendant le choc, soit de $\frac{1}{16}$ de pied, ou d'un peu moins d'une demi-ligne, t sera $= \frac{1}{16}$ de seconde $= 36^{10}$; temps véritablement beaucoup trop court pour qu'il puisse jamais être sensible. Si la dureté des deux corps étoit plus grande, l'impression seroit alors moins profonde, & par conséquent le temps plus court; en sorte que si la dureté étoit presque infinie, le temps seroit presque infiniment petit.

COROLLAIRE XII.

(337.) Si les corps agissoient seulement par la pression, c'est-à-dire, seulement par l'action des puissances, on auroit $U=0$ & $V=0$, ou $U-V=0$; ce qui réduit le temps dans lequel se forme la plus grande impression, à $t = \left(\frac{ABX}{(aB-\beta A)}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot C^{**}$. Si, outre cela, on avoit $B=\infty$,

* Il est très-aisé de voir qu'on trouve cette expression, en mettant dans le second membre de la précédente, pour $DQ(A+B)$ sa valeur, & en réduisant le tout en fraction.

** Car cette expression devient $t = \left(\frac{ABX}{aB-\beta A}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}C + \text{Arc sin}(1)\right) = \left(\frac{ABX}{aB-\beta A}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot C$, puisque $\text{Arc sin}(1) = \frac{1}{2}C$.

cette expression se réduiroit à $t = (\frac{AX}{a})^{\frac{1}{2}} \cdot C$. Mais, dans les corps graves, on a (52.) $A = \frac{1}{12}a$; donc $t = (\frac{1}{12}X)^{\frac{1}{2}}C$. Si donc on suppose qu'un corps posé sur un autre, fait une impression dont la profondeur est de $\frac{1}{19,7192}^*$, ou d'un peu plus de $\frac{1}{20}$ de ligne $= \frac{1}{144 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 14 \cdot 3 \cdot 14}$ de pied, le temps dans lequel se formera la plus grande impression sera $= (\frac{1}{32 \cdot 2 \cdot 144 \cdot 3 \cdot 14 \cdot 3 \cdot 14})^{\frac{1}{2}} \cdot 3,14 = (\frac{1}{8,12})$ de seconde, $= 37''^{\frac{1}{2}}$.

COROLLAIRE XIII.

(338.) Si $B = \infty$, & $V = 0$, l'expression du temps dans lequel se formera la plus grande impression, sera
 $t = (\frac{2AX^2}{\frac{1}{2}AU^2 + 2aX})^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2}C + \text{Arc sin } \frac{aX}{\frac{1}{2}AU^2 + aX})$: ou, s'il s'agit des corps graves dans lesquels $A = \frac{1}{12}a$, & $\frac{1}{2}AU^2 = ae$ (46.), e exprimant la hauteur d'où doit tomber le corps pour acquérir la vitesse U , on aura $t = (\frac{X^2}{16(e + 2X)})^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2}C + \text{Arc sin } \frac{X}{e + X})$.

COROLLAIRE XIV.

(339.) Si X étoit susceptible d'être négligée à l'égard de e , cette expression du temps se réduiroit à $t = \frac{CX}{8\sqrt{e}}$. Si donc un corps de fer faisoit, en tombant sur une enclume, une impression dont la profondeur fût de $\frac{1}{12}$ de pied, ou d'un peu moins d'une demi-ligne, le temps qu'il emploieroit à faire cette impression, seroit $t = \frac{1}{800\sqrt{e}}$: de sorte que si ce corps étoit tombé de 36 pieds de hauteur, on auroit $t = \frac{1}{11,11} = 45''$.

COROLLAIRE XV.

(340.) On peut trouver de la même manière les temps dans lesquels se forment les plus grandes impressions, dans la supposition de $z = 0$, & $dz = 0$; c'est-à-dire, dans le cas où l'un des corps seroit infiniment dur par rapport à l'autre; car, par ce qui a été dit (322.), l'expression donnée, Art. 334, se réduit, pour ce cas, à $t = (\frac{ABX^2}{AB(U-V)^2 + 2(aB - \beta A)X})^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2}C + \text{Arc sin } \frac{(aB - \beta A)X}{AB(U-V)^2 + (aB - \beta A)X})$. Il en sera de même pour tout autre cas, en intégrant l'expression générale donnée dans l'Art. 319.

* Le dénominateur de cette fraction est le double du carré de 3,14; c'est-à-dire qu'il est $= 2 \cdot 3 \cdot 14 \cdot 3 \cdot 14$.

PROPOSITION XLV.

(341.) *Trouver le temps de la durée du choc, dans le cas où la force de percussion π seroit constante.*

Ayant trouvé ci-dessus (269.) $(\alpha B - \beta A - \pi(A+B))dt = AB(du - dv)$: en intégrant cette équation (260, note.), & divisant par $\alpha B - \beta A - \pi(A+B)$, il en résultera $t = \frac{AB(u-v) - (U-V)}{\alpha B - \beta A - \pi(A+B)}$.

COROLLAIRE I.

(342.) Dans le cas de la plus grande impression, on aura...
 $t = \frac{-AB(U-V)}{\alpha B - \beta A - \pi(A+B)} = \frac{AB(U-V)}{\pi(A+B) - (\alpha B - \beta A)}$.

COROLLAIRE II.

(343.) Si l'on avoit $V=0$, & $B=\infty$, il en résulteroit $t = \frac{A(u-U)}{\pi}$; & dans le cas de la plus grande impression, $t = \frac{AU}{\pi - \alpha}$.

PROPOSITION XLVI.

(344.) *Trouver le centre de percussion.*

Supposons le corps divisé en un nombre infini de petits corps, ou considérons-le comme un système composé d'un nombre infini de petits corps A, B, C , &c. liés entre eux, lequel tourne sur un axe quelconque donné & fixe E , avec une vitesse angulaire déterminée. Supposons encore qu'à chacun des petits corps A, B, C , &c., il y ait une puissance α, β, γ , &c. qui retarde son mouvement, & que toutes ces puissances agissent suivant des directions parallèles DA, FB, GC , &c. Soit de plus P la distance de l'axe au plan parallèle au plan directeur qui passe par le centre de gravité; u la vitesse que perdrait ce centre; A', B', C' , &c. les distances EA, EB, EC , &c. de chacun des corps A, B, C , &c. à l'axe; & δ, ϵ, ξ , &c., les angles EAD, EBF, ECG , que ces distances forment avec les directions suivant lesquelles les puissances agissent.

Cela posé, nous aurons $P : u :: A' : \frac{A'u}{P}$, vitesse que perdra le corps A dans le sens de la perpendiculaire à EA : par la même raison, $\frac{B'u}{P}$ & $\frac{C'u}{P}$, &c. seront celles que perdront les autres corps selon les perpendiculaires à EB, EC , &c. ; & par conséquent $\frac{A'u}{P \sin \delta}$, $\frac{B'u}{P \sin \epsilon}$, $\frac{C'u}{P \sin \xi}$, &c. sont les vitesses que doivent imprimer

Les puissances α , β , γ , &c., pour qu'il en résulte les premières *. Nous aurons donc $(32.) \alpha t = \frac{AA'u}{P \sin \delta}$, $\beta t = \frac{BB'u}{P \sin \epsilon}$, $\gamma t = \frac{CC'u}{P \sin \xi}$, &c. d'où l'on déduit $\alpha = \frac{AA'u}{P t \sin \delta}$, $\beta = \frac{BB'u}{P t \sin \epsilon}$, $\gamma = \frac{CC'u}{P t \sin \xi}$, &c.

Supposons maintenant que x soit la distance de l'axe au plan parallèle au plan directeur dans lequel se trouve le centre de percussion. Par cette supposition, $x - A' \sin \delta$, $x - B' \sin \epsilon$, $x - C' \sin \xi$, &c. seront les distances de chacune des puissances à ce même plan; par conséquent les moments de chaque puissance, relativement au centre de percussion, seront $\frac{AA'u(x - A' \sin \delta)}{P t \sin \delta}$, $\frac{BB'u(x - B' \sin \epsilon)}{P t \sin \epsilon}$, $\frac{CC'u(x - C' \sin \xi)}{P t \sin \xi}$, &c.: & pour qu'il n'y ait point de rotation sur ce centre, il faut (138.) que la somme de ces moments soit égale à zéro; ou en divisant par $\frac{u}{P t}$, il faut qu'on ait $\frac{AA'(x - A' \sin \delta)}{\sin \delta} + \dots + \frac{BB'(x - B' \sin \epsilon)}{\sin \epsilon} + \frac{CC'(x - C' \sin \xi)}{\sin \xi} + \text{&c.} = 0$; d'où l'on tire $\dots + \frac{AA'x}{\sin \delta} + \frac{BB'x}{\sin \epsilon} + \frac{CC'x}{\sin \xi} + \text{&c.} = AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 + \text{&c.}$; & par conséquent $x = \frac{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 + \text{&c.}}{\frac{AA'}{\sin \delta} + \frac{BB'}{\sin \epsilon} + \frac{CC'}{\sin \xi} + \text{&c.}}$, distance du centre de percussion au plan directeur qui coïncide avec l'axe.

COROLLAIRE I.

(345.) Le dénominateur $\frac{AA'}{\sin \delta} + \frac{BB'}{\sin \epsilon} + \frac{CC'}{\sin \xi} + \text{&c.}$ est comme la somme des puissances $\alpha = \frac{AA'u}{P t \sin \delta}$, $\beta = \frac{BB'u}{P t \sin \epsilon}$, &c., & le numérateur est comme la somme de leurs moments: donc x sera la distance de l'axe au centre desdites puissances, & par conséquent (104 & 154.) une puissance égale à la somme de toutes les autres, placée au centre de percussion fera le même effet: en sorte que s'il y avoit un obstacle au point où se trouve le centre de percussion, la percussion se feroit entièrement sur lui, & l'équilibre requis auroit lieu.

COROLLAIRE II.

(346.) Si le corps qui tourne étoit un plan coïncidant avec l'axe,

* Car la vitesse que peut produire la puissance α , qui tend à retarder le mouvement du corps A suivant la direction DA (75 & 129, première note), est à la vitesse perpendiculaire à EA qui en résulte :: $1 : \sin \delta$. Or cette vitesse perdue perpendiculairement à EA , est $\frac{Au}{P}$: donc celle que doit imprimer la puissance α , pour que celle-ci ait lieu $= \frac{Au}{P \sin \delta}$; & ainsi des autres.

PLANC. I.

on auroit $\sin \delta = \sin \epsilon = \sin \xi = \xi c.$; & par conséquent
 $\frac{x}{\sin \delta} = \frac{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 + \xi c.}{AA' + BB' + CC' + \xi c.}$, ou $\frac{x}{\sin \delta} = \frac{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 + \xi c.}{AA' + BB' + CC' + \xi c.} = (157.)$
 $\frac{S}{PM}$, P exprimant la distance de l'axe au centre des masses : donc,
 dans ce cas (189.), le centre de percussion & celui d'oscillation
 sont à la même distance de l'axe *.

COROLLAIRE III.

(347.) Si on suppose l'axe à une distance infinie, ce qui est la même chose que de supposer que le corps ne tourne point, comme il arrive dans les corps qui tombent par la seule action de la gravité ; dans ce cas les deux centres coïncideront ensemble, & avec le centre de gravité : car, dans cette supposition, tous les angles δ , ϵ , ξ , &c. sont égaux, & ce cas se réduit à celui qui est donné dans le Corollaire précédent **.

COROLLAIRE IV.

(348.) Dans tout autre cas où les angles δ , ϵ , ξ , &c. ne seroient pas égaux, on n'auroit pas $PM = \frac{AA'}{\sin \delta} + \frac{BB'}{\sin \epsilon} + \frac{CC'}{\sin \xi} + \xi c.$
 Donc les deux centres d'oscillation & de percussion ne seroient pas alors à la même distance de l'axe.

COROLLAIRE V.

(349.) Si le corps, au lieu de choquer l'obstacle par son centre de percussion, le choquoit dans un point plus proche de l'axe ; comme si le levier EB , au lieu de choquer l'obstacle par le point F , où l'on suppose qu'est le centre de percussion, le choquoit par le point A ; dans ce cas l'obstacle ne souffriroit que la percussion résultante des moments d'inertie de EA , & autant de la partie AB . L'excès des moments de la partie AB sera supporté entièrement par les fibres du levier, de la manière que nous l'avons expliqué (208.), avec cette seule différence que, dans l'endroit cité, il ne s'agit que de

FIG. 37.

* Il faut faire attention que $\frac{x}{\sin \delta}$ est la distance du centre de percussion à l'axe fixe, puisque cette distance est l'hypothénuse d'un triangle rectangle, dont un des angles $= \delta$, & le côté opposé à cet angle $= x$. Donc $\sin \delta : 1 :: x : \frac{x}{\sin \delta}$.

** D'ailleurs ceci se déduit immédiatement de la formule ; car, dans le cas présent, toutes les distances étant $= A'$, le numérateur & le dénominateur peuvent se diviser par A' : par conséquent la formule se réduit à celle qu'on a trouvée (95.) pour la distance du centre de gravité à un axe quelconque. On voit encore que tous les angles δ , ϵ , ξ sont égaux ; car les lignes AE , BE , CE sont censées parallèles.

l'effet

l'effet d'une seule pression, au lieu qu'il s'agit ici de celui d'une percussion qui, selon les circonstances, peut être beaucoup plus grande, comme on l'a déjà vu.

S C O L I E . .

(350.) Tous les Auteurs (1) qui ont traité cette matière, ont enseigné, jusqu'à présent, que les centres d'oscillation & de percussion sont toujours les mêmes. Il faut cependant en excepter *Jean Bernoulli*, qui a donné quelques idées qui annoncent qu'il pensoit que cette proposition pouvoit n'être pas généralement vraie.

Pour être absolument convaincu sur ce point, il suffit de considérer que le centre d'oscillation d'un triangle isocelle, qui tourne latéralement autour de son sommet, est éloigné de ce sommet de la quantité $\frac{3}{4}a + \frac{b^2}{4a}$, a marquant la hauteur du triangle, & b sa base, tandis que le centre de percussion en est seulement éloigné de $\frac{3}{4}a^*$.

(1) *Christiani Wolfii Elementa Matheseos*, Tom. 1. *Elementa Mechanica*, Ch. XII, Theor. LXXXI.

Analyse des infiniment petits, par M. Stone, Sect. VII.

Physices Elementa Mathematica, par le Dr. *Gravésande*, T. 1, L. 2, Ch. 5, N°. 1080.

Johannis Bernoulli opera omnia, Tom. 4. *Remarques sur l'Analyse des infiniment petits*.

* La formule pour trouver la distance du centre d'oscillation d'un corps quelconque à l'axe fixe, est $\frac{S}{PM}$ (189.), S marquant la somme des moments d'inertie, c'est-à-dire, la somme

des produits de chaque particule du corps par le carré de sa distance à l'axe fixe : P la distance du centre de gravité du corps au même axe ; & M la masse du corps. Pour appliquer cette formule à l'exemple que l'Auteur propose, soit le triangle isocelle ABC , tournant latéralement autour de son sommet, c'est-à-dire, autour d'un axe qui passant par son sommet, est perpendiculaire à son plan ; & soit nommé a la hauteur BD de ce triangle, & b sa base AC . Pour trouver S , je considère que le moment d'inertie d'une particule quelconque m de ce triangle, c'est-à-dire, de la différentielle dM de sa masse, est $dM.mB^2$, & par conséquent $\int dM.mB^2 = S$. Maintenant, si, par l'axe fixe, on conçoit deux plans EF , BD perpendiculaires entre eux, & si de chaque point m de la masse du corps, ou, dans le cas présent, de la surface du triangle, on abaisse des perpendiculaires mr , mr' sur chacun de ces deux plans, il est évident que $mB^2 = mr^2 + mr'^2 = mr^2 + rB^2$, & que $dM.mB^2 = dM.mr^2 + dM.rB^2$, & par conséquent $S = \int dM.mr^2 + \int dM.rB^2$; c'est à-dire que, pour avoir S , il faut prendre la somme de tous les moments d'inertie par rapport au plan, ou à l'axe BD , plus, la somme des mêmes moments par rapport au plan, ou à l'axe EF perpendiculaire à BD .

Pour trouver la première somme de moments, soit mené deux lignes infiniment voisines gh , ik , parallèles à BD , soit fait $ik = y$, & $kD = x$: alors $hk = dx$, & ydx représentera la somme de toutes les particules dM comprises dans l'espace différentiel $ghik$, & par conséquent $x^2.ydx$ sera la somme de leurs moments d'inertie ; & en intégrant, $\int x^2.ydx$ sera la somme des moments d'inertie du triangle rectangle ADB . Les triangles semblables Aki & ADB donnent $AD : BD :: Ak : ki = \frac{BD.Ak}{AD}$. Substituant à la place de ces lignes leurs valeurs algè-

briques, on a ki , ou $y = a - \frac{2ax}{b}$, & par conséquent $\int x^2.ydx = \int \left(ax^2 - \frac{2ax^3}{b} \right) dx = \frac{ax^3}{3} - \frac{2ax^4}{4b}$. Cette intégrale se réduisant à zéro, lorsque $x=0$, il n'y a point de constante à

Ainsi on voit que si b est plus grand que a , le centre d'oscillation tombe hors du triangle, & que par conséquent il est impossible qu'il

ajouter ; faisant donc $x = \frac{1}{3}b$, afin d'avoir tous les moments du triangle ADB , on a $\frac{ab^3}{96}$ pour la somme des moments d'inertie de ce triangle.

Si dans la même expression on fait $x = -\frac{1}{3}b$, il est évident qu'on aura la somme des moments d'inertie du second triangle DBC , & cette somme sera $= -\frac{ab^3}{96}$. Cette dernière somme étant retranchée de la précédente, puisqu'elle appartient à un corps situé de l'autre côté de l'axe BD , on aura la somme totale des moments du triangle ABC par rapport à l'axe BD , ou $\int dm \cdot nr^2 = \frac{ab^3}{12}$.

Pour avoir maintenant la même somme par rapport au plan, ou à l'axe EF , je mène les lignes qf , ps infiniment proches, je fais $qf = y'$, $BO = x'$, en conséquence la somme des particules comprises dans l'espace différenciel qps sera $= y' dx'$; & $x'^2 \cdot y' dx'$ sera la somme des moments d'inertie de toutes les particules comprises dans cet espace ; & l'intégrale $\int x'^2 \cdot y' dx'$ sera la somme des moments d'inertie pour tout le triangle ABC . Les parallèles AC , qf , donnent $BD : BO :: AC : qf$, ou $a : x' :: b : y' = \frac{bx'}{a}$; substituant cette valeur de y' dans l'expression précédente, elle devient $\int \frac{bx'^3 dx'}{a} = \frac{bx'^4}{4a}$. Faisant $x' = a$, on a $\frac{ba^4}{4a}$, pour la somme des moments d'inertie de tout le triangle ABC , par rapport au plan, ou à l'axe EF , ou $\int dm \cdot r^2 Bz = \frac{ba^4}{4}$. Ajoutant donc cette somme de moments avec la précédente, on a $S = \frac{ba^3}{4} + \frac{ab^3}{12} = \frac{3ba^3 + ab^3}{12}$.

Chacun sçait que $P = \frac{1}{2}a$; on peut d'ailleurs le déduire aisément de ce qui a été dit dans l'Art. 124. $M = \frac{1}{2}ab$; ainsi $PM = \frac{a^2b}{3} = \frac{4a^2b}{12}$. Donc $\frac{S}{PM} = \frac{3ba^3 + ab^3}{4a^2b} = \frac{1}{4}a + \frac{b}{4a}$; quantité que l'Auteur donne pour la distance du centre d'oscillation du triangle isocèle ABC à l'axe fixe.

On trouvera, par des procédés absolument semblables, que la distance du centre de percussion au sommet du triangle est de $\frac{1}{2}a$, lorsque la percussion est un *maximum* ; ce qui justifie la remarque de notre Auteur. On voit combien il est important, dans la recherche de ces sortes de centres de distinguer les plans mus, ou balancés, sur un axe qui leur est parallèle, de ceux qui sont mus, ou balancés, sur un axe qui leur est perpendiculaire, in *latus*, comme dit *Huygens*. Si l'on avoit cherché le centre d'oscillation du triangle autour d'un axe parallèle à son plan, tel que l'axe EF , le centre d'oscillation auroit été confondu avec celui de percussion (345.) ; car alors $S = \frac{ba^3}{4}$ & $\frac{S}{PM} = \frac{1}{4}a$. On remarquera, en passant, que *Descartes* avoit, longtemps auparavant *Huygens*, distingué ces deux sortes d'oscillations. Voyez ses *Lettres* 85, 86 & suiv. Tome III.

La principale, & même la seule difficulté de ces sortes de recherches, consiste à trouver la somme des moments d'inertie. Or cette détermination devient très-aisée, lorsque la nature du corps peut être exprimée par des équations. Il faut toujours suivre un procédé analogue à celui que nous venons d'exposer. Les deux formules $\int x^2 \cdot y dx$, & $\int x'^2 \cdot y' dx'$ sont générales pour tous ces corps, en faisant attention que y & y' ne représentent pas des lignes, lorsqu'il s'agit des solides, mais les surfaces produites par les plans ik , qf parallèles aux plans perpendiculaires BD , EB , qui passent par l'axe de rotation, & que x & x' sont les distances de ces surfaces aux mêmes plans. Appelant donc Y & Y' ces surfaces, les formules générales seront $\int x^2 Y dx$ & $\int x'^2 Y' dx'$. Si le corps n'est pas susceptible d'être exprimé par des équations, on pourra le diviser en parties, comme des pyramides, des parallépipèdes, &c. & chercher séparément la somme des moments d'inertie de chaque partie ; la réunion de ces différentes sommes sera la valeur de S . On remarquera encore que le calcul ne donne pour S qu'une quantité relative au volume, & non à la masse du corps : ainsi lorsqu'il s'agira de comparer ensemble plusieurs mouvements de rotation de corps d'une densité différente, il faudra multiplier la valeur de S trouvée pour chaque corps par la densité de ce corps, qui est toujours relative à celle d'un autre corps (12.)

coïncide avec le centre de percussion ; puisque le triangle ne peut toucher , & par conséquent choquer un obstacle , par un point qui est hors de lui-même. Si nous réduisons le triangle à une moindre hauteur , relativement à sa base , à mesure que cette hauteur diminuera , le centre d'oscillation s'éloignera de plus en plus de l'axe ; tandis que ce sera le contraire du centre de percussion : en sorte que , si la hauteur du triangle devenoit infiniment petite , le centre d'oscillation seroit à une distance infinie de l'axe , tandis que le centre de percussion resteroit toujours à $\frac{1}{2}a$, & par conséquent dans la disposition qui convient pour l'équilibre des moments autour du point où se fait le choc.

CHAPITRE VII.

Du Mouvement des Corps posés sur des surfaces.

(351.) NOUS ferons abstraction , dans ce Chapitre , des impressions qui doivent se former dans les corps , par l'action des puissances qui les compriment , afin que les calculs soient , pour ce moment , plus faciles. Nous supposerons , pour la même raison , que les corps sont également denses , & que les puissances sont appliquées à leurs centres de gravité.

PROPOSITION XLVII.

(352.) *Trouver les espaces que parcourent deux sphères poussées par une puissance.*

Si deux sphères *A* & *B* se touchent en *D* , & que l'une *A* soit poussée dans la direction *AC* par la puissance *a* appliquée à son centre de gravité *A* , cette sphère ne tournera point (138.) , & la puissance *a* peut être décomposée en deux autres , l'une qui agisse suivant la tangente *DE* , & l'autre suivant la perpendiculaire *AD* qui passe par les centres des deux sphères *A* & *B*. Nommant Σ l'angle *DAE* , la puissance qui agit suivant *DE* sera $= a \sin \Sigma$, & celle qui agit suivant *AD* $= a \cos \Sigma$. En vertu de cette puissance , dont la direction passe par les centres *A* & *B* , la sphère *A* doit se mouvoir dans la direction *AD* ; mais elle ne peut le faire sans pousser l'autre sphère *B* dans la même direction , laquelle passant par son centre *B* , ne produira , dans cette sphère , aucun mouvement de rotation , mais seulement un mouvement dans la même direction. Les deux sphères suivront donc précisément la direction *AB* , en vertu

FIG. 18,

PLANC. I.

de la puissance $\alpha \cos \Sigma$, sans pouvoir se déranger d'aucun côté, & doivent parcourir l'une & l'autre l'espace différentiel $\frac{ds ds \alpha \cos \Sigma}{A+B}$ (35.). Quant à l'autre puissance $\alpha \sin \Sigma$, elle ne peut agir que sur la sphere A , à cause de sa direction parallèle à la tangente DE , suivant laquelle elle ne peut avoir d'action sur la sphere B . Donc l'espace différentiel que parcourra le centre de gravité de la sphere A , suivant cette direction, sera $= \frac{ds ds \alpha \sin \Sigma}{A}$.

COROLLAIRE I.

FIG. 19.

(353.) Si la sphere B est d'une grandeur infinie, sa surface dans le point du contact coïncide avec le plan tangent DE : dans ce cas, l'espace différentiel que parcourront les centres de gravité des deux spheres, suivant la perpendiculaire AD , sera, comme auparavant, $\frac{ds ds \alpha \cos \Sigma}{A+B}$; & celui que parcourra la sphere A , suivant la direction de la tangente, ou du plan DE , sera $= \frac{ds ds \alpha \sin \Sigma}{A}$.

COROLLAIRE II.

(354.) Si l'on suppose la sphere B , non-seulement d'une grandeur infinie, mais encore d'une quantité de matiere, ou d'une masse infinie, l'espace parcouru par son centre de gravité sera $\frac{ds ds \alpha \cos \Sigma}{A+\infty} = 0$; d'où l'on voit que, dans ce cas, la surface de la sphere B , ou le plan tangent DE demeurera immobile; la sphere A n'aura de même aucun mouvement suivant la direction AD , & il lui restera seulement le mouvement suivant la tangente, lequel lui fera parcourir l'espace différentiel $= \frac{ds ds \alpha \sin \Sigma}{A}$.

COROLLAIRE III.

PLANC. II.

FIG. 30.

(355.) Supposant que la sphere A étant posée sur une surface quelconque immobile, plane, ou courbe BC , soit animée par la puissance α , appliquée à son centre de gravité, & agissant suivant la direction EA ; si l'on mène la tangente, ou le plan tangent FG par le point de contact C , on peut supposer que ce plan est la surface d'une sphere infinie en grandeur & en masse, sur laquelle est posée l'autre sphere A : par conséquent cette dernière sphere n'aura d'autre mouvement que celui suivant la tangente FG , en vertu de la puissance $\alpha \sin \Sigma$, Σ exprimant l'angle AEH que forme la direction EA , avec la perpendiculaire EH à la tangente.

COROLLAIRE IV.

(356.) On démontrera la même chose de tout autre point de la surface courbe sur laquelle se trouve la sphere. Ainsi, prenant le point B de la courbe pour l'origine, & les abscisses x sur la ligne BL parallele à la direction EA ; & nommant a la longueur de la courbe BC , on aura $CM = dx$; $CN = da$, & le sinus de l'angle $AEH = CNM = \sin \Sigma = \frac{dx}{da}$; d'où il suit que la puissance qui anime la sphere A , suivant la direction de la tangente dans tous les points de la surface courbe sur laquelle elle est posée, ou suivant les espaces différenciels sur lesquels elle se trouve, sera $= \frac{adx}{da}$.

COROLLAIRE V.

(357.) Supposons que u soit la vitesse qu'acquiert la sphere dans un point quelconque de la surface; nous aurons (19.) $\frac{adx}{da} = du$; mais (29.) $u = \frac{da}{dt}$: donc, en multipliant les deux équations, on aura $\frac{adx}{A} = u du$, & en intégrant $u^2 - U^2 = \frac{2adx}{A}$; ou $u^2 = \frac{2adx}{A} + U^2$ U marquant la vitesse qu'avoit la sphere à l'origine B .

COROLLAIRE VI.

(358.) Si a est constante, comme l'est la gravité à de petites distances de la surface de la terre, on aura $u^2 = \frac{2ax}{A} + U^2$; ou, en substituant la valeur de $a = 32A$ (52.), $u^2 = 64x + U^2$: c'est-à-dire que les vitesses avec lesquelles les corps graves tombent le long des surfaces, ne dépendent en aucune maniere de la nature de ces surfaces, de leur plus ou moins grande courbure, ni de leur plus ou moins grande inclinaison par rapport à l'horison, mais seulement de la hauteur x d'où ils tombent, & de la vitesse initiale U , avec laquelle ils commencent leur chute.

COROLLAIRE VII.

(359.) Si cette vitesse primitive U étoit zéro, ou si la sphere commençoit à tomber depuis le repos, on auroit, dans ce cas, $u^2 = 64x$, ou $u = 8\sqrt{x}$, comme on l'a vu, *Art.* 52.

COROLLAIRE VIII.

(360.) Si B étant l'origine, la sphere, ou le corps grave, avoit à descendre le long de différentes surfaces planes ou courbes,

BL, BC, BD, BE, avec la même vitesse initiale; la vitesse qu'auroit ce corps en arrivant à l'horizontale LE, seroit toujours la même, & dans tous les cas $= \sqrt{64x + U^2}$; ou, lorsque $U=0$, $= 8\sqrt{x} = 8\sqrt{BL}$.

COROLLAIRE IX.

(361.) Si la sphere avoit à parcourir le plan DE, l'angle DBE, étant droit, on auroit $\frac{dx}{da} = \frac{DB}{DE}$; & l'équation $\frac{adx}{A da} = du$ se réduiroit à $\frac{a dx \cdot DB}{A \cdot DE} = du$; & en intégrant, dans le cas des corps graves, à $\frac{32 \cdot DB}{DE} = u - U$: en sorte que les différences des vitesses qu'acquerra la sphere dans sa chute par le plan DE, sur sa vitesse initiale, BE étant horizontale, seront en raison composée du temps, & de la quantité $\frac{DB}{DE}$, ou du sinus de l'angle DEB que forme le plan avec l'horizontale.

COROLLAIRE X.

(362.) Si l'on substitue dans l'équation $u = \frac{ds}{dt}$, ou $u dt = da$, la valeur de u trouvée ci-dessus (357.), qui est $u = \left(\frac{2fsdx}{A} + U^2\right)^{\frac{1}{2}}$, on aura $da = dt \left(\frac{2fsdx}{A} + U^2\right)^{\frac{1}{2}}$; ou si l'on suppose $U=0$, $da = dt \left(\frac{2fsdx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$. Et l'on trouve ensuite pour les corps graves, qui tombent librement depuis le repos, $da = 8dt\sqrt{x}$; & s'ils tomboient par le plan DE, comme dans ce cas, $\frac{DB}{DE} = \frac{x}{a}$, ou $x = \frac{a \cdot DB}{DE}$, on auroit $\frac{da}{\sqrt{a}} = 8dt \left(\frac{DB}{DE}\right)^{\frac{1}{2}}$; d'où l'on tire, en intégrant, $2\sqrt{a} = 8t \left(\frac{DB}{DE}\right)^{\frac{1}{2}}$, ce qui donne $a = \frac{16t^2 DB}{DE}$; c'est-à-dire que les espaces parcourus par un corps grave qui descend, depuis le repos, sur un plan incliné, sont en raison composée des quarrés des temps, & de la quantité $\frac{DB}{DE}$, ou du sinus de l'angle DEB que forme le plan avec l'horison.

COROLLAIRE XI.

(363.) De l'équation précédente $da = dt \left(\frac{2fsdx}{A} + U^2\right)^{\frac{1}{2}}$ on déduit aussi $dt = \frac{da}{\left(\frac{2fsdx}{A} + U^2\right)^{\frac{1}{2}}}$; ou si l'on avoit $U=0$, $dt = \frac{da}{\left(\frac{2fsdx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}}$; équation qui, dans le cas des corps graves, devient $dt = \frac{da}{8\sqrt{x}}$; & si c'est par

le plan DE que la sphere fait sa chute, on aura $dt = \frac{da}{8\sqrt{\frac{aDB}{DE}}}$; & en intégrant, $t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a.DE}{DB}}$.

PLANC. II.

COROLLAIRE XII.

(364.) Si la sphere, ou le corps pesant, tomboit librement, ou verticalement, on auroit $a=x$, & $dt = \frac{dx}{8\sqrt{x}}$; ou, en intégrant, $t = \frac{1}{2}\sqrt{x}$: c'est aussi ce qu'on a vu à l'Art. 52.

PROPOSITION XLVIII.

(365.) Trouver la durée de la chute des corps graves par la Cycloïde.

FIG. 33.

Supposons que ce soit la Cycloïde $DABE$, que la sphere, ou le corps grave, doit parcourir en tombant, $FHIE$ étant son cercle générateur, dont $FE=D$ est le diamètre. Soit A le point d'où le corps commence à tomber depuis le repos; & soit enfin $FG=b$, & $GC=x$. Par la propriété de la Cycloïde, son arc $BE=2IE$; c'est-à-dire que l'arc BE de la Cycloïde est égal à deux fois la corde IE de son cercle générateur*. Mais, par la propriété du cercle, on

* Chacun sçait que la Cycloïde, autrement dite Trochoïde, ou Roulette, est la courbe $DMBE$, décrite par un point D de la circonférence d'un cercle DTS qui roule sur une droite DF . Chaque clou des roues décrit en l'air une Cycloïde, lorsque la voiture se meut en roulant sur une même ligne. On voit, par cette génération, que la ligne DF , qui est la demi-base de la Cycloïde, est égale à la demi-circonférence du cercle générateur, puisque tous les points de la demi-circonférence DTS se sont appliqués sur la ligne DF , tandis que le point décrivant D a tracé la demi-Cycloïde $DMBE$. Le point E s'appelle le point culminant, & la ligne FE l'axe de la Cycloïde. On voit encore que, si par différents points M, B de la courbe, on mène des ordonnées MO, PC perpendiculaires sur l'axe, les parties MP, BI de ces ordonnées comprises entre la Cycloïde & la circonférence du cercle générateur décrit sur l'axe comme diamètre, sont respectivement égales aux arcs EP, EI compris entre le point culminant & ces ordonnées. Car si l'on suppose le cercle générateur DTS parvenu en N , dans la position NMR , le point décrivant D sera parvenu en M , tous les points de l'arc NM se seront appliqués sur DN , & l'on aura $DN = Arc NM = Arc EP$, par conséquent $FN = Arc EP$. Mais $FN = OQ + PQ = QM + PQ = MP$; donc $MP = Arc EP$. On démontrera la même chose pour tous les autres points. Venons à la démonstration de la propriété dont notre Auteur fait usage.

PLANC. 35.
FIG. 1.

Soit mené les deux ordonnées PC, bc , infiniment voisines, qui coupent la circonférence du cercle générateur aux points I, i ; par les points B, I soit abaissé sur bc les perpendiculaires Bq, Ir , & par le point B soit mené la parallèle Bs au petit arc Ii ; les triangles Iri, Bqh pourront être regardés comme rectilignes, & l'espace $IiBs$ sera un parallélogramme. Cela posé, si l'on fait le sinus versé de l'arc EI , sçavoir, $EC=x$, $CI=y$, $EP=D$; on aura $FC=D-x$, $Cc=Ir=Bq=dx$, $ri=qs=dy$, & l'équation du cercle générateur sera $yy=Px-xx$. Par la nature de la Cycloïde nous venons de voir que $BI=Arc EI$, & que $bi=Arc Ei$; donc $bi-BI=Arc Ei-Arc EI$, ou $bi-is$, ou $sb=Is$, & par conséquent $qb=q+sb=ri+Is=dy+Is=dy+ds'$, en nommant s' l'arc Ei . Si, par le centre L , on mène le rayon LI , les triangles semblables CLI, riI donnent IC , ou $(Dx-xx)^{\frac{1}{2}}$; IL , ou $\frac{1}{2}D$:

PLANC. II.
FIG. 31.

a $IE = \sqrt{D(D-b-x)}$: donc l'arc $BE = 2\sqrt{D(D-b-x)}$; & sa différentielle $da = \frac{-dx\sqrt{D}}{\sqrt{D-b-x}}$, qui donne celle de l'arc $BA = da = \frac{dx\sqrt{D}}{\sqrt{D-b-x}}$ *. On aura donc, dans la Cycloïde (363.), lorsque le corps grave commence à tomber depuis le repos, $dt = \frac{dx\sqrt{D}}{8\sqrt{D-b-x}}$: ou, en multipliant le numérateur & le dénominateur par $\frac{1}{2}(D-b)$, $dt = \frac{\sqrt{D}}{4(D-b)} \cdot \frac{\frac{1}{2}(D-b)dx}{\sqrt{Dx-bx-x^2}}$; & en intégrant $t = \frac{\sqrt{D}}{4(D-b)} \int \frac{\frac{1}{2}(D-b)dx}{\sqrt{Dx-bx-x^2}}$. Mais $\int \frac{\frac{1}{2}(D-b)dx}{\sqrt{Dx-bx-x^2}}$, est l'arc de cercle dont le diamètre est $D-b = GE$, & x le sinus versé (*Voyez la première note de cet Article.*). Donc, si sur le diamètre GE on décrit le cercle GKE , on aura l'Arc $GK = \int \frac{\frac{1}{2}(D-b)dx}{\sqrt{Dx-bx-x^2}}$; & par conséquent dans la Cycloïde on aura $t = \frac{\sqrt{D} \cdot (\text{Arc } GK)}{4(D-b)}$.

COROLLAIRE I.

(366.) Si le corps parcouroit dans sa chute tout l'arc ABE , l'arc GK deviendrait le demi-cercle entier GKE , & $\frac{GKE}{D-b} = \frac{GKE}{GE}$, sera le rapport de la demi-circonférence au diamètre. Appellant

Ir , ou $dx : II = da' = \frac{\frac{1}{2}Ddx}{(Dx-xx)^{\frac{1}{2}}}$; expression générale de l'élément d'un arc de cercle dont x est le sinus versé, & D le diamètre. Substituant cette valeur de da' dans celle de bq , on aura $bq = dy + \frac{\frac{1}{2}Ddx}{(Dx-xx)^{\frac{1}{2}}}$; mais, en différenciant l'équation du cercle, on a $dy = \frac{\frac{1}{2}Ddx - xdx}{(Dx-xx)^{\frac{1}{2}}}$; donc $qb = \frac{\frac{1}{2}Ddx - xdx}{(Dx-xx)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\frac{1}{2}Ddx}{(Dx-xx)^{\frac{1}{2}}} = \frac{Ddx - xdx}{(Dx-xx)^{\frac{1}{2}}}$. Par la propriété du triangle rectangle $Bb^2 = Bq^2 + qb^2$; nommant donc a l'arc EB , & mettant à la place des lignes leurs valeurs algébriques, on a $da^2 = dx^2 + \frac{D^2/4 - 2Dxdx + x^2/x^2}{Dx-xx} = \frac{D^2/4 - 2Dxdx + x^2/x^2}{Dx-xx} = \frac{Ddx^2}{x}$, en di-

visant le numérateur & le dénominateur par $D-x$. Donc $da = dx\sqrt{\frac{D}{D-x}}$; expression générale de l'élément d'un arc de Cycloïde, d'où l'on tire, en intégrant, $a = 2\sqrt{Dx}$: c'est la valeur de l'arc EB de la Cycloïde. Mais, par la propriété du cercle EF , ou $D : EI :: EI : E$, ou x , donc $EI^2 = Dx$, & $EI = \sqrt{Dx}$; donc l'arc BE est double de la corde EI .

Il suit de là, que la longueur de la demi Cycloïde DE est double du diamètre EF du cercle générateur, ou que la longueur entière de la Cycloïde est quadruple du diamètre EF . Cette courbe qui a fixé l'attention des plus célèbres Géomètres, a une foule de très-belles propriétés, par exemple, la tangente qu'on meneroit par le point B , est toujours parallèle à la corde EI ; & l'aire de l'espace Cycloïdal compris entre la courbe & sa base, est triple de l'aire du cercle générateur, &c. &c. Nous n'entrerons point dans ces détails, qui ne sont pas immédiatement de notre objet. Nous nous contentons d'avoir démontré les propriétés sur lesquelles notre Auteur s'appuie, & dont il paroît supposer la connoissance à ses Lecteurs.

* La différentielle de l'arc BE est égale à celle de l'arc BA , à cette différence près, que la première est négative, & l'autre positive: car x ou GC augmentant, l'arc BE diminue de da , & l'arc AB augmente de la même quantité da .

done

donc C la circonférence du cercle dont le rayon est l'unité, on aura $\frac{CKE}{D-b} = \frac{\frac{1}{2}C}{2} = \frac{1}{4}C$; & le temps t employé à parcourir l'arc entier ABE de la Cycloïde, sera $= \frac{C}{16} \sqrt{D}$.

COROLLAIRE II.

(367.) Comme la quantité b qui détermine la position du point A , ne se trouve point dans cette expression, il s'ensuit que, de quelque point de la Cycloïde que le corps commence à tomber, il emploiera toujours le même temps $t = \frac{C\sqrt{D}}{16}$ pour parvenir en E .

COROLLAIRE III.

(368.) Si deux corps tombent dans le même temps, l'un par la Cycloïde, & l'autre librement, ou verticalement, on auroit (364.) $\frac{C\sqrt{D}}{16} = \frac{1}{2} \sqrt{x}$, ou $\frac{C\sqrt{D}}{4} = \sqrt{x}$, ce qui donne $x = \frac{C^2 D}{16}$; c'est-à-dire que l'espace que parcourra un corps grave, en tombant librement, ou verticalement, pendant le même temps qu'un autre corps emploie dans sa chute par l'arc d'une Cycloïde, dont le diamètre du cercle générateur est D , sera $x = \frac{C^2 D}{16}$.

COROLLAIRE IV.

(369.) Si les oscillations d'un pendule sont fort petites, les arcs décrits par le corps oscillant coïncident avec des arcs de Cycloïde: en conséquence, les demi-oscillations d'un tel pendule se font dans le même temps que celui qu'un corps emploieroit à tomber par l'arc de la même Cycloïde; c'est-à-dire que ces demi-oscillations se font dans le temps $\frac{C\sqrt{D}}{16}$; & les oscillations entières dans le temps $\frac{C\sqrt{D}}{8}$.

COROLLAIRE V.

(370.) Si un corps tombe librement, ou verticalement, pendant le temps que le pendule emploie à faire une oscillation, nous aurons $\frac{C\sqrt{D}}{8} = \frac{1}{2} \sqrt{x}$, ou $\frac{C\sqrt{D}}{4} = \sqrt{x}$, ce qui donne $x = \frac{C^2 D}{4}$; c'est-à-dire que l'espace que parcourt un corps grave qui tombe librement, ou verticalement, pendant la durée d'une oscillation entière d'un pendule qui décrit des arcs coïncidants avec ceux d'une Cycloïde, dont le diamètre du cercle générateur est exprimé par la quantité D , est $= \frac{C^2 D}{4}$.

COROLLAIRE VI.

(371.) Soit l la longueur du pendule , ou $2l$ le diamètre du cercle dont il décrit les arcs; il est clair que $\sqrt{2lx}$ fera l'une quelconque de ses cordes , en supposant que x représente la hauteur verticale CE , dont descend le pendule dans la demi - oscillation. Mais, puisque nous supposons les arcs de cercle décrits par le pendule , confondus avec ceux de la Cycloïde , cette corde est égale à celle de la Cycloïde , & de plus , égale à son arc correspondant $BE = 2\sqrt{Dx}$; à cause qu'ils sont l'un & l'autre infiniment petits. Donc $2\sqrt{Dx} = \sqrt{2lx}$, ce qui donne $D = \frac{1}{2}l$: cette valeur de D étant substituée dans l'équation $x = \frac{CD}{4}$ (370.) la réduit à $x = \frac{Cl}{8}$; c'est-à-dire que l'espace que parcourra librement, ou verticalement, un corps grave , pendant le temps qu'un pendule , dont la longueur $= l$, fait une petite oscillation entière , est $= \frac{Cl}{8}$.

COROLLAIRE VII.

(372.) Si dans l'équation $t = \frac{C}{16}\sqrt{D}$ (366.) on substitue la valeur de $D = \frac{1}{2}l$, on aura $t = \frac{C}{16}\sqrt{\frac{1}{2}l}$, ou en quarrant $t^2 = \frac{Cl}{16^2 \cdot 2}$; c'est-à-dire que les longueurs des pendules sont entre elles comme les quarrés des durées de leurs oscillations.

S C O L I E .

(373.) Le rapport de la circonférence au diamètre , ou $\frac{C}{2}$ est $= 3,1416$ &c : donc $\frac{C}{8}$ fera $= 4,93482528$ &c. ; ce qui donne l'espace que le corps parcourroit librement , ou verticalement , dans le temps que le pendule de la longueur l feroit une oscillation entière , c'est-à-dire , $x = 4,9348$ &c.

La longueur du pendule simple qui bat les secondes au niveau de la mer , varie selon les différentes Latitudes des lieux. Sous l'équateur elle est à très-peu près de 439 lignes du pied de Paris , & sous le pôle elle est à peu près de 442. Si nous prenons une longueur moyenne , elle fera de 440 lignes , longueur qui est fort peu moindre que celle du pendule simple qui bat les secondes en Espagne , au bord de la mer , & nous aurons , pour l'espace que les corps parcourent en Espagne , en tombant librement , ou verticalement , pendant la première seconde de leur chute , $\frac{440 \cdot 4,9348}{16^2}$ lig. du pied de Paris , ou 15 pieds, o p. 11 l. $\frac{311}{1000}$, ce qui fait 16 p. o p. 9 l. $\frac{111}{1000}$ du pied anglais.

Sous l'équateur, où la longueur du pendule simple est de 439 lignes, les corps pesants parcourent, pendant la première seconde de leur chute, 16 pieds 0 p. 3 l. $\frac{911}{1000}$, & sous le pôle, 16 pieds 1 p. 7 l. $\frac{731}{1000}$; d'où l'on voit que la différence des espaces parcourus dans la chute des corps graves pour les différentes latitudes, est extrêmement petite, puisque, lorsqu'elle est la plus grande, elle n'excède pas un pouce 4 lignes: c'est pour cette raison que nous l'avons établie (57.) de 16 pieds juste. Ce nombre étant quarré, est très-commode pour les calculs dont nous avons besoin. *

PLANC. II.

PROPOSITION XLIX.

(374.) *Trouver les puissances perpendiculaire & parallèle à la tangente, qui agissent sur un corps quelconque placé sur une surface.*

Soit *A* un corps quelconque placé sur la surface *BCG*, & *a* la puissance qui agit sur lui suivant la direction *AD*. On peut décomposer cette puissance en deux autres, l'une suivant *AC*, qui aura pour expression $\frac{AC.a}{AD}$, & l'autre suivant la tangente *FG*, qui sera exprimée par $\frac{CD.a}{AD}$. La première de ces deux puissances $\frac{AC.a}{AD}$ peut encore se décomposer en deux autres, l'une suivant *AH*, ayant pour expression $\frac{AH.a}{AD}$, & l'autre suivant la tangente *FG*, exprimée par $\frac{HC.a}{AD}$. Le plan *FG* ne pouvant détruire, ou empêcher, l'action des forces qui lui sont parallèles, la somme $\frac{CD.a}{AD} \pm \frac{HC.a}{AD} = \frac{HD.a}{AD}$ sera la puissance qui agit sur le corps suivant la direction de la tangente. Nom-

FIG. 34
& 35.

* Cette différence dans la longueur du pendule qui bat les secondes par différentes Latitudes, vient de ce que la pesanteur varie à différentes distances du centre de la terre. La première observation de ce genre est due à *M. Richer*, qui étant allé à Cayenne en 1672 pour y faire des observations astronomiques, s'aperçut que le pendule à secondes qu'il avoit apporté de Paris, retardait très-sensiblement: il fut obligé de remonter la lentille de 1 ligne $\frac{1}{4}$ pour lui faire battre de nouveau les secondes. Cayenne est par 4° 56' de Latitude boréale. Il conjectura d'après l'examen des différentes causes qui pouvoient produire cet effet, que Cayenne étoit plus éloigné du centre de la terre que Paris, qu'en conséquence la terre étoit aplatie vers les pôle. Cette conjecture s'est complètement vérifiée par les observations des Académiciens faites au pôle & à l'équateur. (Voyez la relation de leur voyage, & sur-tout le *Traité de la figure de la Terre* par le célèbre *M. Bouguer*, qui étoit un de ceux que l'Académie envoya au Pérou en 1733). *D. Georges Juan* étoit de cette entreprise, avec *D. Antonio de Ulloa*, & a publié une relation très-intéressante de ses observations, intitulée: *Observaciones Astronomicas*, &c.).

† D'après les observations de ce genre qui ont été répétées plusieurs fois, il résulte qu'à Quito (Latitude méridionale 0° 25'). La longueur du pendule à seconde est de 4° 9,83 lignes. A Porto-Bello (Latitude boréale 9° 33') de 439, 12. Au Petit Goave dans l'île de Saint-Domingue, (18° 27' Latitude boréale) 439,33. Au Caire (30° 2' de Latitude boréale) 442,25. A Rome (41° 44') 442,28. A Paris (48° 51') 443,57. A Londres (51° 31') 443,65. A Archangel (64° 35') 441,13. A Pello (65° 48') 441,17. Par 79° 50' de Lat. bor. 441,38.

mant donc, comme ci-devant, Σ l'angle que forme la direction AD avec la perpendiculaire AH à la tangente, cette puissance sera aussi $= a \sin \Sigma$. L'autre puissance suivant la perpendiculaire AH , sera $= \frac{HA.a}{AD} = a \cos \Sigma$.

COROLLAIRE I.

(375.) Puisque la puissance qui anime le corps suivant la direction de la tangente, est la même que lorsque le corps est sphérique, il s'ensuit que les propriétés qui concernent la vitesse & l'espace parcouru par un corps quelconque placé sur une superficie plane ou courbe, seront les mêmes que celles qu'on a trouvées pour les corps sphériques.

COROLLAIRE II.

(376.) En vertu de la puissance $\frac{AH.a}{AD} = a \cos \Sigma$, le corps doit tourner, l'angle giratoire étant $= \frac{\pm dt CH.a dt \cos \Sigma}{s}$; car la réaction de la puissance $a \cos \Sigma$ dans le point C , est égale & contraire à cette puissance, & agit à la distance perpendiculaire $p = \pm CH$. Donc (142.) elle doit produire l'angle giratoire $\frac{\pm dt CH.a dt \cos \Sigma}{s}$, le signe $+$ étant pour le cas où le point H tombe du côté de D par rapport à C , & le signe $-$ pour celui où il tombe du côté opposé: dans le premier cas, le mouvement de rotation du corps se fera vers D ; & dans le second, il se fera du côté opposé.

COROLLAIRE III.

(377.) Si donc on avoit $CH = 0$; c'est-à-dire, si l'angle ACH étoit droit, ou si la ligne AH coïncidoit avec AC , le corps ne tourneroit pas.

COROLLAIRE IV.

(378.) Si le corps A étoit appuyé sur la superficie dans deux points C & F , la puissance $a \cos \Sigma$, se distribuerait entre ces deux points, de façon que la partie de cette puissance qui appartient au point C , seroit, par la propriété du centre de gravité, à celle qui appartient au point F , comme HF est à HC . La partie de la puissance a qui agit en C , sera donc $= \frac{a.FH.\cos \Sigma}{FC}$, & celle qui agit en F $= \frac{a.CH.\cos \Sigma}{FC}$, d'où il suit que l'angle giratoire qu'elles produiront toutes deux sera $dt \int \left(\frac{CH.a.FH - FH.a.CH}{s.FC} \right) dt \cos \Sigma = 0$.

COROLLAIRE V.

(379.) On démontrera encore la même chose, quel que soit le nombre de points par lesquels le corps porte sur la surface, pourvu cependant que le point H tombe entre ces points, afin que les différentes rotations soient les unes positives, & les autres négatives.

COROLLAIRE VI.

(380.) Quoique la rotation soit zéro, la puissance $\alpha \sin \Sigma$, dont l'action est dirigée suivant DE , demeure toujours pour faire mouvoir le corps suivant le plan; mouvement qui doit avoir son effet, quelque petite que soit cette puissance, ou l'angle Σ .

SCOLIE.

(381.) Telles sont les loix, ou regles générales que tous les Auteurs donnent pour le mouvement des corps sur les surfaces; mais, comme nous l'avons vu, ces loix sont fondées sur l'abstraction qu'on a faite des impressions que doit former, sur les mêmes surfaces, la puissance perpendiculaire $\alpha \cos \Sigma$. Lorsqu'on veut avoir égard à ces impressions, les choses sont bien différentes, comme on va le voir dans le Chapitre suivant.

CHAPITRE VIII.

Du Frottement, & de l'altération qu'il produit dans le le mouvement des corps placés sur des surfaces.

DÉFINITION XLV.

(382.) ON appelle *Frottement* cette résistance qu'éprouvent les corps pour se mouvoir parallèlement aux surfaces sur lesquelles ils sont posés, lorsqu'ils sont poussés, ou tirés, par une ou plusieurs puissances.

SCOLIE.

(383.) Le parallépipède A animé par une puissance quelconque α , dont la direction AD est oblique au plan BE , doit, suivant ce qui a été dit dans le Chapitre précédent, se mettre en mouvement, quelque petit que puisse être l'angle HAD , que nous nommons Σ : mais, en établissant cette théorie, on a fait abstraction de l'impression que doit faire, sur le plan, la puissance $\alpha \cos \Sigma$, dont l'action

FIG. 17.

est dirigée suivant *AH*. Cette puissance comprime le parallépipède & le plan , & forme dans celui-ci l'impression *GCFI*, & l'obstacle *FI*, que la puissance $a \sin \Sigma$, qui est dirigée parallèlement au plan *BE*, doit vaincre nécessairement , pour que le mouvement du parallépipède puisse avoir son effet. En outre , il est certain , par l'expérience , que quelque soin qu'on prenne pour rendre lisses & polies les surfaces du parallépipède & du plan , elles restent toujours hérissées d'un grand nombre de petites aspérités qu'on apperçoit très-distinctement avec un microscope. Or ces inégalités doivent former , dans la base , autant de petites impressions , en vertu de la puissance $a \cos \Sigma$; & ces impressions , ainsi que l'obstacle *FI*, doivent produire une résistance au mouvement suivant le plan *BE*.

Si l'on considère ces effets avec attention , on verra qu'ils ne diffèrent en rien de ceux que nous avons expliqués (254), & qui ont puissamment lieu dans le choc de deux corps , lorsque les premières particules se rompant , les corps demeurent , pour ainsi dire , cloués l'un à l'autre. La puissance $a \cos \Sigma$ fait ici le même effet que l'élasticité latérale , dans le cas des corps qui se choquent , & produit , dans le plan & dans le parallépipède , des impressions réciproques qui correspondent à celles que nous avons nommées alors petites impressions latérales. La puissance $a \sin \Sigma$ équivaut ici à celle que nous avons représentée par a , & qui produisoit l'impression totale. Il manque seulement ici , pour la parfaite ressemblance de ces deux cas , les petites impressions dans la partie supérieure du parallépipède , & que tout le côté *FK* ne rencontre un corps qui lui résiste. Au lieu de ce corps , on a seulement l'élevation , ou l'obstacle , *FI* ; mais ceci n'altère pas les loix de la résistance , qui se trouve seulement diminuée : en sorte que cette même résistance que la pratique a manifestée dès qu'on a fait les premières expériences , & qu'on nomme communément *Frottement* , ne diffère en rien de la force de percussion , & est identiquement la même chose.

Nous distinguerons deux cas dans le *Frottement* ; l'un dans lequel le parallépipède ne fait seulement que forcer les aspérités , & l'obstacle *FI*, sans les vaincre entièrement , & sans se déterminer au mouvement ; & l'autre , dans lequel ces aspérités étant forcées , vaincues , ou rompues , le corps commence à se mouvoir. Dans le premier cas , la force des aspérités & de l'obstacle sera plus grande que la plus grande force de percussion , que nous nommons maintenant de *Frottement* ; en sorte qu'il est nécessaire que le parallépipède prenne son mouvement ; que celui-ci arrive au

maximum ; qu'il diminue ensuite jusqu'à ce que u devienne $=0$; qu'il soit ensuite négatif, & qu'enfin le cas de l'équilibre entre la puissance & le Frottement, ou dans lequel le mouvement cesse entièrement, ait lieu ; c'est-à-dire que le Frottement soit égal à la puissance $\sin \Sigma$, celle-ci étant composée comme on voudra. Dans le second cas, la force des aspérités & de l'obstacle est moindre que la plus grande force de percussion ou de Frottement. Le parallélépipède surmontera donc cette dernière force ; il se mettra donc en mouvement, & continuera de se mouvoir tant qu'on aura $a \sin \Sigma >$, ou $=\pi$, & il s'arrêtera lorsqu'on aura $a \sin \Sigma < \pi$, comme on l'a démontré, Art. 302 & 303, lorsqu'on a supposé constante la force de percussion, ou de Frottement.

PROPOSITION L.

(384.) Trouver la force, ou la résistance réunie de l'obstacle & des aspérités.

La force de percussion est $(309.) \pi = \frac{HH'}{HI'+HI} \left(\frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2 + (aB - \frac{1}{2}A)(X+Z)}{A+B} \right)$.

Qu'on fasse dans cette expression $B = \infty$, & $V = 0$, à cause que le plan BE est immobile ; & qu'on mette ensuite $a \cos \Sigma$, pour la puissance qui est dirigée suivant AH . Après cela, si l'on substitue en place de U seul, la quantité $U \cos \Sigma$ pour la vitesse qui demeure suivant AH , on aura, pour l'expression de la force de percussion dont le parallélépipède supporte l'effet sur sa base CF , $\pi = \dots\dots\dots$

$\frac{HH'}{HI'+HI} \left(\frac{1}{2}AU^2 \cos^2 \Sigma + a \sin \Sigma (X+Z) \right)$. Nommant maintenant h l'amplitude de l'obstacle & des aspérités ; i l'impression qui se fait sur l'un & sur l'autre ; & ϕ la force de percussion dont ils supportent l'effort, celle-ci sera $(309.) \frac{D^h, ik'}{hi'+hi}$: mais ayant pareillement $\frac{DH, IH'}{HI'+HI} = \pi$, nous aurons cette analogie $\dots\dots\dots$

$\frac{HH'}{HI'+HI} : \frac{hih'}{hi'+hi} :: \frac{HH'}{HI'+HI} \left(\frac{1}{2}AU^2 \cos^2 \Sigma + a \cos \Sigma (X+Z) \right) : \phi$; d'où l'on tire la percussion, la force, ou la résistance réunie de l'obstacle & des aspérités, c'est-à-dire, $\phi = \dots\dots\dots$

$$\frac{i(hh')}{i(hi'+hi)} \left(\frac{1}{2}AU^2 \cos^2 \Sigma + a \cos \Sigma (X+Z) \right).$$

S C O L I E.

(385.) Il n'y a, dans cette équation, comme on l'a dit, Art. 310. (Voyez aussi la note de l'Art. 309.) que les quantités h & h' qui soient variables, toutes les autres quantités sont censées avoir leur plus grande

PLANC. III.

valeur : de sorte qu'en substituant, ou en considérant les quantités h & h' comme l'expression des plus grandes amplitudes, on aura aussi la plus grande valeur de ϕ .

COROLLAIRE.

(386.) Cette quantité est donc le Frottement que doit vaincre la puissance $\theta \sin \Sigma$, pour mettre le parallépipède en mouvement. Car la plus grande résistance étant une fois surmontée, & l'amplitude h de l'obstacle & des aspérités ne variant point, la résistance demeure aussi constante, & le parallépipède continue de se mouvoir avec la vitesse qui lui demeure après avoir surmonté le Frottement : & cette vitesse sera considérée comme la vitesse primitive pour la continuation du mouvement, qui se fera suivant les règles établies dans l'Art. 299 ; puisque le Frottement, ou la percussion, demeure constant.

PROPOSITION LI.

(387.) Trouver la force de Percussion que produit, ou peut produire la puissance $\alpha \sin \Sigma$.

Fig. 38.

La vitesse avec laquelle le parallépipède est dirigé suivant CF , étant $= U \sin \Sigma$; la puissance qui l'anime suivant la même direction, étant $= \alpha \sin \Sigma$; les plus grandes profondeurs des impressions étant $= x$ & γ^* ; & les quantités h, i désignant l'amplitude & la grandeur des mêmes impressions, à quelque instant que ce soit du choc : en substituant ces valeurs dans l'expression de la Percussion (309.) ; faisant de plus $B = \infty$, $V = 0$, & nommant Φ la force de Percussion que peut produire la puissance $\alpha \sin \Sigma$, on aura $\Phi = \dots \dots \dots$

$$\frac{h h'}{h i + h' i} \left(\frac{1}{2} A U^2 \sin \Sigma^2 + \alpha \sin \Sigma (x + \gamma) \right).$$

COROLLAIRE I.

(388.) Ayant donc $\Phi < \phi$, le parallépipède ne pourra commencer son mouvement le long du plan ; il parviendra seulement à former sur l'obstacle & les aspérités sa plus grande impression i ; la force d'élasticité le fera ensuite retourner en arrière avec une vitesse négative, jusqu'à ce que cette vitesse devenant aussi $= 0$, le paral-

* On ne doit pas perdre de vue que x & γ sont les profondeurs des plus grandes impressions faites dans l'obstacle FI , & le parallépipède, suivant la direction CF du mouvement, en vertu de la puissance $\alpha \sin \Sigma$, & de la vitesse primitive $U \sin \Sigma$; tandis que X & Z représentent les profondeurs des plus grandes impressions dans le plan & le parallépipède, dans la direction AH , en vertu de la puissance $\alpha \cos \Sigma$, & de la vitesse $U \cos \Sigma$ qui demeure dans cette direction. On fera la même remarque pour les quantités h, i & h', i' , relativement aux quantités H, I & H', I' .

lépipède

l'ellipède revienne à prendre la vitesse positive ; & il continuera ainsi d'aller & venir par des oscillations répétées , qui doivent diminuer continuellement , à mesure que l'élasticité va en diminuant , & par conséquent il doit arriver que le parallépipède cesse entièrement de se mouvoir , comme on l'a dit , *Art.* 383.

C O R O L L A I R E . II.

(389.) Au contraire, si l'on avoit $\Phi > \varphi$, le parallépipède commencerait à se mouvoir le long du plan , & il continueroit , sans s'arrêter , si l'on avoit $\theta \sin \Sigma =$, ou $> \varphi$.

C O R O L L A I R E . III.

(390.) Le terme auquel le parallépipède , cessant déjà de pouvoir se soutenir sur le plan sans se mouvoir , est près de se déterminer au mouvement , sera celui dans lequel $\Phi = \varphi$, ou $\frac{i(hh')}{h(h'+h'i)} (\frac{1}{2} AU^2 \cos \Sigma^2 + a \cos \Sigma (X+Z)) = \dots \dots \dots$
 $\frac{h'h'}{h'i+h'i} (\frac{1}{2} AU^2 \sin \Sigma^2 + x \sin \Sigma (x+\zeta))$; équation d'où l'on tire , en divisant par $\frac{i(hh')}{h'i+h'i}$, $\frac{1}{2} (\frac{1}{2} AU^2 \cos \Sigma^2 + a \cos \Sigma (X+Z)) = \dots \dots \dots$
 $\frac{1}{2} (AU^2 \sin \Sigma^2 + x \sin \Sigma (x+\zeta))$.

C O R O L L A I R E . IV.

(391.) Les variables h & h' ne se trouvant plus dans cette équation , il s'ensuit qu'à quelque instant que ce soit du choc , on aura l'égalité des deux forces Φ & φ , & par conséquent l'effet qu'on se propose.

C O R O L L A I R E . V.

(392.) Si l'on avoit $U=0$, cette équation deviendrait $\frac{a \cos \Sigma (X+Z)}{2} = \frac{a \sin \Sigma (x+\zeta)}{2}$; mais à cause de la similitude des impressions faites par les mêmes corps , on a $\frac{X+Z}{1}$ est à $\frac{x+\zeta}{1}$ comme $\frac{1}{H}$ est à $\frac{1}{h}$: substituant ces valeurs , on aura $a \sin \Sigma = \frac{h a \cos \Sigma}{H}$; c'est - à - dire que la puissance $a \cos \Sigma$, qui presse le parallépipède perpendiculairement sur le plan , est à la puissance $a \sin \Sigma$, qui surmonte le Frottement , comme l'amplitude H de l'impression , est à l'amplitude h de l'obstacle & des aspérités.

C O R O L L A I R E . VI.

(393.) Plus le nombre & la grandeur des aspérités sera grand , plus la puissance $\theta \sin \Sigma$, qui doit vaincre le Frottement , doit être grande ; & réciproquement , &c.

TOME I.

Z

COROLLAIRE VII.

(394.) Le nombre des aspérités suivant une certaine régularité dans ses augmentations & ses diminutions, nous pouvons le supposer proportionnel à l'amplitude H de l'impression, particulièrement dans les corps qui ne sont pas beaucoup élastiques; l'amplitude des aspérités sera donc, dans ce cas, $= nH$, n marquant un nombre quelconque dépendant de la grandeur des mêmes aspérités. Supposant en outre que l exprime la longueur de l'impression, & k sa largeur, on aura $H = lk$, ce qui donne $h = nlk + kX$, kX exprimant l'amplitude de l'obstacle *. Nous aurons donc, d'après cela, $a \cos \Sigma : a \sin \Sigma :: lk : nlk + kX$, ou :: $l : nl + X$, & par conséquent $a \sin \Sigma = \frac{(nl+X)a \cos \Sigma}{l}$.

COROLLAIRE VIII.

(395.) Plus l'impression aura de longueur, moins il faudra de force à la puissance $a \sin \Sigma$ qui doit vaincre le Frottement.

COROLLAIRE IX.

(396.) Si on suppose les corps extrêmement lisses, & que par conséquent on puisse faire abstraction des aspérités, on aura $n = 0$, & par conséquent $a \cos \Sigma : a \sin \Sigma :: l : X$; ou $a \sin \Sigma = \frac{Xa \cos \Sigma}{l}$.

SCOLIE I.

(397.) De l'équation $a \sin \Sigma = \frac{ha \cos \Sigma}{H}$, ou, en divisant par a , de $\sin \Sigma = \frac{h \cos \Sigma}{H}$, on peut tirer, d'après l'expérience, la valeur de $\sin \Sigma$, ou bien celle de h ; mais, comme il est difficile, dans la pratique, de se procurer une valeur exacte de h , ce qui n'a pas lieu pour celle de Σ , qui peut se mesurer avec une grande facilité, on déduira la valeur de h par cette équation $h = \frac{H \sin \Sigma}{\cos \Sigma}$. Pour avoir la valeur de Σ , on n'a qu'à élever le plan peu à peu & très-doucement, par une de ses extrémités, depuis la situation horizontale, jusqu'à ce que le parallépipède commence son mouvement; & mesurer l'angle que forme le plan avec l'horizon dans cette dernière situation, ce sera la valeur de Σ , d'où dépend celle de $h = \frac{H \sin \Sigma}{\cos \Sigma}$. La valeur de H étant celle de l'amplitude de l'impression, on peut la mesurer à très-peu près. En procédant de cette manière, on pourra trouver la valeur de h , non-

* Ceci est évident, puisque X , qui marque la profondeur de la plus grande impression faite dans le plan, est égale à la hauteur de l'obstacle, & que k en représente la largeur.

seulement celle qui correspondra à différentes puissances, mais encore à différentes dimensions, tant en longueur qu'en largeur, du parallépipède, & on en pourra former des Tables qui seront d'un grand usage dans la pratique. Si l'on met un corps mou entre le plan & le parallépipède, de sorte que ce corps, en remplissant la capacité de l'impression, empêche que le parallépipède ne touche au plan; dans ce cas, l'obstacle, ainsi que les aspérités qu'il faut vaincre, se formeront des parties du corps mou, dont la résistance est beaucoup moindre; & par conséquent il faudra une moindre puissance pour la surmonter. Ceci est une conséquence que l'expérience justifie journellement; & avec d'autant plus de précision, qu'on sçait mieux choisir & varier le corps mou qu'on interpose, relativement aux deux corps qui se frottent, selon l'espèce & la variété de ceux-ci. Tout cela vient de ce que le corps mou interposé doit seul empêcher le contact des deux corps qui se frottent. Pour les corps légers & polis, l'huile suffit; mais pour les corps fort pesants & raboteux, il est nécessaire d'employer de la graisse, ou du suif, & encore doit-on allier ces substances, & leur donner différentes préparations, selon la nature des différents corps.

COROLLAIRE X.

(398.) L'action peut procéder de deux puissances dont il résulte un mouvement composé dans le parallépipède, l'une étant perpendiculaire au plan, & l'autre lui étant parallèle. Supposons que la puissance α soit celle qui agit perpendiculairement au plan, avec la vitesse primitive U , & que la puissance θ agisse parallèlement au même plan, avec la vitesse primitive V ; si l'on substitue, dans l'équation de l'Art. 384, α en place de $\alpha \cos \Sigma$, & si l'on fait $\Sigma = 0$, on aura $\phi = \frac{i(hh')}{i(h^2 + h'^2)} (\frac{1}{2}AU^2 + \alpha(X+Z))$. Faisant de même, dans l'équation de l'Article 387, $\theta = \alpha$, $\sin \Sigma = 1$, & $U = V$, on aura $\phi = \dots$
 $\frac{hh'}{h^2 + h'^2} (\frac{1}{2}AV^2 + \theta(x+\zeta))$.

COROLLAIRE XI.

(399.) Le parallépipède sera donc au point de commencer sa marche, lorsque $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}AU^2 + \alpha(X+Z)) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}AV^2 + \theta(x+\zeta))$: ou à cause que $1 :: i :: H(X+Z) : h(x+\zeta)$, lorsque $\frac{\frac{1}{2}AU^2 + \alpha(X+Z)}{H(X+Z)} = \dots$
 $\frac{\frac{1}{2}AV^2 + \theta(x+\zeta)}{h(x+\zeta)}$.

COROLLAIRE XII.

(400.) Si l'on avoit $U=0$, & $V=0$, l'équation deviendrait $\frac{a}{H} = \frac{\theta}{h}$, ou $\theta = \frac{ha}{H}$; c'est-à-dire que la puissance a qui agit sur le parallépipède perpendiculairement au plan, est à la puissance θ qui surmonte le Frottement, comme l'amplitude H de l'impression, est à l'amplitude h de l'obstacle & des aspérités: c'est le même résultat que celui qu'on a trouvé ci-dessus (392).

COROLLAIRE XIII.

(401.) Si l'on avoit seulement $U=0$, on auroit $\frac{a}{H} = \frac{\frac{1}{2}AV^2 + \theta(x+\varphi)}{h(x+\varphi)}$ ou $\frac{ha}{H} - \frac{AV^2}{2(x+\varphi)} = \theta$, d'où l'on voit combien, dans ce cas, la puissance θ , qui doit vaincre le Frottement, peut être diminuée.

COROLLAIRE XIV.

(402.) Si l'on avoit donc $\frac{ha}{H} - \frac{AV^2}{2(x+\varphi)} = 0$, on auroit aussi $\theta = 0$; c'est-à-dire que le parallépipède n'auroit pas besoin, pour vaincre le Frottement, de l'action d'une puissance qui agit sur lui parallèlement au plan; il le surmonteroit par l'action que produit la vitesse V .

COROLLAIRE XV.

(403.) Pour que le Frottement soit vaincu, & que le parallépipède commence à se mouvoir, il faut donc seulement avoir $\frac{ha}{H} < \frac{AV^2}{2(x+\varphi)} + \theta$.

COROLLAIRE XVI.

(404.) Si le plan étoit horizontal, & si a étoit la gravité de la masse A , il seroit nécessaire, pour vaincre le Frottement, qu'on eût $\frac{h}{H} < \frac{V^2}{64(x+\varphi)} + \frac{\theta}{a}$, (52); ou si l'on avoit $\theta = 0$, il faudroit avoir $\frac{h}{H} < \frac{V^2}{64(x+\varphi)}$; ou bien, en prenant e pour la hauteur d'où devoit tomber le corps pour acquérir la vitesse V , il faudroit avoir $\frac{h}{H} < \frac{e}{x+\varphi}$: ou $\frac{h(x+\varphi)}{H} < e$, (52).

COROLLAIRE XVII.

(405.) Dans les corps durs, la quantité $h(x+\varphi)$ étant extrêmement petite à l'égard de H , on voit qu'il ne faut au parallépipède qu'une vitesse primitive très-petite, pour vaincre le Frottement, & se mettre en mouvement.

COROLLAIRE XVIII.

(406.) Si l'on avoit $V=0$, la puissance α étant toujours supposée l'action de la gravité sur la masse A , il seroit nécessaire d'avoir $\frac{H}{H} < \frac{1}{2}$ pour que le parallépipède surmontât le Frottement ; ou ce qui revient au même, il faudroit que la raison de la gravité à la puissance θ , qui doit vaincre le Frottement, fût moindre que $\frac{H}{4}$.

SCOLIE II.

(407.) Si on consulte les Auteurs qui ont écrit, jusqu'à présent, sur ce sujet, on verra qu'on a généralement cru, & qu'on croit encore que le Frottement est seulement proportionnel à la puissance qui agit sur le parallépipède perpendiculairement au plan, abstraction faite des aspérités. Cette opinion est fondée sur quelques expériences faites par différents Auteurs, particulièrement par M. Amontons, de l'Académie des Sciences de Paris, & par M. Bilfinger. Le premier dit avoir toujours trouvé la puissance θ , qui est sur le point de vaincre la résistance du Frottement, égale à la troisième partie de α , ou de la puissance qui agit sur le parallépipède perpendiculairement au plan ; c'est-à-dire, $\theta = \frac{1}{3}\alpha$; mais le second fait seulement $\theta = \frac{1}{2}\alpha$. Cette différence dans les résultats auroit dû faire douter que la résistance du Frottement fût seulement proportionnelle à la puissance α ; mais considérant que les aspérités plus ou moins grandes des plans dont on s'est servi pour faire les expériences, pouvoient être la cause de ces différences, on adopta facilement cette opinion : de sorte qu'il paroît certain que ces déterminations ont été établies en faisant abstraction des aspérités. Mais, dans cette supposition même, ces déterminations ne s'accordent point avec nos formules. Selon ces formules (396.), $\theta = \frac{X\alpha}{L}$: par conséquent, selon M. Amontons, on devroit toujours avoir $\frac{X}{L} = \frac{1}{3}$; ou, selon M. Bilfinger, $\frac{X}{L} = \frac{1}{2}$; c'est-à-dire, que la profondeur de l'impression devoit être, dans tous les cas, suivant le premier Auteur, la troisième partie de la longueur du parallépipède ; & la quatrième partie, suivant le second ; conséquence dont l'absurdité est tellement évidente, qu'il n'est pas nécessaire de s'arrêter à la démontrer.

Nous ne devons cependant pas révoquer en doute les expériences faites par ces deux célèbres Auteurs. Tout peut se concilier, en supposant qu'ils ne se soient pas étendus jusqu'à les faire avec différents corps d'une même pesanteur & d'une même amplitude dans leur base,

mais de différentes dimensions en longueur & largeur, & de différentes duretés. Ce soupçon ne paroîtra pas sans fondement, si l'on se rappelle une expérience très-commune. Si un couteau, par exemple, porte sur un plan par son tranchant, & qu'en appuyant sur lui, on veuille le faire mouvoir, dans cette situation, perpendiculairement à son plan, il tend plutôt à s'incliner qu'à se mouvoir, & on a de la peine à le maintenir droit sur le plan. Mais si, au contraire, on veut le faire mouvoir directement dans le sens de son plan, il marche avec très-peu d'effort : ce qui fait voir clairement combien le frottement est moindre dans ce second cas que dans le premier*.

Pour nous approcher de ce que les deux Auteurs cités ont établi, d'après leurs expériences, nous devons, au contraire, admettre qu'il existe toujours des aspérités, quelque lisses & polis que puissent être les corps ; & que l'obstacle, sur-tout dans les corps durs, est insensible, ou est presque susceptible d'être négligé. Dans ce cas, on aura (400.) $\theta = \frac{h^2}{H}$, ou en substituant (394.) les valeurs de $H = lk$, & de $h = nk + kx$, on aura $\theta = \frac{k(nl+X)}{lk} = \frac{n(l+X)}{l}$: de sorte qu'en négligeant la quantité X qui provient de l'obstacle, comme étant infiniment petite, par rapport à nl , qui provient des aspérités, on aura $\theta = na$; c'est-à-dire, selon M. Amontons, $n = \frac{1}{2}$, & selon M. Bisfinger, $n = \frac{1}{3}$: différence qui n'implique alors aucune contradiction, puisque n exprime la grandeur des aspérités. Ceci prouve combien notre théorie est d'accord avec les expériences ; mais il faut observer que si l'on peut regarder l'obstacle

* On peut expliquer en cette manière pourquoi le couteau se meut sur le plan, avec plus de facilité, dans la direction de son tranchant, que dans une direction perpendiculaire au plan de sa lame.

La puissance qui surmonte le frottement, est, d'après ce qui a été dit précédemment, $\theta = \frac{n(l+X)}{l}$ (394 & 398.) ; & comme, dans l'impression que forme le tranchant du couteau sur le plan, les aspérités sont nulles à l'égard de l'obstacle qui en résulte, on a $n = 0$, & par conséquent $\theta = \frac{X}{l}$: donc plus la longueur l de l'impression sera grande, plus la quantité $\frac{X}{l}$, ou son égale θ , sera petite. Mais lorsqu'on veut que le couteau se meuve perpendiculairement au plan de sa lame, la longueur de l'impression est alors $l = k$ (394.) ; quantité plus petite que l , qui en exprime la largeur : donc, dans ce cas, on a $\frac{X}{k} > \frac{X}{l}$, qui est la puissance nécessaire pour surmonter le frottement dans le premier cas. Donc la puissance nécessaire pour faire mouvoir le couteau dans une direction perpendiculaire au plan de sa lame, doit être plus grande que celle qu'il faut employer pour le faire mouvoir dans la direction de son tranchant.

On remarquera que quand on parle ici de la longueur de l'impression, on n'entend pas parler de la quantité X , mais de la quantité l , qui est la longueur de l'amplitude de l'impression, prise dans la direction du mouvement du corps sur le plan, suivant ce que l'Auteur a établi, Art. 394.

comme nul dans les corps très-durs, on ne peut faire cette supposition lorsqu'il s'agit de corps mous, ou qui ne sont pas extrêmement durs. Dans ces cas, loin que cette supposition soit légitime, ce sont, au contraire, les aspérités qu'on doit supposer comme nulles, par rapport à l'obstacle, & par conséquent le parallépipède éprouvera moins de résistance, en se mouvant dans une direction perpendiculaire à son plus petit côté, que s'il se meut dans une direction perpendiculaire à son plus grand côté.

DES EFFETS qui ont lieu après que la résistance du Frottement est vaincue.

PROPOSITION LII.

(408.) Trouver la relation entre la vitesse u , & l'espace parcouru par le corps A .

On a déjà vu (389.) que toutes les fois qu'on aura $\Phi > \varphi$, le parallépipède se mettra en mouvement. On a encore vu (383.), que, si dans le même temps, la puissance θ , ou $\alpha \sin \Sigma$ qui agit sur le parallépipède parallèlement au plan, est plus grande que la force de résistance de l'obstacle & des aspérités, il continuera de se mouvoir, sans qu'il y ait aucune limite à son mouvement; & que le Frottement sera constant pendant la durée du mouvement, à cause que l'amplitude de l'obstacle & des aspérités ne reçoit aucune augmentation (391.)*. D'après tout ceci, la vitesse correspondante sera (278.) $u = \left(U^2 + \frac{\alpha(x+\gamma)}{\frac{1}{2}A} - \frac{\int D H dx}{\frac{1}{2}A} \right)^{\frac{1}{2}}$, ou, en substituant θ pour α , & h pour H , on aura $u = \left(U^2 + \frac{2\theta(x+\gamma)}{A} - \frac{2Dh x}{A} \right)^{\frac{1}{2}}$; mais, dans le cas présent, $\gamma = 0$ par rapport à x , cette expression devient donc $u = \left(U^2 + \frac{2\theta x}{A} - \frac{2Dh x}{A} \right)^{\frac{1}{2}}$, U désignant la vitesse primitive qu'avoit le corps lorsqu'il a surmonté le Frottement.

COROLLAIRE I.

(409.) S'il n'y avoit qu'une seule & unique puissance α , qui animât le parallépipède, il seroit nécessaire de mettre $\alpha \sin \Sigma$ pour θ , & l'on auroit $u = \left(U^2 + \frac{2\alpha \sin \Sigma x}{A} - \frac{2Dh x}{A} \right)^{\frac{1}{2}}$.

* Puisque (391.) les quantités h & h' disparaissent dans la supposition de $\Phi = \varphi$, elles disparaîtront également lorsque $\Phi > \varphi$; ce qui fait voir que ces quantités h & h' sont constantes. En outre, il ne faut pas oublier que l'Auteur a supposé la dureté constante dans les formules de la percussion, qu'il applique ici à la théorie du Frottement.

COROLLAIRE II.

(410.) Comme de la supposition de $z=0$, il résulte que D' doit être comme infini par rapport à D , on aura (253.) la force de l'obstacle & des aspérités $\phi = \frac{Dh D'K'}{Dh + D'K'} = Dh$: on pourra donc substituer ϕ à la place de Dh , & on aura encore
 $u = (U^2 + \frac{2\theta x}{A} - \frac{2\theta x}{A})^{\frac{1}{2}}$; & dans le cas où il n'y auroit que la puissance α qui animât le parallépipede, on auroit $u = (U^2 + \frac{2\alpha x \sin \Sigma}{A} - \frac{2\theta x}{A})^{\frac{1}{2}}$.

COROLLAIRE III.

(411.) Pour que le parallépipede s'arrête dans le cours de son mouvement, il faut que $u=0$: donc, pour ce cas, on aura $U^2 + \frac{2\theta x}{A} - \frac{2Dh x}{A} = 0$; ou $U^2 = \frac{2x}{A} (Dh - \theta) = \frac{2x}{A} (\phi - \theta)$. D'où l'on voit clairement que, pour que le parallépipede s'arrête, il faut qu'on ait $\phi = Dh > \theta$; sans cela, $\phi - \theta$ seroit négatif, & par conséquent U imaginaire, ce qui est contre la supposition; ou bien $\phi - \theta$ seroit $= 0$, & par conséquent aussi $U=0$, ce qui est pareillement contre la supposition.

COROLLAIRE IV.

(412.) Le point dans lequel s'arrêtera le parallépipede, sera donc celui où l'on aura $x = \frac{AU^2}{2(Dh - \theta)} = \frac{AU^2}{2(\phi - \theta)}$.

PROPOSITION LIII.

(413.) Trouver le rapport entre l'espace parcouru par le corps A, & sa vitesse.

L'équation qui correspond à ce cas, est (300.) $x + z = \frac{\frac{1}{2}A(U^2 - u^2)}{\pi + \alpha}$, laquelle se réduit à $x = \frac{A(U^2 - u^2)}{2(\phi - \theta)} = \frac{A(U^2 - u^2)}{2(Dh - \theta)}$, en substituant ϕ à la place de π , & θ à celle de α , & faisant de plus $z=0$; & si l'on avoit $\theta > \phi$, cette équation seroit $x = \frac{A(u^2 - U^2)}{2(\theta - \phi)} = \frac{A(u^2 - U^2)}{2(\theta - Dh)}$.

* Ces secondes expressions que l'Auteur donne pour le cas où la puissance θ qui anime le corps sur le plan, est plus grande que la résistance ϕ qu'il doit vaincre, ne nous paroissent pas absolument essentielles; les premières nous semblent suffisantes pour ce qu'il a dessein d'exprimer dans ce moment. Car puisque le corps éprouve, dans son mouvement sur la surface, une résistance moindre que la puissance qui l'anime, sa vitesse ira en augmentant; & à quelque instant que ce soit de la marche du corps, la vitesse u sera plus grande que la vitesse primitive U ; & alors $U^2 - u^2$ est une quantité négative. Mais, dans ce même cas, $\phi - \theta$ est aussi négative; donc x sera positive, & aura la même valeur que celle qu'on obtient des secondes expressions; les premières

COROLLAIRE

COROLLAIRE.

(414.) Dans le cas où x parvient à sa plus grande valeur; c'est-à-dire, lorsqu'il représente le plus grand espace; on aura $u=0$ *, & par conséquent $x = \frac{AU^2}{2(\varphi-\theta)} = \frac{AU^2}{2(Dh-\theta)}$, comme on l'a trouvé ci-devant (412.).

PROPOSITION LIV.

(415.) Trouver la relation entre le temps t de la durée du mouvement du corps A, & l'espace qu'il a parcouru.

L'équation (258.) $dt = \frac{dx+dz}{u-v}$ se réduit; dans ce cas où $z=0$, & $v=0$, à $dt = \frac{dx}{u}$; substituant, dans cette équation, la valeur de u trouvée, (408.), on aura $dt = \frac{dx}{(U^2 + \frac{2Ax}{A} - \frac{2D^2x}{A})^{\frac{1}{2}}}$; d'où l'on tire,

$$\text{en intégrant, } t = \frac{(A^2U^2 + 2Ax(\theta-Dh))^{\frac{1}{2}} - AU}{\theta-Dh} = \frac{(A^2U^2 + 2Ax(\theta-\varphi))^{\frac{1}{2}} - AU}{\theta-\varphi} **.$$

conviennent donc aussi bien au cas où $\theta > \varphi$, qu'à ceux où θ est $=$, ou $< \varphi$ (383.). On ne doit pas perdre de vue ce qui a été dit dans l'Art. 387, & sa note, que, dans cette Proposition, aussi bien que dans la précédente, x marque la profondeur de l'impression faite dans l'obstacle, & par conséquent l'espace parcouru par le parallépipède le long du plan, puisque z est supposé $= 0$.

* Cela s'appercevra facilement, si l'on fait attention que, pour que x soit le plus grand qu'il est possible, il faut que sa valeur $\frac{A(U^2-u^2)}{2(\varphi-\theta)}$ soit aussi la plus grande qu'il est possible; mais, pour cela, il faut que $u=0$, puisque toutes les autres quantités qui entrent dans cette expression, sont constantes (386.). On remarquera qu'il faut, pour ce cas, que $\varphi > \theta$; car autrement il n'y aurait point de limite pour x (302 & 303.).

** Pour trouver cette intégrale, je mets la valeur de dt sous cette forme, $dt = \dots$
 $dx \left(U^2 + \left(\frac{2\theta-2Dh}{A} \right) x \right)^{-\frac{1}{2}}$; je fais $U^2 + \left(\frac{2\theta-2Dh}{A} \right) x = y$, d'où je tire $x = \frac{Ay-AU^2}{2\theta-2Dh}$,
 & par conséquent $dx = \frac{A dy}{2\theta-2Dh}$. Substituant maintenant ces quantités en place de leurs
 correspondantes, j'ai $dt = \frac{A dy}{2\theta-2Dh} y^{-\frac{1}{2}} = \frac{A y^{-\frac{1}{2}} dy}{2\theta-2Dh}$, & en intégrant $t = \frac{A y^{\frac{1}{2}}}{\theta-Dh} + C$;
 mettant pour $y^{\frac{1}{2}}$ sa valeur $\left(U^2 + \left(\frac{2\theta-2Dh}{A} \right) x \right)^{\frac{1}{2}}$, on trouve $t = \frac{A \left(U^2 + \left(\frac{2\theta-2Dh}{A} \right) x \right)^{\frac{1}{2}}}{\theta-Dh}$
 $+ C = \frac{(A^2U^2 + 2Ax(\theta-Dh))^{\frac{1}{2}}}{\theta-Dh} + C$.

Pour trouver la valeur de la constante C , je remarque que cette intégrale doit être zéro au commencement de l'action, ou lorsque $x=0$; or si l'on élève tout le numérateur de la valeur de t à la puissance $\frac{1}{2}$, le premier terme sera AU , & tous les autres seront affectés de x ; donc ils s'évanouiraient tous, à l'exception du premier, par la supposition de $x=0$. On a donc $\frac{AU}{\theta-Dh} + C = 0$, ou $C = -\frac{AU}{\theta-Dh}$. Substituant cette valeur de C dans celle de t , on trouve précisément l'expression donnée par l'Auteur.

COROLLAIRE.

(416.) Pour le cas du plus grand espace parcouru, dans lequel on a $Dh > \theta$, ou $\phi > \theta$, nous avons trouvé (412 & 414.) $x = \dots$

$\frac{AU^2}{2(Dh-\theta)} = \frac{AU^2}{2(\phi-\theta)}$: cette valeur étant substituée dans l'équation précédente, donnera, pour le temps dans lequel le corps parcourt le plus grand espace, $t = \frac{AU}{Dh-\theta} = \frac{AU}{\phi-\theta}$.

PROPOSITION LV.

(417.) Trouver la relation entre l'espace x que parcourra le corps A, & le temps t .

Multipliant l'équation précédente $t = \frac{(A^2U^2 + 2Ax(\theta-\phi))^{\frac{1}{2}} - AU}{\theta-\phi}$ par $\theta - \phi$, ajoutant AU de part & d'autre, & quarrant, il en résulte $A^2U^2 + 2AUt(\theta-\phi) + t^2(\theta-\phi)^2 = A^2U^2 + 2Ax(\theta-\phi)$: d'où l'on tire, en soustrayant de part & d'autre A^2U^2 , & en divisant par $2A(\theta-\phi)$, $x = Ut + \frac{t^2(\theta-\phi)}{2A} = Ut + \frac{t^2(\theta-Dh)}{2A}$.

PROPOSITION LVI.

(418.) Trouver le temps t qu'emploie le corps A dans son mouvement, par sa relation avec la vitesse.

L'équation qui correspond à ce cas est (343.) $t = \frac{A(u-U)}{u-\phi}$. Substituant θ pour α , & ϕ pour π , elle devient $t = \frac{A(u-U)}{\theta-\phi}$.

COROLLAIRE.

(419.) Dans le cas de la plus grande impression, ou du plus grand espace parcouru, on aura $t = \frac{AU}{\phi-\theta}$.

PROPOSITION LVII.

(420.) Trouver la vitesse qu'aura le corps A, par sa relation avec le temps de la durée du mouvement.

Multipliant par $\theta - \phi$, l'équation $t = \frac{A(u-U)}{\theta-\phi}$, divisant par A , & ajoutant U de part & d'autre, on aura $u = U + \frac{t(\theta-\phi)}{A}$.

COROLLAIRE.

(421.) Supposons que le parallépipède A descende le long du plan, par la seule action de la gravité α ; que n soit un nombre quelconque, de sorte qu'on ait $\alpha \sin \Sigma - \phi = \theta - \phi = na$; nous aurons

$u = U \pm \frac{n\alpha}{A}$: mais (52.) $A = \frac{1}{\sin \alpha}$; donc $u = U \pm 32nt^*$.

S C O L I E.

(422.) Dans le volume des *Mémoires de l'Académie Royale de Berlin*, de l'année 1748, on trouve un Mémoire de *Léonard Euler*, sur la manière dont on peut concevoir la résistance du Frottement. Ce Sçavant conclut que cette résistance est moindre dans le cas du mouvement que dans celui de l'équilibre ; ce qui est absolument contraire à nos résultats. Pour concevoir & rendre raison de cette différence, il suffira de dire que ce sçavant Auteur ne développe point, dans la théorie qu'il expose, ce en quoi il fait consister le Frottement ; il dit seulement ce qui peut servir à en concevoir les effets. Il suppose qu'il provient uniquement des aspérités du plan & du parallépipède ; & en aucune manière de l'obstacle *FI*, que nous avons déjà vu avoir nécessairement lieu, en vertu de la puissance perpendiculaire $\alpha \cos \Sigma$, sur le même parallépipède. Il suppose encore que les aspérités du parallépipède & du plan sont autant de petits plans inclinés, ou autant de dents semblables, afin que les dents du plan puissent s'engrener, ou s'ajuster parfaitement, avec celles du parallépipède. Dans cette supposition, il est clair que la puissance qui agit sur le parallépipède, étant d'une grandeur suffisante, obligera ce corps, ou ses petites dents à ramper le long de celles du plan, jusqu'à ce qu'elles se soutiennent sommets contre sommets. Ce point étant passé, elles s'engreneront de nouveau, par la chute du parallépipède, avec les dents suivantes, chacune avec sa correspondante : après quoi elles recommenceront à s'élever ; & continuant ainsi, le Frottement se fera, comme on voit, par sauts d'une dent à l'autre ; de sorte que la première fois que les dents du parallépipède montent le long de celles du plan, c'est alors qu'on éprouve le Frottement total ; & les chûtes étant une action opposée, ou négative, le premier Frottement, qui est celui qui a lieu dans le cas d'équilibre, est diminué. Cette façon de considérer le Frottement peut être propre à en faire concevoir facilement les effets ; mais on aperçoit en même temps ses inconvénients, & les fortes objec-

* Plusieurs Lecteurs n'appercevront peut-être pas tout d'un coup pourquoi l'Auteur emploie ici le double signe dans l'équation $u = U \pm \frac{n\alpha}{A}$: mais la difficulté disparaîtra, si l'on considère qu'il a voulu réunir dans cette équation le cas où la force ϕ de l'obstacle & des aspérités excède la puissance agissante $\frac{1}{2}$, cas où la quantité $\frac{1}{2} - \phi$ qu'il a représentée par $n\alpha$, est négative. Ainsi, sous cette forme, l'équation convient à tous les cas ; on voit que u peut être positif, puis égal à zéro, & ensuite négatif (383.).

PEYNG. II.

tions qu'on peut élever contre elle. Les dents du parallépipède ne peuvent absolument point monter le long de celles du plan, & parvenir au point d'être sommets contre sommets, ni même proches de cette situation, sans qu'il ne se soit fait une impression réciproque dans ces mêmes dents, & par conséquent qu'il ne se soit formé un nouvel obstacle à vaincre, sans que jamais il puisse arriver que cet obstacle soit nul, & qu'il puisse y avoir de chute; & par la même raison, il ne peut y avoir de diminution dans le Frottement, dans le cas du mouvement.

Une expérience, dit le même sçavant Auteur, favorise cette détermination; la voici. Il ne peut jamais arriver que le parallépipède se meuve sur le plan, avec beaucoup de lenteur, quelque soin qu'on apporte à ne donner au plan que l'inclinaison nécessaire pour mettre le parallépipède en mouvement. Il dit, au contraire, qu'une fois qu'il a commencé à se mouvoir, son mouvement s'accélère avec une grande rapidité, & que, par conséquent, il faut que le Frottement diminue par le mouvement; mais on va voir qu'il n'est point d'expérience qui s'accorde plus parfaitement avec notre théorie.

L'équation $u = U \pm 32nt$, est celle qui correspond précisément au cas dont il est ici question. Si nous faisons $n = \frac{1}{2}$, elle deviendra $u = U \pm t$; & si l'on élève le plan avec toute la lenteur possible, & qu'on fasse, en conséquence, $U = 0$, il restera cependant encore $u = t$; c'est-à-dire que la vitesse u que prendra le corps A , lors même qu'on ne donne au plan que l'inclinaison nécessaire pour qu'il le mette en mouvement, sera encore d'autant de pieds par seconde, qu'il y a de secondes dans le temps t : en sorte qu'à la fin de la première seconde de temps, il marchera déjà avec une vitesse d'un pied par seconde; & à la fin des deux premières secondes de temps, sa vitesse sera de deux pieds par seconde, & ainsi de suite. Il ne faut maintenant que faire voir qu'en supposant $n = \frac{1}{2}$, on ne suppose dans le plan BE qu'un mouvement très-petit, c'est-à-dire que l'angle $BEL = \Sigma$ n'est augmenté que d'une très-petite quantité, l'inclinaison du plan étant déjà supposée telle que le corps soit sur le point de se mettre en mouvement; auquel cas on a $a \sin \Sigma = \phi$.

Supposons maintenant qu'on augmente l'angle BEL d'inclinaison d'une différentielle $d\Sigma$; c'est-à-dire qu'il devienne $\Sigma + d\Sigma$: le sinus de cet angle BEL sera $\sin \Sigma + d\Sigma \cos \Sigma$, & son cosinus $\cos \Sigma - d\Sigma \sin \Sigma$. La puissance qui anime le corps parallèlement au plan sera, dans ce second cas, $a \sin \Sigma + a d\Sigma \cos \Sigma$; par conséquent plus grande que celle du premier cas de $a d\Sigma \cos \Sigma$. On aura

FIG. 37.

pareillement la puissance qui l'anime perpendiculairement $= a \cos \Sigma$
 $- d \Sigma \sin \Sigma$. La puissance capable de vaincre le Frottement dans ce
 second cas, est (392.) $= \frac{ha \cos \Sigma}{H} - \frac{had \Sigma \sin \Sigma}{H}$. L'amplitude h est comme
 la largeur du parallépipède, multipliée par la profondeur de l'im-
 pression : mais la première quantité étant constante, h fera comme la
 profondeur de l'impression ; c'est-à-dire (398 & 400.) comme la puis-
 sance $a \cos \Sigma - d \Sigma \sin \Sigma$. Donc la puissance, qui est capable de
 vaincre le Frottement dans ce second cas, sera comme
 $\frac{a^2}{H} (\cos \Sigma - d \Sigma \sin \Sigma)^2$, ou comme $\frac{a^2}{H} (\cos^2 \Sigma - 2 d \Sigma \cos \Sigma \sin \Sigma)$; &
 dans le premier cas, où $d \Sigma = 0$, comme $\frac{a^2}{H} \cos^2 \Sigma$. La puissance
 du second cas fera donc moindre que celle du premier de . . .
 $\frac{a^2}{H} (2 d \Sigma \cos \Sigma \sin \Sigma)$; & la puissance totale du premier cas, sera à cette
 différence, comme $\cos^2 \Sigma$ est à $2 d \Sigma \cos \Sigma \sin \Sigma$. Or la puissance primitive
 totale est $= a \sin \Sigma$: donc la différence sera $= \frac{2ad \Sigma \sin \Sigma^2}{\cos \Sigma}$. L'augmenta-
 tion de la puissance qui anime le corps parallèlement au plan, est
 $= ad \Sigma \cos \Sigma$, & la diminution de celle qui surmonte le Frottement,
 $= \frac{2ad \Sigma \sin \Sigma^2}{\cos \Sigma}$: donc on aura, pour le second cas, $a \sin \Sigma - \varphi = n a =$
 $ad \Sigma \cos \Sigma + \frac{2ad \Sigma \sin \Sigma^2}{\cos \Sigma}$, où $n = \frac{1}{12} = \frac{d \Sigma}{\cos \Sigma} (1 + \sin \Sigma^2)$ *. Substituant
 maintenant, d'après M. Bilfinger $\frac{\sin \Sigma}{\cos \Sigma} = \frac{1}{4}$, on aura $\frac{1}{12} = \frac{d \Sigma (1 + \frac{1}{16})}{4 \sqrt{\frac{1}{17}}}$, &
 $d \Sigma = \frac{\sqrt{17}}{144}$. Or le rayon d'un cercle étant égal à l'unité, la demi-

* La puissance primitive totale qui animoit le corps parallèlement au plan, étoit $= a \sin \Sigma$; mais
 ayant reçu une augmentation de $ad \Sigma \cos \Sigma$, elle est donc maintenant $= a \sin \Sigma + ad \Sigma \cos \Sigma = \frac{1}{12}$.
 Pareillement, puisque la puissance φ , qui surmonte le frottement, a reçu une diminution de
 $\frac{2ad \Sigma \sin \Sigma^2}{\cos \Sigma}$, & que, dans le premier cas, $\varphi = a \sin \Sigma$, par l'hypothèse, on aura donc,
 dans le second, $\varphi = a \sin \Sigma - \frac{2ad \Sigma \sin \Sigma^2}{\cos \Sigma}$; & par conséquent $\frac{1}{12} - \varphi = n a = (421.) = ad \Sigma \cos \Sigma$
 $+ \frac{2ad \Sigma \sin \Sigma^2}{\cos \Sigma}$, d'où l'on tire $n = d \Sigma \left(\cos \Sigma + \frac{2 \sin \Sigma^2}{\cos \Sigma} \right)$. Multipliant le second facteur par
 $\cos \Sigma$, & divisant le premier par la même quantité, on a $n = \frac{d \Sigma}{\cos \Sigma} (\cos^2 \Sigma + 2 \sin \Sigma^2) =$
 $\frac{d \Sigma}{\cos \Sigma} (\cos^2 \Sigma + \sin \Sigma^2 + \sin \Sigma^2)$: mais $\cos^2 \Sigma + \sin \Sigma^2 = 1$. Donc $n = \frac{d \Sigma}{\cos \Sigma} (1 + \sin \Sigma^2)$.
 Quant aux substitutions numériques, il ne peut y avoir de difficulté ; car puisque $\frac{\sin \Sigma}{\cos \Sigma} = \frac{1}{4}$, il
 s'ensuit que $\sin \Sigma = \frac{\cos \Sigma}{4}$, & $\sin \Sigma^2 = \frac{\cos^2 \Sigma}{16}$; mais $\cos^2 \Sigma = 1 - \sin \Sigma^2$: donc $\sin \Sigma^2 = \frac{1 - \sin \Sigma^2}{16}$;
 d'où l'on tire $\sin \Sigma^2 = \frac{1}{17}$, & par conséquent $\sin \Sigma = \sqrt{\frac{1}{17}}$, & $\cos \Sigma = 4 \sqrt{\frac{1}{17}}$. Substituant
 ces quantités dans la valeur de n , on a l'expression même de l'Auteur : d'où l'on conclura
 la valeur de $d \Sigma$ par les règles ordinaires de l'Algebre & de l'Arithmétique.

circonférence est $= 3,14$, le degré $= \frac{3,14}{180}$, & la minute $= \frac{3,14}{60.180}$.
 Nommant donc m le nombre des minutes contenu dans $d\Sigma$, nous aurons $\frac{3,14.m}{60.180} = \frac{\sqrt{17}}{144}$, & $m = \frac{75\sqrt{17}}{3,14} = 98\frac{1}{2}$; c'est-à-dire que le nombre m de minutes, qui exprime le mouvement qu'il faut donner au plan, est de $98\frac{1}{2}$. Donc, en augmentant l'inclinaison du plan seulement de $1^{\circ}38\frac{1}{2}$ en sus de celle qu'il a, lorsque le corps A se maintient encore sur le plan sans se mouvoir, alors il commencera sa course, en accélérant sa vitesse de manière qu'on ait au moins $u=t$: ce qui prouve, comme nous l'avons dit, la conformité de notre théorie avec la pratique.

CHAPITRE IX.

De l'effet du Frottement dans les Machines simples.

DÉFINITION XLVI.

(423.) ON appelle Machine tout instrument propre à faciliter le mouvement des corps.

DÉFINITION XLVII.

(424.) Les Machines se divisent en simples & en composées; les Machines composées sont celles dans la composition desquelles il entre deux, ou un plus grand nombre de machines simples. Les simples sont le *Lever*, le *Plan incliné*, le *Coin*, la *Vis*, le *Treuil*, ou *Cabestan*, & la *Poulie*.

SCOLIE.

(425.) On a déjà parlé du *Lever* à la fin du Chapitre IV. Il n'y a point de Frottement dans cette Machine, parce qu'elle n'a aucune de ses parties qui se meuve étant posée sur une surface. Tout le Chapitre VII a été presque employé au *Plan incliné*, & il nous a servi d'exemple pour déterminer le Frottement: mais, comme nous avons seulement considéré le cas où le corps A est déterminé à descendre, il nous reste à présent à résoudre celui dans lequel il monte, & à examiner le mouvement de rotation qui peut avoir lieu, à cause du Frottement.

DU PLAN INCLINÉ.

DÉFINITION XLVIII.

(426.) On appelle *Plan incliné*, un Plan qui n'est ni perpendicu-

laire, ni parallèle à l'horizon : si *LE* représente l'horizon, *BE* fera un Plan incliné.

PLANC. II.
FIG. 37.

SCOLIE.

(427.) Le corps *A* qui est placé sur un Plan incliné, est déjà animé par une puissance qui agit sur lui ; cette puissance est la gravité qui agit suivant la direction verticale *AD*. L'action de cette puissance peut bien, comme nous l'avons déjà dit, faire descendre le corps, mais elle ne peut le faire monter. Pour produire ce dernier effet, il faut une autre puissance qui agisse sur le corps dans la direction *EB*, & qui soit non-seulement plus grande que la puissance $a \sin \Sigma$, qui est dirigée suivant *BE*, mais plus grande que cette puissance jointe à la résistance du Frottement ; puisque toutes les deux s'opposent au mouvement du corps suivant *EB*. Dans le Chapitre précédent, nous avons exprimé les puissances qui doivent vaincre le Frottement par $a \sin \Sigma$ & par θ , la première expression pour le cas où il n'y a pas d'autre puissance qui agisse sur le corps *A*, suivant la direction *AD*, que la puissance a ; & la seconde pour désigner la résultante quelconque qui agit pour mouvoir le parallélépipède suivant *BE*, laquelle est la même que $a \sin \Sigma$ dans le premier cas. Enforte que connoissant, de quelque manière que ce soit, la résultante de la puissance, ou des puissances, dont l'action est dirigée suivant *BE*, ou *EB* ; & celle de la puissance, ou des puissances qui agissent dans la direction *AH* ; les valeurs de ces résultantes étant substituées, dans les formules, en place de celles dont on a fait usage dans les exemples où il s'agissoit de surmonter le Frottement ; on résoudra tous les cas du mouvement du corps *A* suivant *BE*.

PROPOSITION LVIII.

(428.) Trouver la puissance nécessaire pour vaincre le Frottement, & faire monter un parallélépipède sur un Plan incliné.

Nous avons déjà vu (392.), que, pour vaincre le Frottement sur un Plan incliné, dans le cas où $U = 0$, il faut avoir $a \sin \Sigma = \frac{a \theta \cos \Sigma}{H}$, Σ désignant l'angle *HAD*, ou *BEL* ; a la puissance unique qui anime le parallélépipède suivant *AD* ; $a \sin \Sigma$, celle qui l'anime suivant *BE* ; & $a \cos \Sigma$, celle qui l'anime suivant *AH*. Qu'une puissance s'agisse maintenant sur le parallélépipède suivant *EB*, nous aurons $\theta - a \sin \Sigma$ pour l'expression de la puissance résultante suivant *EB*, laquelle étant substituée, dans l'équation précédente, en

place de $\alpha \sin \Sigma$, nous aurons, pour le cas du Frottement surmonté, ou pour le cas où le parallépipède est sur le point de monter le long du Plan incliné, $\theta - \alpha \sin \Sigma = \frac{\alpha h \cos \Sigma}{H}$, d'où l'on tire $\theta = \frac{\alpha(H \sin \Sigma + h \cos \Sigma)}{H}$.

COROLLAIRE I.

(429.) Si l'on avoit $\sin \Sigma + \frac{h}{H} \cos \Sigma < 1$, on auroit aussi $\theta < \alpha$, & par conséquent il ne seroit pas nécessaire d'une si grande force pour faire monter le parallépipède le long du plan, que pour l'élever verticalement : le Plan incliné facilitera, dans ce cas, l'opération ; & c'est pour cela qu'il est compté au nombre des Machines.

COROLLAIRE II.

(430.) Si l'on avoit $\sin \Sigma = 0$; ou, ce qui revient au même, si le plan étoit horizontal, il resteroit $\theta = \frac{\alpha h}{H}$, ou $\frac{\theta}{\alpha} = \frac{h}{H}$: en sorte que plus h sera petit par rapport à H , plus θ sera petit par rapport à α .

COROLLAIRE III.

(431.) Comme on peut faire h presque infiniment moindre que H , soit en diminuant la grandeur & le nombre des aspérités, soit en interposant un corps étranger entre le plan & le parallépipède, la puissance nécessaire pour mouvoir le parallépipède horizontalement, peut être presque infiniment plus petite que α ; mais elle ne peut jamais devenir égale à zéro, à moins qu'on n'ait $h = 0$: ce qui est impossible dans la pratique.

COROLLAIRE IV.

(432.) Si l'on avoit $\sin \Sigma = 1$; ou, ce qui est la même chose, si le plan étoit vertical, ou s'il s'agissoit d'élever le parallépipède sans le secours du Plan incliné, il resteroit $\theta = \alpha$: de sorte qu'il est toujours nécessaire, dans ce cas, d'employer une puissance égale au poids du corps qu'on veut élever.

COROLLAIRE V.

(433.) Si nous substituons dans la formule $\theta = \frac{\alpha(H \sin \Sigma + h \cos \Sigma)}{H}$, les valeurs de $H = lk$, de $h = nlk + kX$, trouvées, Art. 394, il en résultera $\theta = \alpha (\sin \Sigma + n \cos \Sigma + \frac{X}{l} \cos \Sigma)$; n marquant un nombre quelconque qui dépend de la grandeur des aspérités; l la longueur du parallépipède, & X la profondeur de l'impression que celui-ci fait dans le plan.

COROLLAIRE

COROLLAIRE VI.

(434.) Si l'on avoit $X=0$; ou, ce qui est la même chose, si le plan étoit très-dur, de sorte qu'il ne se fit en lui aucune impression sensible, on auroit $\theta = \alpha (\sin \Sigma + n \cos \Sigma)$.

COROLLAIRE VII.

(435.) Dans le cas où θ a sa plus grande valeur, ou est un *maximum*, on a $d\theta = \alpha (d\Sigma \cos \Sigma - n d\Sigma \sin \Sigma) = 0$; ou $\sin \Sigma = \left(\frac{1}{1+n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$; d'où l'on apperçoit une singularité qui pourra paroître assez étrange, qui est que la force qu'on doit employer pour élever le corps verticalement, ne soit pas la plus grande; mais celle qu'il faudroit employer pour l'élever le long d'un Plan incliné, dans lequel on auroit $\sin \Sigma = \left(\frac{1}{1+n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

COROLLAIRE VIII.

(436.) Si l'on substitue cette valeur dans $\theta = \alpha (\sin \Sigma + n \cos \Sigma)$, on aura la plus grande force $\theta = \alpha \sqrt{1+n^2}$; force qui est d'autant plus grande que α , à proportion que n , ou les aspérités sont plus grandes.

COROLLAIRE IX.

(437.) La formule ne donne pas la moindre valeur θ , à moins que $\sin \Sigma$ ne soit négatif: de sorte que la puissance θ diminue toujours à mesure que $\sin \Sigma$ diminue; & ce sinus devenant ensuite négatif, on a $\alpha (-\sin \Sigma + n \sqrt{1-\sin^2 \Sigma}) = 0$, ou $-\sin \Sigma = n \left(\frac{1}{1+n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$; lorsque θ est zéro.

PROPOSITION LIX.

(438.) Trouver la relation entre la puissance λ & la vitesse v avec

* Car de l'équation $\alpha (d\Sigma \cos \Sigma - n d\Sigma \sin \Sigma) = 0$, on tire, en divisant par $d\Sigma$, & en transposant $n \sin \Sigma = \cos \Sigma = (1 - \sin^2 \Sigma)^{\frac{1}{2}}$; donc, en quarrant, $n^2 \sin^2 \Sigma = 1 - \sin^2 \Sigma$, & par conséquent $\sin \Sigma = \left(\frac{1}{1+n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. En substituant cette valeur de $\sin \Sigma$ dans celle de $\cos \Sigma$, on trouvera $\cos \Sigma = n \left(\frac{1}{1+n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Quant à la conséquence que ce Corollaire fournit, nous ne connoissons aucune expérience qui puisse la justifier: cependant on se convaincra aisément de son évidence, en considérant que lorsque le Plan incliné est très-proche de la situation verticale, la puissance θ qui tire le corps parallèlement au plan est à très-peu près égale à la puissance α qu'il faudroit employer pour l'élever verticalement; & que si, dans ce cas, n est d'une grandeur sensible; c'est-à-dire, si la grandeur des aspérités n'est pas susceptible d'être négligée, il peut arriver que θ doive être alors plus grand que α . Si l'on pouvoit avoir $n = 0$, ce qui auroit lieu, si le plan & le parallépipède étoient infiniment lisses, on auroit alors $\sin \Sigma = 1$, & $\theta = \alpha$ (432).

laquelle on veut que le parallépipède s'élève par le Plan incliné.

Par ce que nous avons démontré (409.), on a trouvé
 $u = \left(U^2 + \frac{2ax \sin \Sigma}{A} - \frac{2Dhx}{A} \right)^{\frac{1}{2}}$; $a \sin \Sigma$ marquant la puissance qui anime le parallépipède parallèlement au plan. Substituant maintenant à la place de $a \sin \Sigma$, l'expression $\lambda - a \sin \Sigma$, on aura $u = \dots$
 $\left(U^2 + \frac{2x(\lambda - a \sin \Sigma)}{A} - \frac{2Dhx}{A} \right)^{\frac{1}{2}}$, U exprimant la vitesse acquise par le parallépipède, au moment qu'il est sur le point de vaincre la force ϕ de l'obstacle & des aspérités.

COROLLAIRE I.

(439.) Cette force ϕ a été trouvée (410.) $= Dh$; on aura donc aussi $u = \left(U^2 + \frac{2x(\lambda - a \sin \Sigma)}{A} - \frac{2\phi x}{A} \right)^{\frac{1}{2}}$.

COROLLAIRE II.

(440.) Si la vitesse U étoit tellement petite, qu'on pût, sans erreur sensible, faire $U = 0$, il resteroit $u = \left(\frac{2x}{A} (\lambda - a \sin \Sigma - Dh) \right)^{\frac{1}{2}}$, ou $u = \left(\frac{2x}{A} (\lambda - a \sin \Sigma - \phi) \right)^{\frac{1}{2}}$: ou bien à cause que, dans ce cas, (392.) $\phi = \frac{h}{H} (\cos \Sigma)^*$, $u = \left(\frac{2x}{A} (\lambda - a \sin \Sigma - \frac{h}{H} \cos \Sigma) \right)^{\frac{1}{2}}$.

COROLLAIRE III.

(441.) En quarrant ces équations, & en ordonnant, on trouvera $\lambda = a \sin \Sigma + Dh + \frac{Au^2}{2x} = a \sin \Sigma + \phi + \frac{Au^2}{2x} = a \sin \Sigma + \frac{h}{H} \cos \Sigma + \frac{Au^2}{2x}$.

PROPOSITION LX.

(442.) Trouver l'espace parcouru en montant par le parallépipède par sa relation avec la vitesse.

Par ce qui a été démontré (413.), on a trouvé $x = \frac{A(u^2 - U^2)}{2(\phi - Dh)}$,

* Il nous paroît difficile de concevoir ce passage : l'Auteur renvoie à l'Article 392 pour la substitution de la valeur de ϕ ; mais d'après cet Article, il nous semble que $\phi = \frac{h}{H} a \cos \Sigma$, & non $\frac{h}{H} \cos \Sigma$, comme on le trouve dans l'original. Le résultat de la substitution que fait l'Auteur, nous indique bien qu'il y a une faute d'impression, qu'on a mis $\cos \Sigma$ pour $\cos \Sigma$; mais il reste toujours à savoir pourquoi a ne se trouve pas dans la valeur de ϕ , comme paroît l'exiger l'Article auquel l'Auteur renvoie. Si notre remarque est juste, on doit avoir $u = \dots$
 $\left(\frac{2x}{A} (\lambda - a (\sin \Sigma + \frac{h}{H} \cos \Sigma)) \right)^{\frac{1}{2}}$, ou $= \left(\frac{2x}{A} (\lambda - a \sin \Sigma - \frac{h}{H} a \cos \Sigma) \right)^{\frac{1}{2}}$, & non pas
 $u = \left(\frac{2x}{A} (\lambda - a \sin \Sigma - \frac{h}{H} \cos \Sigma) \right)^{\frac{1}{2}}$. Il faut appliquer ceci à tous les endroits suivants, où l'Auteur emploie la valeur de u , après y avoir substitué la valeur de ϕ .

θ exprimant la puissance qui anime le parallépipède parallèlement au plan. Substituant maintenant à la place de θ l'expression $\lambda - a \sin \Sigma$, on aura $x = \frac{A(u^2 - U^2)}{2(\lambda - a \sin \Sigma - Dh)}$, ou $x = \frac{A(u^2 - U^2)}{2(\lambda - a \sin \Sigma - \varphi)}$.

COROLLAIRE.

(443.) Si la vitesse U étoit tellement petite, qu'on pût, sans erreur sentible, supposer $U = 0$, on auroit $x = \frac{Au^2}{2(\lambda - a \sin \Sigma - Dh)}$; ou $x = \frac{Au^2}{2(\lambda - a \sin \Sigma - \varphi)} = \frac{Au^2}{2(\lambda - a \sin \Sigma - \frac{h}{H} \cos \Sigma)}$.

PROPOSITION LXI.

(444.) Trouver l'espace parcouru en montant par le parallépipède, par sa relation avec le temps employé à le parcourir.

Par ce qui a été démontré (417.), on a trouvé $x = Ut + \frac{t^2(\theta - Dh)}{2A}$; θ exprimant la puissance qui anime le parallépipède parallèlement au plan. Substituant donc à la place de θ l'expression $\lambda - a \sin \Sigma$, on aura $x = Ut + \frac{t^2(\lambda - a \sin \Sigma - Dh)}{2A}$, ou $x = Ut + \frac{t^2(\lambda - a \sin \Sigma - \varphi)}{2A}$.

COROLLAIRE.

(445.) Si la vitesse U étoit assez petite pour qu'on pût, sans erreur sentible, supposer $U = 0$, il resteroit $x = \frac{t^2}{2A} (\lambda - a \sin \Sigma - Dh)$ $= \frac{t^2}{2A} (\lambda - a \sin \Sigma - \varphi) = \frac{t^2}{2A} (\lambda - a \sin \Sigma - \frac{h}{H} \cos \Sigma)$.

PROPOSITION LXII.

(446.) Trouver le mouvement de rotation que doivent prendre les corps placés sur un Plan incliné, lorsqu'ils sont sans mouvement progressif.

FIG. 34.
& 35.

Quelles que soient les puissances qui animent le corps A , qui pose, seulement par un point C , sur le Plan incliné FG ; elles peuvent se décomposer en deux autres, l'une qui agisse parallèlement, & l'autre perpendiculairement au plan: toutes les deux s'exerceront par réaction dans le point C , & aux distances AH , CH du centre de gravité A du corps. La gravité a qui agit dans la direction de la verticale AD , se décomposera dans les deux puissances $a \sin \Sigma$, & $a \cos \Sigma$: & s'il se joint à la première une autre puissance λ , positive, ou négative, qui agisse au centre de gravité, la réaction de ces puissances, qui est la résistance du Frottement, équivaldra à la somme $a \sin \Sigma \pm \lambda$ de ces deux puissances. La différencielle

de l'angle de rotation qu'elles produiront, sera donc (129 & suiv. jusqu'à 159)
$$= \frac{ds \, dt (a \sin \Sigma \pm \lambda) AH \pm ds \, da \cos \Sigma \cdot CH}{S}$$
; le signe + du second terme ayant lieu, lorsque la perpendiculaire AH tombe au-dessous de l'appui C ; & le signe —, quand elle tombe au-dessus: en sorte que cette quantité étant positive, le corps tournera vers la partie qui est au-dessous de l'appui C ; & au contraire, si elle est négative,

COROLLAIRE I.

(447.) Si l'on suppose que $\lambda = n a \sin \Sigma$, n marquant un nombre quelconque plus grand ou plus petit que l'unité, en substituant cette valeur dans l'expression de l'angle de rotation, elle deviendra . . .

$$\frac{ds \, dt (1 \pm n) a \sin \Sigma \cdot HA \pm ds \, da \cos \Sigma \cdot CH}{S}$$

COROLLAIRE II.

(448.) Puisque $\sin \Sigma : \cos \Sigma :: DH . AH$, on a $AH \cdot \sin \Sigma = DH \cos \Sigma$: substituant cette valeur dans la dernière expression de l'angle de rotation, elle se changera en celle-ci,
$$\frac{ds \, dt \cos \Sigma (DH (1 \pm n) \pm CH)}{S} = \dots$$

COROLLAIRE III.

(449.) Si, dès le commencement de l'action, on avoit $DC = n . DH = 0$; ou, ce qui revient au même, si $a \sin \Sigma : n a \sin \Sigma = \lambda :: DH : DC$, le corps ne tourneroit pas.

COROLLAIRE IV.

(450.) Si la gravité est la seule puissance qui agisse sur le corps, on aura $n = 0$, & l'expression de l'angle de rotation deviendra
$$= \frac{ds \, dt \cos \Sigma \cdot DC}{S}$$
.

COROLLAIRE V.

(451) Si l'on avoit $DC = 0$ dès le commencement de l'action, le corps ne tourneroit point: mais si DC a une valeur que conque, ou, comme on s'exprime généralement dans la Mécanique, si la verticale AD , qui passe par le centre de gravité A , tombe au-dehors de l'appui C , le corps tournera.

PROPOSITION LXIII.

(452.) Trouver la rotation que doivent prendre les corps placés sur un Plan incliné, lorsque le Frottement étant vaincu, le point d'appui est déjà en mouvement.

La force, ou la résistance réunie de l'obstacle & des aspérités, est (384) $\varphi = \frac{i(hh')}{I(u^2 + h^2)} (\frac{1}{2} AU^2 \cos \Sigma^2 + a \cos \Sigma (X+Z))$; & elle est dirigée suivant *CH* parallèlement au plan *GF*, & passe à la distance *AH* du centre de gravité du corps *A*: l'angle de rotation sera donc (129 & suiv.) $= \frac{dt}{s} \int \frac{i(hh') dt \cdot AH}{I(u^2 + h^2)} (\frac{1}{2} AU^2 \cos \Sigma^2 + a \cos \Sigma (X+Z)) \pm \frac{dt}{s} \int u dt \cos \Sigma \cdot CH$.

COROLLAIRE I.

(453.) La force, ou la résistance $\varphi = \frac{i(hh')}{I(h^2 + h'^2)} (\frac{1}{2} AU^2 \cos \Sigma^2 + a \cos \Sigma (X+Z))$ est (387.) moindre que la puissance $a \sin \Sigma$, qui résulte de la gravité, & qui est dirigée parallèlement au plan. Soit donc supposé $a \sin \Sigma - \lambda = \varphi$; en mettant cette valeur dans l'expression précédente, de l'angle de rotation, elle deviendra $\frac{dt}{s} \int dt (a \sin \Sigma - \lambda) \cdot \frac{AH + dt a dt \cos \Sigma \cdot CH}{s}$; ou en substituant (448.) en place de $\sin \Sigma \cdot AH$, la valeur $DH \cdot \cos \Sigma$, & réduisant, on aura l'angle de rotation $= \frac{dt \int a dt \cos \Sigma \cdot DC - dt \int \lambda dt \cdot AH}{s}$.

COROLLAIRE II.

(454.) Si l'on avoit $DC = 0$; ou si la verticale *AD*, qui passe par le centre de gravité *A*, passoit aussi par l'appui *C*, l'expression de l'angle de rotation se réduiroit à $-\frac{dt \int \lambda dt \cdot AH}{s}$.

COROLLAIRE III.

(455.) Le corps tournera donc vers la partie supérieure du plan, lorsque l'appui *C* est en mouvement, quoique la verticale *AD* passe par le point d'appui.

COROLLAIRE IV.

(456.) Non-seulement le corps tournera dans ce sens, dans le cas où $DC = 0$, mais encore dans tous ceux où l'on a $\lambda \cdot AH > a \cos \Sigma \cdot DC$: de manière que, quoique DC soit positive, ou que la verticale *AD* tombe au dessous de l'appui *C*, le corps peut tourner négativement, ou vers la partie supérieure du plan.

S C O L I E.

(457.) Ce qu'on vient de dire fait voir l'erreur de ceux qui, n'ayant pas examiné les corps en mouvement sur le Plan incliné, ont avancé qu'ils devoient toujours tourner vers la partie inférieure du plan, toutes les fois que la verticale *AD* tombe plus bas que l'appui *C*.

DU COIN.

D É F I N I T I O N X L I X.

(458.) On appelle communément *Coin* un Prisme tel que *ABCD*.

S C O L I E.

(459.) Si l'on place le coin entre deux corps *A* & *B*, & qu'on l'introduise entre ces deux corps par le moyen de la percussion, ou par l'action d'une puissance qui agisse en *C*, & dans la direction *CD*; les deux corps se sépareront, quoique les puissances qui les unissent soient plus grandes que celle qui agit sur le Coin.

P R O P O S I T I O N L X I V.

(460.) *Le Coin se réduit au Plan incliné.*

Quant à ce qui regarde l'effet, c'est la même chose de considérer les deux corps *A* & *B* comme fixes, & le Coin en mouvement, ou au contraire, le Coin fixe, & les deux corps en mouvement, puisque, dans l'un & l'autre cas, l'action dépend de la vitesse respective. Nous pouvons donc supposer le Coin fixe, & qu'une puissance quelconque est appliquée aux corps, & agit sur eux dans la direction *DC*; mais on voit que ce cas se réduit à faire monter, ou à pousser les deux corps *A* & *B* le long des deux Plans inclinés *DI*, *DL*. Donc le Coin se réduit au Plan incliné.

C O R O L L A I R E I.

(461.) Les mêmes formules qui ont exprimé les effets du Plan incliné, doivent par conséquent exprimer ceux du Coin.

S C O L I E I.

Fig. 41.

(462.) Pour l'ordinaire les deux corps *A* & *B* ne font qu'un seul & même corps *M*, qu'on veut séparer ou fendre en deux, par le moyen du Coin, en augmentant la fente *EKF* vers *KM*. La puissance qui résiste vient de l'union, de la cohésion, ou de la force des particules, ou fibres du corps en *K*, & c'est cette résistance, ou cette cohésion, qu'il faut vaincre, ou rompre, par le moyen des puissances qui exercent leur action en *G* & *H*. Or, comme les fibres en *K* sont élastiques, elles cedent, ou se mettent en mouvement avant de se rompre. Ceci arrive seulement à un certain nombre de fibres, & par conséquent il y a un point tel que *M*, où elles se maintiennent fermes, & sans aucun mouvement, & sur lequel tournent les deux corps *A* & *B*. Les lignes *GKM*, *HKM* agissent donc

comme deux leviers de la seconde espece, fixes en M , au moyen desquels les puissances appliquées en G & H tendent à vaincre la résistance qui agit en K . La puissance en K fera donc à la puissance en G , comme MG est à MK : & pareillement elle sera à la puissance placée en H , comme MH est à MK .

COROLLAIRE II.

..(463.) Si l'on appelle α la puissance en K , celle placée en G sera $= \frac{MK}{MG} \cdot \alpha$; & celle placée en H sera $= \frac{MK}{MH} \cdot \alpha$.

COROLLAIRE III.

(464.) L'action de ces deux puissances est perpendiculaire à MG , MH ; car les corps A & B tournant sur le point M , le mouvement des points G & H est dirigé perpendiculairement aux rayons MG , MH .

SCOLIE II.

(465.) Les fibres qui résistent en K sont de différentes especes, & placées à différentes distances du centre immobile M : les forces qu'elles exerceront, seront, par conséquent, différentes les unes des autres; mais nous pouvons supposer que K est le centre de toutes ces fibres, ou le considérer comme le point où elles produiroient un effet égal, si elles y étoient toutes réunies. On doit entendre la même chose des puissances qui agissent en G & en H , puisque ces points doivent se prendre comme les centres de réunion de toutes les forces qui agissent pour former les impressions que fait le Coin autour de G & H , & dont les amplitudes sont H & H' .

PROPOSITION LXV.

(466.) Trouver la puissance nécessaire pour mettre le Coin en mouvement, vaincre son frottement, & pour diviser les corps par son moyen.

Puisque le Coin se réduit au Plan incliné (460), nous pouvons nous servir de l'équation $\theta = \frac{\alpha(H \sin \Sigma + h \cos \Sigma)}{H}$ (428); dans laquelle θ marque la puissance qui est dirigée suivant DI , & qui est nécessaire pour vaincre le frottement. Ainsi tout se réduit à substituer, dans cette équation, les vraies valeurs de θ , α & Σ . Que n soit la puissance qui agit sur le Coin en C , suivant la direction CD , si l'on mène la ligne GO parallèle à IC , on aura $\frac{DO}{DG} \cdot \frac{n}{\alpha} = \theta$, n exprimant un nombre quelconque plus grand que l'unité, afin de ne prendre de la puissance n que la partie $\frac{1}{n}$ qui surmonte le frottement du

plan ID . De plus, l'angle DGM sera $= \Sigma$, puisque, dans le Plan incliné, Σ marquoit l'angle que forme la direction de la puissance en G , avec la perpendiculaire à ID : nous aurons donc, en abaissant la perpendiculaire DN sur GM , $\frac{DN}{DG} = \sin \Sigma$, & $\frac{NG}{DG} = \cos \Sigma$. La puissance qui agit en G est (463.) $= \frac{MK}{MG} \cdot \alpha$; c'est l'expression qu'il faut substituer, dans la formule, à la place de α seul. Substituant donc toutes ces valeurs dans l'équation de l'Art. 428, nous aurons $\frac{DO}{DG} \cdot \frac{\alpha}{n} = \dots$
 $\frac{MK}{MG} \cdot \alpha \left(\frac{DN.H}{DG} + \frac{NG.h}{DG} \right)$, ou $\frac{\alpha}{n} = \frac{MK.\alpha}{MG.DO.H} (DN.H + NG.h)$. On trouvera de la même manière que l'autre partie $\frac{(n-1)\alpha}{n}$ de la puissance n qui surmonte le frottement du plan LD , est $= \frac{MK.\alpha}{MH.DP.H'} (DQ.H' + QH.h)$.
 Donc $\frac{\alpha}{n} + \frac{(n-1)\alpha}{n} = \alpha = \frac{MK.\alpha}{MG.DO.H} (DN.H + NG.h) + \dots$
 $\frac{MK.\alpha}{MH.DP.H'} (DQ.H' + QH.h)$.

COROLLAIRE. I.

(467.) Si le point M étoit infiniment éloigné de K ; & si en même temps on supposoit le frottement nul, ou $= 0$, on auroit $\alpha = \frac{a.DN}{DO} + \frac{a.DQ}{DP}$; mais, dans ce cas, GM & HM sont parallèles à CM , ou $DN = GO$, & $DQ = HP$: donc $\dots$
 $\frac{a.GO}{DO} + \frac{a.HP}{DP} = \frac{a.IC}{CD} + \frac{a.CL}{CD} = \frac{a.IL}{CD}$; ce qui donne $\alpha : n :: CD : IL$.

SCOLIE I.

(468.) Ce rapport $\frac{\alpha}{n} = \frac{IL}{CD}$, est celui que donnent généralement tous les Auteurs pour la relation des forces n & α qu'exerce le Coin. Cette relation n'est certaine que lorsque le frottement est zéro, & que le point M est à une distance infinie; cas qui sont l'un & l'autre impossibles. Le dernier peut seulement s'admettre lorsqu'il est question d'écarter avec le Coin deux corps déjà séparés, dans une direction parallèle à IL ; parce que, dans ce cas, le point K tombe sur les appuis G & H : & M est comme à une distance infinie, à cause que GM & HM sont parallèles à CD .

SCOLIE II.

(469.) On peut de même supposer que $MK = MG$, & le frottement presque nul au commencement de l'action du Coin, ou lorsqu'il n'est encore enfoncé dans le corps que d'une quantité infiniment

infinitement petite; car, dans ce cas, les points M , K , G & H , se confondent, & le frottement peut être peu sensible. Dans tous les autres cas, l'égalité $\frac{1}{2} = \frac{IL}{CD}$, que donnent généralement tous les Auteurs, ne peut avoir lieu, & l'erreur qui en résulte devient notable.

COROLLAIRE I I.

(470.) Si la partie IDC du Coin étoit égale & semblable à l'autre partie LDC , comme on le fait communément, on auroit $MH = MG$, $DP = DO$, $DQ = DN$, $QH = NG$, $H = H'$, & $h = h'$; ce qui réduit l'équation à $n = \frac{MK.2a}{MG.DO.H} (DN.H + NG.h)$.

COROLLAIRE I I I.

(471.) La puissance n , nécessaire pour mettre le Coin en mouvement, est, selon tous les Auteurs, & selon ce qu'on a dit (467.) $n = \frac{a.IL}{CD} = \frac{2a.IC}{CD} = \frac{2a.GO}{DO} = \frac{MG.H.2a.GO}{MG.DO.H}$; & suivant notre théorie, $n = \frac{MK.2a}{MG.DO.H} (DN.H + NG.h)$. La force indiquée par tous les Auteurs, sera donc à celle fournie par notre théorie, comme $MG.GO.H$, est à $MK(DN.H + NG.h)$, ou comme $\frac{MG.GO}{MK}$ est à $DN + \frac{NG.h}{H}$; d'où l'on voit que cette force peut, suivant notre théorie, être infiniment moindre que celle qu'ont donné tous les Auteurs; & l'on voit, par conséquent aussi, dans quelle erreur ils sont tombés.

PROPOSITION LXVI.

(472.) Déterminer dans quelle circonstance le Coin retournera en arriere, la puissance n cessant d'agir.

Lorsque la puissance n cesse d'agir, ou que $n = 0$, le frottement devient négatif; par conséquent l'équation qui exprime le cas où le frottement est surmonté, devient $\frac{DN.H - NG.h}{MG.DO.H} + \frac{DQ.H' - QH.h'}{MH.DP.H'} = 0$; & lorsque les deux moitiés ICD , LCD du Coin sont égales & semblables, $DN.H - NG.h = 0$; ou $\frac{DN}{NG} = \frac{h}{H}$.

COROLLAIRE I.

(473.) Il suit de là que toutes les fois qu'on aura $\frac{DN}{NG} > \frac{h}{H}$, le Coin retournera en arriere, aussi-tôt que la puissance n cessera d'agir.

COROLLAIRE II.

(474.) La rétrogradation du Coin ne dépend donc pas seulement

de la grandeur de l'angle IDL , comme le disent généralement tous les Auteurs, mais de cet angle, & des rapports $\frac{DN}{NG}$ & $\frac{A}{H}$.

S C O L I E.

(475.) Il y a plusieurs autres instruments qui se réduisent aussi au Coin & au Plan incliné, comme le Coureau, & la Hache avec laquelle on taille & divise les bois. L'action de la Hache dépend de la vitesse avec laquelle elle tombe, ou elle choque. Ainsi l'équation qui exprime son effet, ne dépend pas de celle qui détermine le cas dans lequel on suppose la puissance employée à vaincre le frottement; mais de celle dans laquelle on suppose le frottement déjà vaincu, & que la Hache, le Coin, ou le Plan incliné, se meut avec une certaine vitesse.

PROPOSITION LXVII.

(476.) Déterminer l'effet de la Hache.

Comme la Hache est un instrument qui se réduit au Coin & au Plan incliné, nous pouvons faire usage de l'équation (438.) $u = (U^2 + \frac{2\tau(\lambda - \alpha \sin \Sigma)}{A} - \frac{2D^2x}{A})^{\frac{1}{2}}$, & y substituer (466.) $\frac{DN}{DG}$ en place de $\alpha \sin \Sigma$, & $\frac{MK}{MG}$ en place de α seul. En outre, la puissance λ est, dans ce cas, $= 0$, parce que la Hache agit par la seule vitesse U avec laquelle elle surmonte le frottement. Substituant donc toutes ces quantités,

on aura $u = (U^2 - \frac{2\tau \cdot \frac{MK}{MG} \cdot \frac{DN}{DG}}{A} - \frac{2D^2x}{A})^{\frac{1}{2}}$. Mais lorsque la Hache a produit tout son effet, elle s'arrête, & dans ce moment on a $u = 0$; donc, quand la Hache a produit tout son effet, nous avons $U^2 = \frac{2\tau}{A} (\frac{MK \cdot DN}{MG \cdot DG} + Dh)$, ou $x = \frac{\frac{1}{2} A U^2 \cdot MG \cdot DG}{MK \cdot DN + MG \cdot DG \cdot Dh}$. Comme la quantité x est l'espace parcouru suivant le plan DI ; en nommant z celui parcouru suivant le plan DC , nous aurons $x : z :: ID : DC$, ou $x = \frac{DI \cdot z}{DC}$; cette valeur étant substituée dans l'équation, donne l'espace parcouru par la Hache, ou son effet $z = \frac{\frac{1}{2} A U^2 \cdot MG \cdot DG \cdot CD}{ID(MK \cdot DN + MG \cdot DG \cdot Dh)}$; mais, par la construction, $\frac{DG \cdot CD}{ID} = DO$; donc $z = \frac{\frac{1}{2} A U^2 \cdot MG \cdot DO}{MK \cdot DN + MG \cdot DG \cdot Dh}$.

C O R O L L A I R E.

(477.) L'effet de la Hache sera donc constamment proportionnel au produit de sa masse A , ou de sa gravité, par le carré U^2 de la vitesse avec laquelle elle frappe le bois.

DE LA VIS.

PLANC. II.

Fig. 43.

D É F I N I T I O N L.

(478.) La *Vis* est un Plan incliné appliqué autour d'un Cylindre concave *ABCD*, sur lequel tourne un autre Plan incliné semblable au premier qui environne un autre Cylindre convexe *AC*.

D É F I N I T I O N L I.

(479.) Le Cylindre convexe, avec le Plan qui lui est appliqué, est ce qu'on appelle vulgairement la *Vis*, & on donne le nom d'*Ecrou* au Cylindre concave. On donne aussi au premier le nom de *Vis mâle*, & au second le nom de *Vis femelle*; ces dernières dénominations sont sur-tout employées par les ouvriers.

D É F I N I T I O N L I I.

(480.) Chaque tour que font les Plans inclinés appliqués aux Cylindres, s'appelle *Spire*, *Filet*, ou *Pas de la Vis*.

S C O L I E.

(481.) S'il y a un poids *Q*, ou une puissance appliquée en *F*, dirigée suivant l'axe *EF* de la *Vis*, & une autre appliquée en *P*, au levier *EP*, agissant suivant une direction perpendiculaire au même axe; l'action de cette puissance fera tourner la *Vis*, son Plan incliné s'élevant le long de celui de l'écrou, & par conséquent elle élèvera le poids *Q*, ou surmontera la puissance appliquée en *F*.

C O R O L L A I R E.

(482.) De ceci on pourroit conclure que la *Vis* ne doit pas se compter au nombre des Machines simples, puisqu'elle est composée d'un Plan incliné & d'un Levier; mais on ne peut pas contester qu'elle n'en soit toujours une, tant que la longueur du Levier n'excede pas le rayon du Cylindre.

P R O P O S I T I O N L X V I I I.

(483.) Trouver la puissance nécessaire pour vaincre le Frottement, & mettre la *Vis* en mouvement.

La valeur de la puissance qui agit parallèlement aux filets de la *Vis*, est (428.) $9 = \frac{a(H \sin \Sigma + h \cos \Sigma)}{H}$. La puissance qui presse les deux plans l'un contre l'autre est supposée en *F*, & dirigée suivant *EF*.

Supposons que cette puissance soit représentée par α ; l'angle que forme sa direction avec la perpendiculaire aux plans, ou aux filets, est le même que celui que forment ces mêmes filets avec la perpendiculaire à l'axe EF . On peut par conséquent conserver les caractères α & Σ , ils désigneront les mêmes choses que dans la formule; sçavoir, α la puissance appliquée en F , & dirigée suivant l'axe EF ; & Σ l'angle que forment les filets de la Vis avec la perpendiculaire au même axe. Cela posé, la puissance π qui doit vaincre le frottement, & qu'on suppose placée en P , agissant perpendiculairement à l'axe, & à la distance R de cet axe, on aura $R\pi$ pour son moment: & si nous nommons r la distance perpendiculaire de l'axe aux filets, ou le rayon de la Vis, on aura $r\theta = \frac{r\alpha (H \sin \Sigma + h \cos \Sigma)}{H}$ pour le moment du frottement; ce qui nous donnera pour le vaincre, $R\pi = r\theta = \frac{r\alpha (H \sin \Sigma + h \cos \Sigma)}{H}$, d'où l'on tire $\pi = \frac{r\alpha}{R.H} (H \sin \Sigma + h \cos \Sigma)$.

COROLLAIRE I.

(484.) Donc si la puissance π étoit moindre que $\frac{r\alpha}{R.H} (H \sin \Sigma + h \cos \Sigma)$, la Vis ne pourroit tourner, & par conséquent elle resteroit sans mouvement.

COROLLAIRE II.

(485.) La vis étant une fois mise en mouvement, & y étant maintenue avec une vitesse constante, elle doit continuer de se mouvoir avec la même vitesse, si les puissances qui agissent se détruisent mutuellement; ce qui arrive tant que la puissance appliquée est suffisante pour surmonter le frottement, qui est toujours le même, tant dans le cas du mouvement, qu'au moment où il est surmonté. La puissance nécessaire pour maintenir la Vis en mouvement, avec une vitesse constante déjà acquise, est donc aussi $\pi = \frac{r\alpha}{R.H} (H \sin \Sigma + h \cos \Sigma)$.

COROLLAIRE III.

(486.) Si l'on suppose le frottement nul, ou si $h=0$, l'équation qui exprime le cas où la Vis commence à se mettre en mouvement, se changera en $\pi = \frac{r\alpha \sin \Sigma}{R}$: ou, si nous appellons C la circonférence qui décrira le point P où l'on applique la puissance π , & c la circonférence de la Vis, cette puissance π sera aussi $= \frac{c\alpha \sin \Sigma}{C}$. Mais le rayon est à $\sin \Sigma$, comme la circonférence c est à la distance d'un filet de la Vis à l'autre; ou, comme on s'exprime commu-

nément, à la hauteur du pas de la Vis : donc , en nommant a cette hauteur , on aura $\cos \Sigma = a$, & $\pi = \frac{a}{C}$; d'où l'on tire $\Sigma : a :: a : C$; c'est-à-dire , la puissance qui anime la Vis est à celle qu'on doit vaincre par le moyen de cette machine , comme la distance d'un filet à l'autre , ou la hauteur du pas , est à la circonférence C que décrit la puissance π .

COROLLAIRE IV.

(487.) Comme cette théorie est celle que les Auteurs enseignent généralement , il s'ensuit que , dans leurs calculs , ils ont fait abstraction du frottement.

PROPOSITION LXIX.

(488.) Trouver le cas dans lequel la Vis rétrogradera , la puissance π cessant d'agir.

Lorsque la puissance π cesse d'agir , le frottement devient négatif , & l'équation , pour le cas où la vis rétrogradera , en surmontant le frottement , sera $0 = \frac{r}{R.H} (H \sin \Sigma - h \cos \Sigma)$, ou $\sin \Sigma = \frac{h}{H} \cos \Sigma$. Donc tant qu'on aura $\sin \Sigma > \frac{h}{H} \cos \Sigma$, la Vis rétrogradera aussitôt que la puissance π cessera d'agir.

PROPOSITION LXX.

(489.) Trouver la relation entre la puissance appliquée à la Vis , & la vitesse avec laquelle elle se mouvra après avoir surmonté le frottement.

La formule qui correspond à ce cas est (438.) $u = \dots \dots \dots (U^2 + \frac{2\lambda(\lambda - \sin \Sigma)}{A} - \frac{2Dh}{A})^{\frac{1}{2}}$; substituant dans cette formule $\frac{R\lambda}{r}$, au lieu de λ seul , en supposant que λ soit la puissance qui agit à l'extrémité P du levier : & supposant de plus , comme il convient , que la vitesse U avec laquelle la Vis commence à surmonter le frottement , est négligeable , ou que $U = 0$, on aura $\frac{Au^2}{2x} = \frac{R\lambda}{r} - a \sin \Sigma - Dh$; ou en substituant (410.) la force ϕ du frottement en place de Dh , on aura $\frac{Au^2}{2x} = \frac{R\lambda}{r} - a \sin \Sigma - \phi = \frac{R\lambda}{r} - a \sin \Sigma - \frac{h}{H} \cos \Sigma$.

PROPOSITION LXXI.

(490.) Trouver la relation entre le temps , la puissance appliquée à la Vis , & l'espace que parcourra la Vis dans la direction de son axe.

PLANCHE II.

La formule qui correspond à ce cas est (445.) $x = \frac{r}{2A} (\lambda - a \sin \Sigma - Dh)$, en y substituant $\frac{R\lambda}{r}$ en place de λ seul. Mais x exprime l'espace que parcourent respectivement les deux plans, & cet espace est à celui que parcourt la Vis dans le sens de son axe, & que nous pouvons appeller z , comme r est à $\sin \Sigma$. Donc $x = \frac{z}{\sin \Sigma}$, ce qui donne $z = \frac{r \sin \Sigma}{2A} \left(\frac{R\lambda}{r} - a \sin \Sigma - Dh \right) = \frac{r \sin \Sigma}{2A} \left(\frac{R\lambda}{r} - a \sin \Sigma - \frac{h}{H} \cos \Sigma \right)$.

DU TREUIL, ou CABESTAN.

DÉFINITION LIII.

FIG. 43.
& 44.

(491.) On appelle *Treuil* un *Cylindre* qu'on fait tourner par le moyen d'un levier qu'on y applique.

Le *Treuil*, ou *Cylindre* AB , soit qu'il soit horizontal, vertical, ou oblique, étant soutenu par les deux piliers, ou appuis C, D , tourne, par l'action d'une puissance appliquée en F sur le levier FE , qui est perpendiculaire à l'axe, & fixé dans le *Cylindre*; & cette puissance est dirigée perpendiculairement à l'axe & au levier. Cette machine doit, en conséquence, vaincre la puissance placée en Q , dont la direction est aussi perpendiculaire au *Cylindre* sur lequel elle agit, soit par une ligne flexible QG qui s'enveloppe autour du même *Cylindre*, à mesure qu'il tourne; soit parce que QG est un autre levier fixé aussi dans ce *Cylindre*.

COROLLAIRE I.

(492.) Il est indifférent qu'il y ait plusieurs leviers, ou plusieurs puissances qui agissent sur le *Treuil*; ou que ce soit une roue, comme $HIKL$, avec différentes puissances qui agissent dans sa circonférence: car, par ce qu'on a déjà dit, on peut toujours réduire toutes ces puissances à une seule appliquée à une distance déterminée de l'axe.

COROLLAIRE II.

(493.) Le *Treuil* est donc un levier de la première, seconde, ou troisième espèce, selon la situation & la distance de la puissance placée en Q par rapport à l'axe.

PROPOSITION LXXII.

(494.) Trouver, dans le *Treuil*, la puissance nécessaire pour vaincre le frottement, & mettre la machine en mouvement.

Soit *GEF* le Cylindre, & *C* son centre : soit supposé de plus, qu'à l'extrémité *L* du levier *CL*, on fasse agir la puissance λ dans la direction *LH* perpendiculaire à *CL*. Soit pareillement la puissance α appliquée à l'extrémité *A* du levier *CA*, dont la direction soit perpendiculaire à *CA*, & dont l'action doive surmonter la précédente. Appellant Σ l'angle sous lequel se coupent les deux directions *LH*, *AI*, soit tiré les lignes *DB*, *CD*, parallèles à ces directions, & proportionnelles aux mêmes puissances λ & α ; il est clair que *CB* fera (57 & suiv.) la direction de la puissance résultante des deux, & lui fera proportionnelle, ou exprimera sa valeur.

Cela posé, le sinus de *DCL* étant $= \cos \Sigma$, *CB* qui est la puissance résultante des deux λ & α , sera $= \sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 \pm 2\lambda\alpha \cos \Sigma}$. *

Le signe supérieur de la quantité $2\lambda\alpha \cos \Sigma$, est pour le cas où l'angle *BDC* est obtus, & l'inférieur pour celui où il est aigu. Or, l'effet de cette puissance est de comprimer le Cylindre, en le faisant appuyer dans le point *G* de sa direction *CB*, de la même manière que s'il appuyoit sur un Plan tangent au Cylindre dans le point *G*, & auquel la direction *CB* de la puissance résultante seroit perpendiculaire. La puissance nécessaire pour vaincre le frottement qui s'exerce dans le point *G*, sera donc (392.) $= \frac{h}{R} \sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 \pm 2\lambda\alpha \cos \Sigma}$.

Maintenant, la puissance qui agit pour faire tourner le Treuil, est λ , & elle est appliquée en *L* ; mais en la réduisant à une autre placée en *G*, elle sera $\frac{R}{r} \lambda$, *R* marquant la longueur du levier *CL*, & *r* le rayon *CE* du Treuil. L'autre puissance qui agit négativement est α , & elle est appliquée en *A* ; mais en la réduisant à une autre placée en *G*, elle sera $\frac{R'}{r} \alpha$, *R'* marquant la longueur du levier *CA*. Nous aurons donc, pour le cas de l'équilibre, ou pour le moment où le frottement est près d'être vaincu, $\frac{R}{r} \lambda - \frac{R'}{r} \alpha = \frac{h}{R} \sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 \pm 2\lambda\alpha \cos \Sigma}$;

d'où l'on tire, en réduisant & en ordonnant, ...

$$\lambda = \frac{\alpha(H^2 RR' \pm h^2 r^2 \cos \Sigma)}{H^2 R^2 - h^2 r^2} + \alpha \sqrt{\frac{(H^2 RR' + h^2 r^2 \cos \Sigma)^2}{(H^2 R^2 - h^2 r^2)^2} - \frac{H^2 R'^2 - h^2 r^2}{H^2 R^2 - h^2 r^2}}$$

C O R O L L A I R E I.

(495.) La puissance λ nécessaire pour vaincre le frottement, &

* Car puisque l'angle *L* est droit, *DCL* est le complément de l'angle formé par les lignes *LH* *CD*, qui est égal à celui des lignes *LH*, *AI*, c'est-à-dire, $= \Sigma$; le sinus de *DCL* est donc $\cos \Sigma$. A cause des parallèles *ED*, *LH*, l'angle *EDH* est encore $= \Sigma$: donc, en abaissant la perpendiculaire *Br*, on a *Dr* $= BD \cos \Sigma = \lambda \cos \Sigma$. Donc, &c.

mettre la machine en mouvement, est donc toujours proportionnelle à la puissance a .

COROLLAIRE II.

(496.) En faisant varier l'angle Σ , ou la situation du levier CL , la situation de la puissance λ nécessaire pour vaincre le frottement, variera aussi: donc il y a une plus grande & une moindre valeur de λ qui dépend de celle de Σ , ou de la situation du levier CL .

PROPOSITION LXXIII.

(497.) Trouver la plus grande & la plus petite valeur de la force qui peut vaincre le frottement dans le Treuil.

Si nous supposons λ & Σ variables, & les autres quantités constantes; & si nous différencions l'équation $\frac{R}{r} \lambda - \frac{R'}{r} a = \frac{h}{H} \sqrt{\lambda^2 + a^2 \pm 2\lambda a \cos \Sigma}$, la différentielle sera $\frac{R}{r} d\lambda = \frac{h}{H} \cdot \frac{\lambda d\lambda + a d\lambda \cos \Sigma \mp \lambda a d\Sigma \sin \Sigma}{\sqrt{\lambda^2 + a^2 \pm 2\lambda a \cos \Sigma}}$; mais, dans le cas où il s'agit de l'action la plus grande, ou de la moindre puissance λ , on a $d\lambda = 0$: on aura donc, dans ce cas, $0 = \frac{\mp \lambda a d\Sigma \sin \Sigma}{\sqrt{\lambda^2 + a^2 \pm 2\lambda a \cos \Sigma}}$, ou $\sin \Sigma = 0$. Cette valeur substituée dans celle de λ , donnera la plus grande & la plus petite puissance λ nécessaire pour vaincre le frottement, & l'on aura, dans ce cas, $\lambda = \frac{a(H^2 RR' \mp h^2 r^2)}{H^2 R^2 - h^2 r^2} \pm a \sqrt{\frac{(H^2 RR' \mp h^2 r^2)^2}{(H^2 R^2 - h^2 r^2)^2} - \frac{H^2 R^2 - h^2 r^2}{H^2 R^2 - h^2 r^2}} = \frac{a(H^2 RR' \mp h^2 r^2 \pm Hhr(R+R'))}{H^2 R^2 - h^2 r^2} = \frac{a(HR' \mp hr)}{HR \mp hr}$, en divisant le numérateur & le dénominateur par $HR \pm hr$. La plus grande puissance λ sera donc $= \frac{a(HR' + hr)}{HR - hr}$; elle a lieu lorsque le levier CL est à la partie opposée au levier CA , & que tous les deux ne forment qu'une même ligne: & la moindre puissance $\lambda = \frac{a(HR' - hr)}{HR + hr}$; elle a lieu quand le levier CL coïncide avec le levier CA .

COROLLAIRE I.

(498.) Il y aura donc toujours de l'avantage à faire que les deux leviers coïncident le plus qu'il est possible; & si l'on emploie cette disposition, la puissance nécessaire pour vaincre le frottement, sera, comme auparavant, $\lambda = \frac{a(HR' \mp hr)}{HR \pm hr}$.

COROLLAIRE II.

(499.) Il est encore avantageux de tâcher d'avoir $R > R'$, ou que le levier CL soit le plus long qu'il est possible, parce qu'alors le dénominateur de l'expression devient plus grand.

COROLLAIRE

COROLLAIRE III.

(500.) Si l'on avoit $R = R'$, λ deviendrait $= \frac{a(HR+hr)}{HR+hr}$, d'où l'on voit que, dans le cas où les deux leviers coïncident, la machine ne donne aucun avantage, & qu'elle produit même du désavantage dans celui où les leviers sont dans des situations opposées.

COROLLAIRE IV.

(501.) Si l'on avoit $R < R'$, la machine seroit désavantageuse dans les deux cas, parce qu'alors on a $\lambda > a$.

COROLLAIRE V.

(502.) Pour connoître dans quel cas la machine cessera de produire aucun avantage, dans la supposition que les leviers sont dans des situations opposées, il n'y a qu'à supposer $a = \lambda$ dans l'équation $\lambda = \frac{a(HR'+hr)}{HR-hr}$, & l'on aura $HR-hr = HR'+hr$, ce qui donne $R = \frac{HR'+2hr}{H}$; c'est la longueur que doit avoir le levier CL , pour que, dans ce cas, la machine cesse de produire aucun avantage.

COROLLAIRE VI.

(503.) Il y aura pareillement de l'avantage à diminuer la quantité r , non-seulement dans le cas où l'on auroit $\lambda = \frac{a(HR'+hr)}{HR-hr}$, parce qu'alors le numérateur est diminué, & le dénominateur augmenté; mais aussi dans celui où l'on auroit $\lambda = \frac{a(HR'+hr)}{HR+hr}$. Car, quoique, dans ce dernier cas, le dénominateur soit diminué, ainsi que le numérateur, il faut observer qu'il ne diminue pas dans une si grande raison que le numérateur, à cause qu'on suppose $R' < R$ pour obtenir de l'avantage.

COROLLAIRE VII.

(504.) Si l'on suppose le frottement nul, alors $h = 0$, & l'expression deviendra en général $\lambda = \frac{a(H^2RR'+0)}{H^2R-0} + \dots$

$= \sqrt{\frac{(H^2RR'+0)^2}{(H^2R-0)^2} - \frac{H^2R'^2-0}{H^2R-0}} = \frac{aR'}{R}$: expression dans laquelle la quantité Σ s'étant évanouie, il s'ensuit qu'en supposant le frottement nul, la situation du levier CL devient indifférente.

SCOLIE I.

(505.) On voit encore ici une erreur dans laquelle sont tombés généralement tous les Auteurs de Méchanique, en supposant que la

Dd

situation du levier CL est absolument indifférente, & en faisant $\lambda = \frac{R'}{R}$ dans tous les cas. Quelques-uns, à la vérité, ont remarqué qu'il est nécessaire d'augmenter la puissance λ proportionnellement à ce que le frottement exige; mais toujours sans faire aucune mention de la situation du levier CL , dont cependant nous avons vu l'influence sur la valeur de λ .

COROLLAIRE VIII.

(506.) Si, au lieu d'un seul levier CL , il y en avoit deux égaux & opposés, avec des puissances égales appliquées à leurs extrémités, on auroit $DB = 0$; & la puissance qui comprime le Cylindre du Treuil, & qui produit le frottement, se réduiroit à la puissance a ; & celle qui est nécessaire pour le vaincre, à $\frac{h}{H}a$: on aura donc, pour le cas présent, $\frac{R}{r}\lambda - \frac{R}{r}a = \frac{h}{H}a$; d'où l'on tire en général $\lambda = \frac{a(HR' + hr)}{HR}$; expression dans laquelle λ désigne la somme des deux puissances égales qui agissent aux extrémités des deux leviers égaux & opposés.

COROLLAIRE IX.

(507.) On doit entendre la même chose pour les cas où les leviers seroient en beaucoup plus grand nombre, pourvu qu'ils soient tous égaux, & que les puissances qu'on y applique soient aussi égales, & disposées de manière que les positives détruisent les négatives.

COROLLAIRE X.

(508.) La même chose arrivera dans la roue $HIKL$, pourvu qu'on applique des puissances égales aux extrémités de ses diamètres.

COROLLAIRE XI.

(509.) Il sera donc encore avantageux, dans tous ces cas, non-seulement qu'on augmente R , mais qu'en général on diminue r .

COROLLAIRE XII.

(510.) Le Treuil étant une fois mis en mouvement, & ayant acquis une vitesse constante, il doit continuer avec cette même vitesse, si les puissances qui agissent se détruisent mutuellement. Or c'est ce qui arrive en surmontant continuellement le frottement, parce que la résistance du frottement est la même dans le cas du mouvement, qu'au moment où il est surmonté. La puissance nécessaire pour maintenir le Treuil en mouvement, avec une vitesse constante déjà

acquise, sera donc $\lambda = \frac{a(HR' + hr)}{HR}$, dans le cas de la roue, ou dans celui de puissances égales, qui agissent à l'extrémité de leviers égaux & opposés; & lorsqu'il n'y en a qu'une seule à agir, $\lambda = \frac{a(H^2RR'^2 + h^2r^2 - 2hrHr')}{H^2R'^2 - h^2r^2} + a \sqrt{\frac{(H^2RR'^2 + h^2r^2 - 2hrHr')^2}{(H^2R'^2 - h^2r^2)^2} - \frac{H^2h^2 - r^2}{H^2R'^2 - h^2r^2}}$.

COROLLAIRE XIII.

(511.) Une puissance quelconque, plus grande que celle exprimée par λ , peut donner au Treuil une vitesse déterminée: celle-ci une fois employée pendant le temps nécessaire, il n'est alors besoin, pour lui conserver le même mouvement, que d'employer la puissance λ .

SCOLIE II.

(512.) Pour ne pas trop compliquer le calcul, on n'a pas voulu y introduire la puissance qui provient de la pesanteur de la machine même; mais il est facile d'y avoir égard, en la supposant réunie à la puissance a , ou en supposant que la puissance a soit composée de celle qui agit en Q , & de celle que produit la pesanteur de la machine, & pareillement que AI est la direction de cette puissance qui résulte des deux.

FIG. 43
& 44.
FIG. 45

COROLLAIRE XIV.

(513.) On voit clairement, par tout ceci, que, dans le Treuil, il sera avantageux de faire en sorte que la puissance qui provient de la pesanteur de la machine, s'oppose, autant qu'il est possible, à celle qui agit en Q , parce qu'à ce moyen, l'effet de celle-ci diminuera.

COROLLAIRE XV.

(514.) Dans le Treuil vertical, l'action de la puissance qui provient de la pesanteur, ne se fait point sentir, parce qu'elle agit dans la direction de l'axe; mais il en résultera un frottement, qui sera d'autant plus petit, que l'appui, ou le point sur lequel porte le poids de la machine, sera moins éloigné du centre du Treuil.

DE LA POULIE.

DÉFINITION. LIV.

(515.) On donne le nom de *Poulie* à une petite roue qu'on fait tourner sur un axe ou essieu, par le moyen d'une ligne flexible appliquée à sa circonférence.

On fait, dans une pièce de bois, ou de quelque autre matière

PLANC. II.
FIG. 46.

solide, une ouverture LI propre à recevoir la roue IGL , qu'on appelle le Rouet, qui tourne sur l'axe C , lequel axe porte dans la piece BD qu'on appelle la Chappe. On rend stable cette dernière piece en B , & une puissance appliquée en H , à la ligne flexible $HLIA$, qui passe sur le Rouet, agit dans la direction LH de la même ligne. L'action de cette puissance se communique à IA , & surmonte une autre puissance appliquée en A , laquelle est dirigée suivant IA .

COROLLAIRE I.

(516.) Les puissances appliquées en H & A agissent de la même manière que si elles étoient placées aux points L & I , où les lignes HL & AI sont tangentes à la roue : d'où l'on voit que la Poulie se réduit à un Treuil dont les leviers $CL = R$, & $CI = R'$, sont égaux entre eux.

COROLLAIRE II.

(517.) L'équation générale (510.), qui exprime la relation entre les puissances λ & α , qui agissent en H & A , ou en L & I , se réduit, dans la Poulie, à $\lambda = \frac{\alpha(H^2R^2 + h^2r^2 \cos \Sigma)}{H^2h^2 - h^2r^2} + \alpha \sqrt{\frac{(H^2R^2 + h^2r^2 \cos \Sigma)^2}{(H^2h^2 - h^2r^2)^2} - 1}$.

COROLLAIRE III.

(518.) La puissance λ , nécessaire pour vaincre le frottement, est donc proportionnelle à la puissance α qu'il s'agit de surmonter.

COROLLAIRE IV.

(519.) La plus grande & la plus petite valeur de la puissance λ auront donc lieu lorsque (497.) on aura $\sin \Sigma = 0$. Sa plus grande valeur sera $\lambda = \frac{\alpha(HR + hr)}{HR - hr}$, & sa plus petite sera $\lambda = \frac{\alpha(HR + hr)}{HR + hr} = \alpha$.

COROLLAIRE V.

(520.) Le cas de la plus petite valeur de la puissance λ , laquelle $= \alpha$, ne peut jamais avoir lieu dans la Poulie, parce qu'il seroit nécessaire, pour ce cas, que la puissance IA fût dirigée du côté opposé, ou suivant HL , & alors la ligne flexible n'agiroit plus sur le Rouet de la Poulie.

COROLLAIRE VI.

(521.) Dans le cas de la plus grande valeur de la puissance $\lambda = \frac{\alpha(HR + hr)}{HR - hr}$, il faut que l'axe du Rouet soit le plus petit qu'il est pos-

sible, parce que, par-là, la valeur de λ sera diminuée, non-seulement par la diminution qui en résulte dans le numérateur, mais encore par l'augmentation du dénominateur.

SCOLIÈ.

(522.) On pourroit demander de quelle utilité peut être la Poulie; car la ligne $HLIA$ étant libre sur le Rouet IL , ou n'en dépendant en aucune façon, on peut penser qu'elle courra sur le Rouet, celui-ci demeurant fixe, c'est-à-dire, sans se mouvoir sur son axe C . En effet, la puissance λ , appliquée en H , tire la ligne, & celle-ci la puissance en A : or il paroît que ce mouvement peut s'exécuter sans qu'il soit nécessaire que le Rouet se meuve sur l'axe C . Pour faire disparaître ce doute, il suffira de prouver que les forces qui résistent, dans le cas du mouvement sur l'axe, sont moindres que lorsqu'il se fait sur le Rouet fixe; ou, ce qui est la même chose, que λ est moindre dans le premier cas que dans le second.

PROPOSITION LXXIV.

(523.) Déterminer si, dans la Poulie, le mouvement doit se faire sur l'axe, & non sur le Rouet fixe.

La puissance $\frac{h}{H} \sqrt{\lambda^2 + a^2 \pm 2\lambda a \cos \Sigma}$, qui surmonte le frottement, a été égalée (494.) à la différence des deux puissances appliquées en L & en I , mais après les avoir réduites à l'axe, lorsque c'est sur l'axe C que se fait le mouvement. Dans le cas où le mouvement se feroit sur la circonférence du Rouet, il n'est pas nécessaire de réduction, parce que c'est à cette circonférence qu'elles sont appliquées. Nous aurons donc pour ce cas, $\lambda - a = \frac{h}{H} \sqrt{\lambda^2 + a^2 \pm 2\lambda a \cos \Sigma}$, ou
 $\frac{R}{R} \lambda - \frac{R}{R} a = \frac{h}{H} \sqrt{\lambda^2 + a^2 \pm 2\lambda a \cos \Sigma}$; expression qui est la même que celle donnée, Article 494, si nous faisons $R = R'$, & $R = r$. Substituant donc cette valeur dans l'équation $\lambda = \frac{a(H^2 R^2 \pm h^2 r^2 \cos \Sigma)}{H^2 R^2 - h^2 r^2} + a \sqrt{\frac{(H^2 R^2 \pm h^2 r^2 \cos \Sigma)^2}{(H^2 R^2 - h^2 r^2)^2}} - 1$, qui exprime la valeur de la puissance λ , dans le cas où le mouvement se fait sur l'axe, nous aurons, pour celui où il se feroit sur la circonférence du Rouet, ...
 $\lambda = \frac{a(H^2 + h^2 \cos \Sigma)}{H^2 - h^2} + a \sqrt{\frac{(H^2 + h^2 \cos \Sigma)^2}{(H^2 - h^2)^2}} - 1$: quantité qui est plus grande que la précédente, comme on peut s'en convaincre, en réduisant seulement $\frac{H^2 R^2 \pm h^2 r^2 \cos \Sigma}{H^2 R^2 - h^2 r^2}$ dans une série infinie. Car cette

série est $1 + \frac{h^2 r^2}{H^2 K^2} (1 \pm \cos \Sigma) + \frac{h^4 r^4}{H^4 K^4} (1 \pm \cos \Sigma) + \&c.$ D'où l'on voit que cette valeur est d'autant plus grande, que la quantité r l'est davantage : donc le mouvement se fait naturellement sur l'axe, & non sur la circonférence du Rouet.

COROLLAIRE I.

(524) On a tiré cette conclusion d'après la supposition que le frottement est le même dans un cas que dans l'autre, ou que $\frac{h}{H}$ est la même quantité dans les deux cas. Ainsi l'on voit que si $\frac{h}{H}$ étoit moindre lorsque le mouvement se fait sur la circonférence du Rouet, ce dernier mouvement pourroit effectivement avoir lieu plutôt que celui sur l'axe : car, dans ce cas, si l'on supposoit $h=0$, on auroit alors $\lambda=a$; quantité qui exprime la plus petite valeur que puisse avoir λ .

COROLLAIRE II.

(525.) Le mouvement ne se fait donc sur l'axe qu'à cause du frottement : le frottement étant nul, on a, pour tous les cas, $\lambda=a$, & par conséquent la détermination au mouvement sur l'axe, ou sur la circonférence du Rouet, est, dans cette supposition, tout-à-fait indifférente.

SCOLIE.

(526.) La Poulie fixe en B ne contribue absolument point à faciliter, ou à vaincre, le mouvement de la puissance a , puisque la puissance λ nécessaire pour produire cet effet, est toujours plus grande que la puissance a , toutes les fois que la ligne flexible $HLIA$ appuie sur le Rouet. Mais cependant, en employant cette machine pour quelque besoin particulier, elle contribue beaucoup à produire l'effet demandé, puisque, dans ce cas, le mouvement se faisant sur l'axe, la puissance λ est moindre que dans le cas où il se fait sur la circonférence du Rouet.

PROPOSITION LXXV.

(527.) Déterminer la relation entre les puissances λ & a , & celle qui agit sur le point B , où la Poulie est fixée.

La puissance en B est égale & contraire à celle qui agit sur l'axe C , laquelle est composée des deux puissances qui agissent en H & A ; mais cette puissance composée a été trouvée (494) = $\sqrt{\lambda^2 + a^2 \pm 2\lambda a \cos \Sigma}$: donc si nous supposons que Ω exprime la

la puissance en B , nous aurons $\Omega = \sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 \pm 2\lambda\alpha \cos \Sigma}$, ce qui donne
 $\lambda = \mp \alpha \cos \Sigma \pm \sqrt{\Omega^2 - \alpha^2 \sin^2 \Sigma}$, ou $\alpha = \mp \lambda \cos \Sigma \pm \sqrt{\Omega^2 - \lambda^2 \sin^2 \Sigma}$.

D É F I N I T I O N L V.

(528) La Poulie peut aussi être mobile. Si l'on fixe la ligne flexible $HLIA$ par son extrémité A , & que deux puissances agissent en même temps, l'une en H , & l'autre en B , la première puissance peut vaincre la seconde, & la mettre en mouvement, en l'entraînant avec la Poulie. C'est pour cela qu'on la nomme *Poulie mobile*.

P R O P O S I T I O N L X X V I.

(529.) Trouver la relation entre les puissances λ & Ω dans la Poulie mobile.

Ayant trouvé (527.) $\alpha = \mp \lambda \cos \Sigma \pm \sqrt{\Omega^2 - \lambda^2 \sin^2 \Sigma}$, & (523.)
 $\lambda = \frac{\alpha(H^2R^2 \pm h^2r^2 \cos \Sigma)}{H^2R^2 - h^2r^2} + \alpha \left(\frac{(H^2R^2 \pm h^2r^2 \cos \Sigma)^2}{(H^2R^2 - h^2r^2)^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}$, ou $\alpha = \dots$
 $\frac{\lambda}{\frac{H^2R^2 \pm h^2r^2 \cos \Sigma}{H^2R^2 - h^2r^2} + \left(\frac{(H^2R^2 \pm h^2r^2 \cos \Sigma)^2}{(H^2R^2 - h^2r^2)^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}}$: nous aurons
 $\mp \lambda \cos \Sigma \pm \sqrt{\Omega^2 - \lambda^2 \sin^2 \Sigma} = \frac{\lambda}{\frac{H^2R^2 \pm h^2r^2 \cos \Sigma}{H^2R^2 - h^2r^2} + \left(\frac{(H^2R^2 \pm h^2r^2 \cos \Sigma)^2}{(H^2R^2 - h^2r^2)^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}}$.

C O R O L L A I R E.

(330.) Dans le cas de la plus grande valeur de la puissance λ , ou lorsque les lignes HL & AI sont parallèles, on a $\Sigma = 0$: donc on aura $-\lambda + \Omega = \frac{\lambda}{\frac{H^2R^2 \pm h^2r^2}{H^2R^2 - h^2r^2} + \left(\frac{(H^2R^2 \pm h^2r^2)^2}{(H^2R^2 - h^2r^2)^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}}$; ou, en réduisant, $-\lambda + \Omega = \frac{\lambda(HR - hr)}{HR + hr}$: d'où l'on tire $\Omega = \frac{2HR\lambda}{HR + hr}$, & $\lambda = \frac{\Omega(HR + hr)}{2HR}$.

D E S M O U F L E S.

D É F I N I T I O N L V I.

(531.) On appelle *Moufle* une Machine composée de plusieurs Poulies : dans la Marine on nomme ces Machines des *Palans* & des *Calionnes*.

Par une Poulie fixe en B , & une autre mobile D , on fait passer une ligne flexible $HFEDGC$, fixée en C à la chappe de la Poulie B . Une puissance λ appliquée en H , agit dans la direction FH , & tire une autre puissance appliquée en A qui résiste au mouvement de la Poulie DG , sur laquelle elle agit dans la même direction : l'objet de la puissance λ est d'entraîner la Poulie D & la puissance appliquée en A .

Fig. 47.

PLANC. II.

FIG. 48.
& 49.

On peut concevoir également que , par deux Poulies fixes en *B*, montées dans une même chappe , & unies l'une à l'autre par leurs plans, ou par leurs extrémités, & que, par une autre Poulie mobile *DG*, on ait fait passer une ligne flexible *HFEDGIKC*, dont l'extrémité soit fixée en *C* à la Poulie *DG*, & qui passe sur les trois Rouets: enfin qu'une autre puissance λ agisse à l'autre extrémité *H* dans la direction *FH*, en tirant une autre puissance appliquée en *A*, qui résiste au mouvement de la Poulie *DG*, sur laquelle elle agit dans la même direction.

FIG. 50.

On peut imaginer pareillement trois Poulies fixes en *B*, unies entre elles dans une même chappe, & deux Poulies mobiles, aussi unies entre elles, & une ligne flexible, passant par toutes ces Poulies, à l'extrémité *H* de laquelle est appliquée une puissance, tandis qu'une autre puissance est appliquée à la Moufle mobile en *A*, de la même manière qu'auparavant. Il en sera de même d'un plus grand nombre de Poulies, si l'on veut en employer davantage dans la composition de ces Machines appelées *Moufles*.

S C O L I E.

(532.) Nous supposons, pour la facilité du calcul, que les lignes, ou cordons qui passent sur les différentes Poulies qui composent les Moufles, tels que *ED*, *CG*, *FH*, sont sensiblement parallèles, ce qui donne $\Sigma = 0$. Nous supposons encore que toutes les Poulies sont égales, pour n'avoir pas à introduire dans le calcul plusieurs valeurs de *R*.

P R O P O S I T I O N LXXVII.

(533.) Trouver la relation entre la puissance agissante, & la puissance résistante dans les Moufles.

Puisqu'on suppose $\Sigma = 0$, le cas se réduit à celui dans lequel la puissance λ a sa plus grande valeur, ou est un *maximum*, & pour lequel (519.) nous avons trouvé $\lambda = \frac{a(HR+hr)}{HR-hr}$, supposant que λ désigne la puissance qui agit en *H*, & a celle qui doit supporter, ou tirer la ligne *ED*. Ces deux puissances seront donc entre elles, comme $HR+hr$ est à $HR-hr$; & celle qui doit supporter la ligne *ED*, sera $= \frac{\lambda(HR-hr)}{HR+hr}$. Par la même raison, celle qui agit sur la ligne *ED*, est à celle qui agit sur la ligne *GC*, comme $HR+hr$ est à $HR-hr$: donc celle qui agit sur *GC* $= \frac{\lambda(HR-hr)^2}{(HR+hr)^2}$. Mais cette dernière puissance: est celle qui agit sur la ligne *GI*; & celle qui agit sur *GI*, est à celle:

celle qui agit sur KC , comme $HR+hr$ est à $HR-hr$: donc la puissance qui agit sur $KC = \frac{\lambda(HR-hr)^1}{(HR+hr)^1}$, & ainsi à l'infini, quel que soit le nombre de tours que fasse la ligne sur les Poulies ; c'est-à-dire ; quel que soit le nombre des Poulies. S'il n'y avoit donc que deux lignes seulement, comme ED , CG , pour soutenir la Poulie mobile DG , les forces qu'elles exerceroient seroient $\frac{\lambda(HR-hr)}{HR+hr}$ & $\frac{\lambda(HR-hr)^2}{(HR+hr)^2}$. S'il y en avoit trois, les forces seroient $\frac{\lambda(HR-hr)}{(HR+hr)}$, $\frac{\lambda(HR-hr)^2}{(HR+hr)^2}$, $\frac{\lambda(HR-hr)^3}{(HR+hr)^3}$, & ainsi à l'infini. Or comme la somme des forces que supporteront ces lignes, doit être égale à la puissance Ω appliquée en A , nous aurons $\Omega = \frac{\lambda(HR-hr)}{(HR+hr)} + \frac{\lambda(HR-hr)^2}{(HR+hr)^2} + \frac{\lambda(HR-hr)^3}{(HR+hr)^3} + \&c.$, en formant cette série d'autant de termes qu'il y a de cordons, ou lignes, qui soutiennent la Moufle mobile.

COROLLAIRE I.

(534.) Si l'on fait $\frac{HR-hr}{HR+hr} = 1-Q$, ce qui donne $Q = \frac{2hr}{HR+hr}$, on aura $\Omega = \lambda((1-Q) + (1-Q)^2 + (1-Q)^3 + (1-Q)^4 + \&c.)$, faisant la série d'autant de termes qu'il y a de cordons qui aboutissent à la Moufle mobile. Si l'on suppose que n représente le nombre de ces cordons, on aura $\Omega = \lambda((1-Q)^n + (1-Q)^{n-1} + (1-Q)^{n-2} + (1-Q)^{n-3} + \&c.)$, le dernier terme de la série étant celui dont l'exposant est l'unité.

COROLLAIRE II.

(535.) On aura pareillement $\lambda = \dots\dots\dots$

Ω

$(1-Q)^n + (1-Q)^{n-1} + (1-Q)^{n-2} + (1-Q)^{n-3} + (1-Q)^{n-4} + \&c.$; d'où l'on voit combien il est avantageux, dans les Mouflés, que Q , ou son égale $\frac{2hr}{HR+hr}$, soit le moindre qu'il est possible ; c'est-à-dire que le frottement $\frac{h}{H}$ soit le plus petit qu'il est possible, ainsi que le rayon de l'axe r ; & qu'au contraire le rayon R du Rouet soit le plus grand qu'il se pourra, eu égard aux circonstances.

COROLLAIRE III.

(536.) Si l'on élève chaque terme de la série à la puissance indiquée par son exposant, ces puissances seront, $\dots\dots\dots$

$$(1-Q)^n = 1 - n \cdot Q + \frac{n(n-1)}{2} Q^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} Q^3 + \&c.$$

$$(1-Q)^{n-1} = 1 - (n-1)Q + \frac{(n-1)(n-2)}{2} Q^2 - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3} Q^3 + \&c.$$

$$(1-Q)^{n-2} = 1 - (n-2)Q + \frac{(n-2)(n-3)}{2} Q^2 - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3} Q^3 + \&c.$$

$$(1-Q)^{n-3} = 1 - (n-3)Q + \frac{(n-3)(n-4)}{2} Q^2 - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3} Q^3 + \&c.$$

$$\&c. = \&c.$$

Pour avoir la somme de toutes ces quantités, & en conclure la valeur de Ω , on remarquera que le nombre des lignes dont cette série doit être composée, est égal à l'exposant de $1-Q$. Car on a vu (534.) que le dernier exposant doit être l'unité; & le nombre qu'on doit soustraire de n dans l'exposant, renfermant autant d'unités qu'il y a de lignes moins une; si q exprime le nombre total des lignes, nous aurons $q-1$ pour le nombre à retrancher de n dans le dernier terme de la série, & par conséquent $n-q+1$ pour le dernier exposant: donc $n-q+1=1$; d'où l'on tire $q=n$; c'est-à-dire que le nombre des lignes dont la série doit être composée, contient autant d'unités qu'il y en a dans le nombre n , ou qu'il y a de cordons, ou lignes, qui soutiennent la Moufle mobile. La somme des unités qui sont au premier terme de toutes les lignes sera donc n , & par conséquent

$$\Omega = \lambda \left\{ n - \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ n-2 \\ n-3 \\ \&c. \end{matrix} \right\} Q + \left\{ \begin{matrix} n \cdot (n-1) \\ (n-1)(n-2) \\ (n-2)(n-3) \\ (n-3)(n-4) \\ \&c. \end{matrix} \right\} Q^2 - \left\{ \begin{matrix} n \cdot (n-1)(n-2) \\ (n-1)(n-2)(n-3) \\ (n-2)(n-3)(n-4) \\ (n-3)(n-4)(n-5) \\ \&c. \end{matrix} \right\} Q^3 + \&c. \right\};$$

ou, en sommant les quantités qui composent chaque terme, $\Omega = \lambda \left(\frac{n}{1} - \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} Q + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} Q^2 - \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} Q^3 + \&c. \right)^*$; ce qui donne

$$\lambda = \frac{\Omega}{\frac{n}{1} - \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} Q + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} Q^2 - \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} Q^3 + \&c.}, \text{ en}$$

formant toutes ces séries d'autant de termes qu'il y a d'unités dans $n+1$, ou d'autant de termes qu'il y a de lignes, ou cordons, qui tirent la Moufle fixe B .

* Pour sommer les quantités qui composent chaque terme, on remarquera 1°. que les quantités n , $n-1$, $n-2$ &c. qui multiplient le second terme de la valeur de Ω , ne sont autre chose que la suite naturelle des nombres, prise en décroissant depuis le terme n jusqu'à l'unité. Ainsi la somme de toutes ces quantités est $= n \cdot \frac{(n+1)}{2}$.

2°. Que le nombre des produits $n \cdot (n-1)$, $(n-1)(n-2)$, $(n-2)(n-3)$ &c. est $= n$, en admettant 0 pour le dernier produit, puisque le second facteur de ces produits devient zéro, au rang désigné par n . Prenant donc la suite de ces produits en sens contraire, c'est-à-dire,

COROLLAIRE IV.

(537.) La force qui s'exerce en B est la même que celle qui s'exerce en A , plus la puissance λ qui agit dans la direction FH . Donc la force qui s'exerce en $B = \Omega + \lambda = \dots$
 $\lambda \left(\frac{n+1}{1} - \frac{(n+1)n}{1.2} Q + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} Q^2 - \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4} Q^3 + \&c. \right)$

COROLLAIRE V.

(538.) Donc la puissance qu'on peut vaincre en B est plus grande que celle qu'on peut vaincre en A , de la quantité λ , & par conséquent il est avantageux d'arranger les Moulles, de manière que la puissance qu'il s'agit de vaincre, soit placée en B , ou que la Moulle B soit mobile, & la Moulle DG fixe.

Écrivant le premier celui qui est écrit le dernier, & vice versa, on formera la suite 1.0, 2.1, 3.2, 4.3, 5.4, &c... $n(n-1)$. Pour sommer cette suite, on fera attention que puisque $n(n-1)$, ou n^2-n , est l'expression générale d'un de ses termes, il ne s'agit que de faire successivement $n=1$, $n=2$, $n=3$, &c. & de prendre la somme de tous les résultats; or il est évident qu'on forme alors la somme des carrés de la suite naturelle des nombres, & qu'on en déduit la somme des mêmes nombres naturels. Nommant donc S la somme des nombres de la suite naturelle, & S' celle de leurs carrés, on aura $S'-S'$ pour la somme de la série dont il est ici question. Mais chacun sçait que $S' = n \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+1}{3}$; (Voyez d'ailleurs, pour la démonstration, la troisième partie du *Cours de Mathématiques* de M. Bezout, Art. 236 & 237.) & que $S = n \cdot \frac{n+1}{2}$; donc $S'-S = n \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+1}{3} - n \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$. Donc le troisième terme de la série qui exprime la valeur de Ω est $\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} Q^2$.

On remarquera, en troisième lieu, qu'en faisant $n=1$, $n=2$, $n=3$, &c. dans la suite des produits $n(n-1)(n-2)$, $(n-1)(n-2)(n-3)$, $(n-2)(n-3)(n-4)$ &c. dont la somme forme le coefficient du quatrième terme, cette série s'arrêtera aussi-tôt qu'on aura fait $n =$ au nombre des termes, & qu'alors le produit précédent sera aussi $= 0$. Prenant donc, comme tout à l'heure, la série en sens contraire, elle sera 1.0.-1, 2.1.0, 3.2.1, 4.3.2, &c... $n(n-1)(n-2)$. Un terme quelconque de cette suite est donc $n(n-1)(n-2) = (n-1)(n-2) = n^3 - 3n^2 + 2n$. Pour sommer cette suite, il ne s'agit encore que de faire successivement $n=1$, $n=2$, $n=3$, &c., & de sommer tous les résultats; or il est évident que cela revient à prendre la somme des cubes de la suite naturelle, à en retrancher le triple de la somme des carrés de la même suite, & à ajouter au reste le double de la somme des termes de la suite naturelle. Représentant donc par S'' la somme des cubes de la suite naturelle, la somme de la série dont il s'agit ici, sera $= S'' - 3S' + 2S$. Mais $S'' = \frac{n^4 + n^3 + n^2}{4} = n \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+1}{3}$ (On peut trouver cette valeur par ce qui est démontré, Art. 236 & 237 de l'Ouvrage auquel nous venons de renvoyer), $3S' = n \cdot \frac{n+1}{2} \cdot (2n+1)$, & $2S = n \cdot (n+1)$; donc la somme de la série dont il s'agit, ou $S'' - 3S' + 2S = n \cdot \frac{n+1}{2} \cdot n \cdot \frac{n+1}{2} - n \cdot \frac{n+1}{2} \cdot (2n+1) + n \cdot (n+1) = \frac{n^4(n+1)(n-1)}{4}$; & par conséquent le quatrième terme de la valeur de $\Omega = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4} Q^3$. Et si que suivent les termes de la valeur de Ω est suffisamment annoncée pour que le Lecteur puisse facilement la continuer. On verra encore, avec une légère attention, que les deux suites que nous venons de sommer sont de l'espèce de celles des nombres *Triangulaires* & *Pyramidaux*.

COROLLAIRE VI.

(539.) Si l'on multiplie par Q l'équation précédente (537.), & si l'on soustrait λ de part & d'autre, on aura
 $(\Omega + \lambda)Q - \lambda = -\lambda(1 - \frac{n+1}{1}Q + \frac{(n+1)n}{1.2}Q^2 - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}Q^3 + \dots)$
 $= -\lambda(1 - Q)^{n+1}$; d'où l'on tire, en réduisant, ...
 $\Omega = \frac{\lambda(1-Q)(1-(1-Q)^n)}{Q}$, & $\lambda = \frac{nQ}{(1-Q)(1-(1-Q)^n)}$.

S C O L I E I.

(540.) Si l'on suppose, avec M. Biffinger $\frac{h}{H} = \frac{1}{4}$, & $\frac{r}{R} = \frac{1}{5}$, ce qui donnera (534.) $Q = \frac{2}{21}$; & si l'on substitue cette valeur dans celle de λ (539.), on aura $\lambda = \frac{\frac{2}{21} \cdot \Omega}{(1 - \frac{2}{21})(1 - (1 - \frac{2}{21})^n)} = \frac{2 \cdot \Omega}{19(1 - (\frac{19}{21})^n)}$.

Qu'on suppose maintenant $n = 3$, on aura $\lambda = \frac{2 \cdot \Omega}{19(1 - \frac{6859}{27000})} = \frac{9261 \cdot \Omega}{22819}$. Dans le cas où l'on supposeroit le frottement nul, on a $h = 0$, & $Q = 0$, & l'équation $\lambda = \frac{nQ}{(1-Q)(1-(1-Q)^n)}$ ne donneroit rien; mais ayant recours à celle de l'Art. 536, elle donne, en conséquence de cette supposition, $\lambda = \frac{\Omega}{n}$, qui est la formule générale donnée par tous les Auteurs. On aura donc, dans le cas de $n = 3$, $\lambda = \frac{1}{3}\Omega$, ou $\lambda = \frac{7778}{22819}\Omega$: ainsi la puissance λ , dans cette supposition, sera à celle déterminée ci-dessus, comme $\frac{1}{3}$ est à $\frac{9261}{22819}$, ou comme 22819 est à 27783. La différence de ces deux valeurs est, comme l'on voit, bien considérable.

S C O L I E II.

(541.) Pour faciliter le calcul, nous avons négligé le poids des Moufles, & celui des cordes, que nous avons regardées comme des lignes: mais on pourroit facilement introduire ces quantités dans le calcul, si on le vouloit. Il est nécessaire d'y avoir égard, lorsque la puissance qu'il est question de vaincre est petite; mais lorsqu'elle est fort grande, on peut les négliger. Nous nous sommes aussi dispensés d'avoir égard à la grosseur des cordes, ou à leur roideur, ou inflexibilité, qui cependant coûte quelquefois beaucoup à surmonter; particulièrement lorsque les puissances sont petites; mais aussi, lorsqu'elles sont grandes, on peut les négliger, sans crainte d'erreur sensible.



LIVRE SECOND.

DES FLUIDES.

CHAPITRE PREMIER.

*De l'Equilibre des Fluides , & de la force avec laquelle
ils agissent lorsqu'ils sont en repos.*

D É F I N I T I O N I.

(542.) **U**N *Fluide* est un corps dont les parties cedent à toute espece de force , & qui , en cédant , se meuvent facilement entre elles.

C'est la définition que *Newton* donne des Fluides , dans le Livre II , Section V de sa *Philosophie Naturelle*. Elle est conforme à ce qui a été dit dans le premier Livre , même dans le cas où un nombre quelconque de parties d'un Fluide seroit poussé perpendiculairement contre une surface immobile ; car , en vertu de l'impression qui doit se former dans ces parties , elles doivent se séparer latéralement , & d'autant plus que la densité du Fluide est moindre. On ne considere point ici le cas où une seule particule infiniment petite seroit ainsi poussée ; car , comme nous l'avons déjà dit , nous n'avons pas besoin de cet examen pour ce que nous nous proposons.

P R O P O S I T I O N I.

(543.) *Lorsque toute la masse du Fluide est en repos , la force , ou pression ; que souffre chacune de ses particules , est toujours la même , dans quelque direction que ce soit.*

Si la pression qu'éprouve une particule quelconque n'étoit pas la même dans toutes les directions , d'après la définition précédente , elle céderoit sa place à la pression la plus forte , & elle se mettroit en mouvement , ce qui est contre la supposition : donc la pression qu'éprouve une particule quelconque d'un fluide , lorsqu'il est en repos , est la même dans toutes les directions.

P R O P O S I T I O N I I.

(544.) *La force , ou le poids , qui , en vertu de la gravité , comprime*

verticalement une particule quelconque d'un Fluide qui est en repos, est égale au poids de la colonne verticale du Fluide qui est au-dessus d'elle.

Une particule quelconque du Fluide gravite sur son inférieure, par la propriété générale des corps graves; & cette gravitation se communique d'une particule à l'autre, à cause de leur contact: donc la particule inférieure supporte le poids, ou l'action, de toutes les particules supérieures, ou de la colonne verticale qui les renferme.

COROLLAIRE.

(545.) Comme une particule quelconque est poussée avec une force égale dans toutes les directions, il s'ensuit qu'une particule quelconque est poussée dans toutes les directions avec une force égale au poids de la colonne verticale qui est au-dessus d'elle.

DÉFINITION II.

(546.) Pour éviter les répétitions, nous appellerons désormais *Superficie du Fluide* la surface supérieure du Fluide, quelque figure, ou disposition, qu'elle ait.

PROPOSITION III.

(547.) *Lorsque toute la masse d'un Fluide est en repos, sa superficie est horizontale, ou perpendiculaire à la direction des corps graves.*

Si la superficie du fluide n'étoit pas horizontale, les colonnes verticales qui répondent à une particule du fluide, & dont elle supporte le poids, ou la pression, dans toutes les directions, ne seroient pas égales; par conséquent cette particule seroit pressée inégalement, & elle devroit alors se mettre en mouvement, ce qui est contre la supposition: donc la superficie d'un fluide qui est en repos, est horizontale.

COROLLAIRE I.

(548.) Si la superficie du Fluide est horizontale, toute sa masse est en repos.

COROLLAIRE II.

(549.) Quand toute la masse d'un Fluide ne sera pas en repos, sa superficie ne sera pas horizontale; & réciproquement; la superficie du Fluide n'étant pas horizontale, toute sa masse ne sera pas en repos.

SCOLIE I.

(550.) On fait abstraction de la force d'attraction, ou de toute autre force, excepté la gravité, dont les vases, ou les corps, qui

contiennent les Fluides, peuvent être doués; ces forces étant de très-peu d'importance pour notre objet.

SCOLIE II.

(551.) On doit entendre ce qui vient d'être dit, lorsque tout le Fluide contenu dans le vase, ou celui de deux, ou d'un plus grand nombre de vases qui se communiquent, est homogène, ou d'une densité uniforme; parce que, dans ce cas, chaque canal pèse autant que son correspondant, comme il a été démontré. Mais ce ne seroit pas la même chose, si les Fluides de deux, ou d'un plus grand nombre de vases qui communiquent l'un à l'autre par un orifice, étoient de différentes densités. Qu'on suppose que la densité, ou le poids d'un pied cube d'un des Fluides soit $= m$, & que celui d'un pied cube de l'autre soit $= M$; le poids, ou la pression, que le premier exercera sur l'orifice, sera $madbde$, & celui qu'exercera le second, sera $MAdbde$; $dbde$ exprimant l'aire de l'orifice, & la profondeur du même orifice au-dessous de la superficie des Fluides étant représentée par a & A . Mais, pour qu'il y ait équilibre, il faut que $madbde = MAdbde$; ou qu'on ait $a : A :: \frac{1}{m} : \frac{1}{M}$. Donc les hauteurs des superficies des Fluides au-dessus des orifices, doivent être en raison inverse des densités des mêmes Fluides, ou en raison inverse de leurs poids sous un même volume.

PROPOSITION IV.

(552.) La force que souffre une partie différencio-différencielle quelconque d'une surface qui contient un Fluide, est perpendiculaire à cette partie.

De quelque manière qu'une surface soit pressée par un Fluide, les forces peuvent être décomposées en forces perpendiculaires & en forces parallèles à la surface; mais ces dernières se détruisent mutuellement (543.): donc il ne reste que les forces perpendiculaires, & par conséquent la force que souffre une différencio-différencielle d'une surface quelconque qui renferme un Fluide, est perpendiculaire à cette surface.

PROPOSITION V.

(553.) La force que souffre une partie différencio-différencielle quelconque d'une surface qui renferme un Fluide en repos, est égale au poids d'une colonne verticale du même Fluide, dont la base est égale à la différencio-différencielle de la surface, & dont la hauteur est la hauteur verticale du Fluide au-dessus de cette différencio-différencielle.

PLANG. III.

Chacune des particules du Fluide qui compriment la différencio-différencielle de la surface, souffre elle-même une pression égale au poids de la colonne verticale du Fluide qui est au-dessus d'elle : donc toute la force qui comprime la différencio-différencielle, est égale au poids d'autant de colonnes verticales qu'il y a de particules du Fluide qui la touchent ; c'est-à-dire, au poids d'une colonne verticale dont la base est égale à la différencio-différencielle de la surface, & dont la hauteur est la hauteur verticale du Fluide au-dessus de la même différencio-différencielle.

COROLLAIRE I.

FIG. 51.

(554.) Donc si l'on coupe une surface AB par deux lignes horizontales FG , HI , infiniment proches l'une de l'autre ; & par deux autres lignes KL , MN , perpendiculaires à celles-là, & qui soient aussi infiniment proches l'une de l'autre ; la force que supportera l'espace différencio-différenciel $KLMN$, dans la direction CD qui lui est perpendiculaire, le Fluide étant en repos, sera exprimée par $m.a.LN.NM$. Si, dans cette expression, l'on prend les mesures en pieds, m marquera le poids d'un pied cubique du Fluide, & a le nombre de pieds de la hauteur verticale de sa superficie au-dessus de la différencio-différencielle.

COROLLAIRE II.

(555.) La force $m.a.LN.NM$, dont la direction est suivant la perpendiculaire CD , peut être décomposée en deux autres, l'une horizontale CE , & l'autre verticale ED ; & ces trois forces seront entre elles, comme CD , CE & ED ; ou, en tirant l'horizontale NO , & la verticale MO , comme NM , MO & ON , à cause que les triangles CED , MON sont semblables, ayant l'angle $MNO = EDC$. Nous aurons donc NM est à MO , comme la force perpendiculaire suivant CD , ou $m.a.LN.NM$, est à $m.a.LN.MO$, force horizontale suivant CE . On aura pareillement NM est à NO , comme la force perpendiculaire suivant CD , ou $m.a.LN.NM$, est à $m.a.LN.NO$, force verticale suivant ED .

COROLLAIRE III.

(556.) La force horizontale sera donc à la force verticale, comme MO est à NO , ou comme le sinus de l'angle MNO est à son cosinus.

COROLLAIRE IV.

(557.) La ligne MO est égale à la différencielle verticale, ou à

à la différencielle da de la hauteur du Fluide : donc la force horizontale qui agira sur l'aire différencio-différencielle $LKMN$, dans le cas où le Fluide est en repos , sera encore $= mada.LN$.

PLANC. III.

COROLLAIRE V.

(558.) La force horizontale CE peut également être décomposée en deux autres forces aussi horizontales , l'une suivant la direction donnée CP , & l'autre suivant CQ , perpendiculaire à celle-ci ; & ces trois forces seront entre elles comme CE, CP, CQ ; ou en tirant les lignes LR, NR , parallèles aux directions CP, CQ , comme LN, NR , & LR , à cause des triangles semblables $C\acute{E}P, C\acute{E}Q, NLR$. Nous aurons donc LN est à NR , comme la force horizontale suivant $CE = mada.LN$ est à $mada.NR$, force horizontale suivant CP . On aura pareillement LN est à LR ; comme $mada.LN$ est à $mada.LR$, force horizontale suivant CQ .

FIG. 52.

COROLLAIRE VI.

(559.) Le produit $LN.NO$ exprime l'aire $NT = PQRS$ formée dans la superficie horizontale du Fluide , & terminée par les quatre verticales LP, TS, NQ, OR , élevées des quatre angles du parallélogramme LO : donc aussi la force verticale qui agit sur la différencio - différencielle $LKMN = ma.PQ.PS$.

FIG. 53.

FIG. 51.

PROPOSITION VI.

(560.) La somme des forces horizontales qui agissent sur un corps quelconque submergé dans un Fluide qui est en repos , est zéro ; & par conséquent le corps doit demeurer en repos , quant au mouvement horizontal.

Soit un corps quelconque $ADBE$, lequel soit coupé par un plan $ACBE$ qui coïncide avec la surface du Fluide , lorsque celui-ci est en repos. Soit mené les deux plans FOI, LQR , infiniment voisins, & parallèles au plan supérieur $ACBE$, & soit pris , entre ces plans, la différencio-différencielle $OQNP$. Élevant ensuite le plan vertical $OTMK$, soit abaissé sur lui la perpendiculaire PG , & soit élevé les verticales GH, OK & TM . Enfin , soit fait $MH = TG = u$, $HK = GO = du$, $HG = KO = z$, & la hauteur verticale comprise entre les deux plans $FOI, LQR = dz$.

FIG. 54.

Cela posé, on aura (558.) la force horizontale qui agit sur la différencio-différencielle $OQNP$, dans la direction FT , ou sa parallèle AM , $= mzd\alpha du$; & celle qui agit sur $FOQL$, sera $= mu\alpha dz$,

TOME I.

Ff

PLANC. III.

à cause que z est constant, le Fluide étant en repos. Mais, pour que cette expression soit celle de la force qui agit sur l'espace entier *FOIRQL*, nous devons faire $u=0$, puisque c'est la valeur de u dans le point l : donc la somme des forces horizontales qui agissent sur la zone *FOIRQL*=0. On démontrera la même chose pour toutes les zones dans lesquelles on peut diviser le corps; & la même chose dans d'autres directions horizontales quelconques. Donc la somme des forces horizontales qui agissent sur tout le corps, est zéro; & par conséquent le corps demeurera en repos quant au mouvement horizontal.

PROPOSITION VII.

(561.) *La force verticale qui agit sur un corps submergé dans un Fluide, ou que lui communique le Fluide, celui-ci étant en repos, est égale au poids du Fluide dont il occupe la place.*

FIG. 35.

Soit *ADBE* un corps quelconque coupé par un plan *ACBE*, qui coïncide avec la surface du Fluide, lorsque celui-ci est en repos. Soit pris la droite *AB* pour la ligné des abscisses, & ses perpendiculaires *EC*, *FG*, infiniment proches l'une de l'autre, pour les ordonnées. Soit aussi mené les lignes *HI*, *KL*, aussi infiniment proches, & parallèles aux abscisses. Faisant enfin $AM=x$, $MH=u$, on aura $HK.HI=dudx$; & la force verticale qui agit sur la différencio-différencielle *NPOQ* de la surface, sera $=ma.dudx$ (559.). Or $a=HN$, hauteur du Fluide au-dessus de cette différencio-différencielle: faisant donc cette hauteur HN variable, & $=z$, la force verticale sera $=mzdudx$. Mais l'expression $zdudx$ est celle de l'élément différencio-différenciel *LN* du corps, lequel élément est compris entre les quatre verticales *HN*, *KP*, *IQ*, *LO*; l'intégrale $\int zdudx$ sera donc l'expression de tout le volume qu'occupe le corps dans le Fluide, & $m\int zdudx$ sera celle du poids du volume de Fluide qu'occupe le même corps. Or, d'après ce qu'on vient de dire, la somme des forces verticales qui agissent sur le corps, ou la force verticale totale, est aussi exprimée par $m\int zdudx$. Donc la force qu'éprouve verticalement, de bas en haut, un corps submergé dans un Fluide qui est en repos, ou la force que lui communique le Fluide, est égale au poids du volume de Fluide que déplace le corps.

PROPOSITION VIII.

(562.) *Pour qu'un corps submergé dans un Fluide qui est en repos, soit sans aucun mouvement vertical, il faut que le poids du corps soit*

Chap. II. DE LA FORCE DES FLUIDES EN MOUVEMENT. 227
égal à celui du volume de Fluide qu'il déplace, & de plus que la ver-
ticale qui passe par le centre du volume de Fluide déplacé, coïncide
avec celle qui passe par le centre de gravité du corps.

Les forces $m\dot{x}dudx$ sont autant de puissances qui poussent le corps verticalement, de bas en haut, ou, ce qui revient au même (89, 90 & 91.), $m\dot{x}dudx$ est une puissance qui pousse verticalement le corps de bas en haut, & est placée au centre de toutes les puissances $m\dot{x}dudx$, ou au centre de l'espace qu'occupe le corps dans le Fluide. Supposant maintenant que M représente la masse de tout le corps, M sera une autre puissance qui pousse verticalement le corps de haut en bas : donc (110.) on doit avoir $m\dot{x}dudx - M = 0$, pour que le centre de gravité soit sans aucun mouvement; c'est-à-dire que le poids M du corps doit être égal à $m\dot{x}dudx$, poids du volume de Fluide qu'il déplace. En outre, si nous nommons p la distance horizontale de la verticale, qui passe par le centre de gravité, à celle qui passe par la puissance $m\dot{x}dudx$, ou par le centre de l'espace, ou volume du corps submergé dans le Fluide, nous aurons (168.) $\frac{m\dot{x}dudx}{p}$ pour l'expression de l'angle de rotation. Mais cette quantité ne peut être zéro, dès le commencement de l'action, si l'on n'a pas $p = 0$. Donc, pour qu'il n'y ait absolument aucun mouvement, soit vertical, soit de rotation, il faut que la verticale qui passe par le centre du volume de Fluide déplacé, coïncide avec celle qui passe par le centre de gravité du corps.

CHAPITRE II.

De la force avec laquelle les Fluides en mouvement agissent contre une différencio-différencielle de surface.

PROPOSITION IX.

(563.) *SI, dans la surface qui contient un Fluide en repos, on ouvre un orifice, qu'on peut supposer pour le présent infiniment petit, le Fluide sortira par cet orifice avec une vitesse égale à celle qu'il acquerrait en tombant librement de la hauteur verticale a de la surface du Fluide au-dessus de l'orifice.*

Supposons que A soit une particule du Fluide, & α la puissance qui l'anime lorsqu'elle tombe librement, nous aurons (32.) $\frac{\alpha}{A} = u$.

PLANC. III.

Soit supposé maintenant la même particule sortant par l'orifice, la puissance qui l'animerait, sera la force réunie de toutes les particules qui sont contenues dans la hauteur a (544.). Par conséquent n étant supposé un nombre infini, ce nombre représentera la totalité des particules contenues dans cette hauteur, & na sera la puissance qui anime la particule qui jaillit par l'orifice. Mais le temps durant lequel cette puissance agit sur la particule, doit être infiniment petit, nous devons donc le représenter par $\frac{t}{n}$: par conséquent nous aurons aussi (32.) $\frac{na}{A} \cdot \frac{t}{n} = V$; V désignant la vitesse avec laquelle la particule jaillit par l'orifice; c'est-à-dire, en réduisant $\frac{at}{A} = V$: donc les deux vitesses V & u sont égales.

C O R O L L A I R E.

(564.) Comme les particules du Fluide sont poussées dans toutes les directions avec une force égale, il s'en suit que quelle que soit la direction suivant laquelle une particule est poussée, cette particule prendra, en s'échappant, une vitesse $u = 8\sqrt{a}$; vitesse qui est celle que doit acquérir un corps, ou une particule de Fluide, qui tombe librement de la hauteur verticale a (52.).

S C O L I E.

(565.) Dans la pratique, la vitesse réelle du Fluide est toujours moindre que celle que nous venons d'assigner d'après la théorie. Cette différence vient du frottement que doit produire le choc des particules contre les parois de l'orifice, & encore de celui que produit le choc des particules les unes contre les autres, même avant qu'elles parviennent à jaillir par l'orifice. Mais nous ferons abstraction de tous ces frottements, dont la considération n'est pas nécessaire pour notre objet, comme nous le verrons dans la suite.

P R O P O S I T I O N X.

(566.) Trouver le rapport entre la force perpendiculaire qui agit sur une différencio-différencielle de surface, & la vitesse avec laquelle le Fluide jailliroit par cette différencio-différencielle, si elle lui donnoit un libre passage.

ÉCR. 51. Nous avons trouvé cette force (554.) $= ma.LN.NM$; $LN.NM$ exprimant l'aire différencio-différencielle de la surface. Nous avons trouvé pareillement (564.) la vitesse u avec laquelle le Fluide jailliroit par cette différencio-différencielle $= 8\sqrt{a}$, ce qui donne $a = \frac{u^2}{64}$.

Donc la force dont il est ici question, sera représentée par $\frac{mu^2}{64} LN.MN$; expression qui renferme la relation cherchée.

COROLLAIRE.

(567.) Connoissant la vitesse avec laquelle le Fluide jailliroit par la différencio-différencielle, on aura la force dont cette petite surface soutient l'effort, en multipliant son aire $LN.MN$, par le quarré de la vitesse u , & par la constante $\frac{m}{64}$.

PROPOSITION XI.

(568.) La force perpendiculaire qu'éprouve une différencio - différencielle de surface $LN.MN$, lorsqu'elle se meut dans un Fluide, en suivant une direction qui lui est perpendiculaire, est $= m.LN.MN(\sqrt{a \pm \frac{1}{2}u})^2$; u désignant la vitesse perpendiculaire de la surface.

On vient de voir (564.) que la vitesse avec laquelle le Fluide jailliroit par la différencio-différencielle de la surface, s'il avoit un libre passage, est $= 8\sqrt{a}$: par conséquent si la surface se meut avec la vitesse u , dans la même direction perpendiculaire par laquelle le Fluide se dirigerait, la vitesse relative sera $8\sqrt{a \pm u}$; le signe $+$ ayant lieu dans le cas où la surface se meut contre le Fluide, & le signe $-$ lorsqu'elle tend à s'en éloigner, ou qu'elle fuit le Fluide. Donc la force perpendiculaire dont la surface soutiendra l'effort, est (567.) $= \frac{m.LN.NM}{64} (8\sqrt{a \pm u})^2 = m.LN.NM (\sqrt{a \pm \frac{1}{2}u})^2$; a désignant la distance verticale de la différencio-différencielle de la surface à la superficie du Fluide, celui-ci étant en repos.

PROPOSITION XII.

(569.) Si l'on représente par α l'angle MNO que forme la surface avec l'horizontale NO , perpendiculaire à LN , la force perpendiculaire, dont la différencio-différencielle $LKMN$ éprouvera la résistance, en se mouvant perpendiculairement, sera aussi $= m.LN. \frac{MO}{\sin \alpha} (\sqrt{a \pm \frac{1}{2}u})^2 = m.db. \frac{da}{\sin \alpha} (\sqrt{a \pm \frac{1}{2}u})^2$, en faisant la différencielle horizontale $LN=db$.

Car on a $MN:MO::1:\sin \alpha$, & par conséquent $MN = \frac{MO}{\sin \alpha} = \frac{da}{\sin \alpha}$; cette valeur de MN étant substituée dans l'expression $m.LN.MN (\sqrt{a \pm \frac{1}{2}u})^2$ qu'on vient de trouver (568.), la change en celle-ci, $\frac{m.db.da}{\sin \alpha} (\sqrt{a \pm \frac{1}{2}u})^2$; c'est l'expression de la force perpendiculaire dont la différencio-différencielle $LKMN$ éprouve la résistance, en se mouvant perpendiculairement.

PROPOSITION XIII.

(570.) Si la différencio-différencielle LKMN, au lieu de se mouvoir suivant une direction qui lui soit perpendiculaire, se meut suivant une autre direction quelconque qui fasse avec elle un angle donné $= \theta$, la force perpendiculaire qu'éprouvera la différencio-différencielle, sera $= \dots$
 $\frac{m \cdot db \cdot da}{\sin^2} (\sqrt{a \pm \frac{1}{2}u \sin \theta})^2$.

La vitesse suivant la direction que suit la différencio-différencielle, est à la vitesse suivant la perpendiculaire, comme 1 est à $\sin \theta$: par conséquent cette vitesse perpendiculaire sera $= u \sin \theta$. Cette valeur étant substituée dans l'expression $\frac{m \cdot db \cdot da}{\sin^2} (\sqrt{a \pm \frac{1}{2}u})^2$ qu'on vient de trouver (569.), en place de u seul, qui représente, dans cette formule, la vitesse perpendiculaire, on aura la force, ou résistance, perpendiculaire qu'éprouve la différencio-différencielle $= \frac{m \cdot db \cdot da}{\sin^2} (\sqrt{a \pm \frac{1}{2}u \sin \theta})^2$.

PROPOSITION XIV.

(571.) La force ou résistance qu'éprouvera la surface différencio-différencielle LKMN, suivant une direction quelconque qui la coupe sous un angle donné α , sera $= \frac{m \cdot db \cdot da \cdot \sin \alpha}{\sin^2} (\sqrt{a \pm \frac{1}{2}u \sin \theta})^2$.

Soit DL cette direction quelconque ; & du point D soit abaissé la perpendiculaire DC sur la surface ; tirant ensuite la ligne LC , l'angle DLC , ou son égal DFG , sera $= \alpha$, EG étant supposé perpendiculaire sur LD . Si donc DF représente la force, ou résistance, perpendiculaire, DG représentera celle que la différencio-différencielle de la surface éprouve dans la direction DL . Mais DF est à DG , comme 1 est à $\sin \alpha$; on aura donc aussi r est à $\sin \alpha$, comme $\frac{m \cdot db \cdot da}{\sin^2} (\sqrt{a \pm \frac{1}{2}u \sin \theta})^2$, force, ou résistance, perpendiculaire, est à $\frac{m \cdot db \cdot da \cdot \sin \alpha}{\sin^2} (\sqrt{a \pm \frac{1}{2}u \sin \theta})^2$, force, ou résistance, suivant la direction DL .

COROLLAIRE.

(572.) Dans le cas où l'on demanderoit la force suivant la direction du mouvement, alors $\alpha = \theta$; & par conséquent la force qu'éprouvera la différencio-différencielle de la surface LKMN, dans la direction de son mouvement, est $= \frac{m \cdot db \cdot da \cdot \sin \theta}{\sin^2} (\sqrt{a \pm \frac{1}{2}u \sin \theta})^2$.

LEMME I.

(573.) Si, par quelque point D de la direction DL , on fait passer un plan vertical IED , perpendiculaire à la différencio-différencielle LKMN ;

& par la base LN de ladite différencio-différencielle, un plan horifontal NLA . Si, de plus, ayant élevé la verticale DAI , on mene les perpendiculaires AB , DC , AH , en nommant λ l'angle NLA , & μ l'angle LDA , on aura $\sin \alpha$, ou le sinus de l'angle CLD que forme la direction DL avec la différencio-différencielle, $= \sin \lambda. \sin \mu. \sin \mu + \cos \mu. \cos \mu$.

Supposons $LA = q$, on aura $AE = q. \sin \lambda$; & dans le triangle rectangle BAE , à cause que $\sin \mu =$ le sinus de l'angle BEA , on aura $BA = CH = q. \sin \mu. \sin \lambda$. Dans le triangle aussi rectangle LAD , on a $DA = \frac{q \cos \mu}{\sin \mu}$; mais à cause que les triangles DAH , DIC , EIA , sont semblables, l'angle $IEA = HDA$, & le sinus de cet angle est par conséquent $= \sin \mu$; donc $DH = \frac{q \cos \mu \cos \mu}{\sin \mu}$; & par conséquent $CH + HD = CD = q. \sin \lambda. \sin \mu + \frac{q \cos \mu \cos \mu}{\sin \mu}$. De plus, on a $DL = \frac{q}{\sin \mu}$: donc, dans le triangle rectangle CLD , on aura $\frac{q}{\sin \mu} : q. \sin \lambda. \sin \mu + \frac{q \cos \mu \cos \mu}{\sin \mu} :: 1 : \sin \alpha = \sin \lambda. \sin \mu + \cos \mu. \cos \mu$.

COROLLAIRE I.

(574.) Substituant cette valeur de $\sin \alpha$ dans l'expression
 $m. db. da. \frac{\sin \alpha}{\sin \mu} (a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2$ de la résistance qu'éprouve la différencio-différencielle suivant la direction DL , elle deviendra $=$
 $m. db. da. \left(\sin \lambda. \sin \mu + \frac{\cos \mu \cos \mu}{\sin \mu} \right) (a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2$.

COROLLAIRE II.

(575.) Si, de l'extrémité N de la base LN , on abaisse, sur la direction LR qui passe par l'autre extrémité, la perpendiculaire NR ; en supposant cette perpendiculaire $= dc$, on aura $NR = db. \sin \lambda = dc$, & $db = \frac{dc}{\sin \lambda}$.

COROLLAIRE III.

(576.) Substituant cette valeur de db dans l'expression
 $m. db. da. \left(\sin \lambda. \sin \mu + \frac{\cos \mu \cos \mu}{\sin \mu} \right) (a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2$, elle deviendra ..
 $m. dc. da. \left(\sin \mu + \frac{\cos \mu \cos \mu}{\sin \lambda. \sin \mu} \right) (a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2$.

COROLLAIRE IV.

(577.) Dans le cas où l'on demanderoit la résistance horifontale, on auroit $\sin \mu = 1$, & $\cos \mu = 0$: donc cette résistance sera $=$
 $m. dc. da. (a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2$.

COROLLAIRE V.

(578.) La force, ou résistance, horisontale est donc à celle qui s'exerce dans une direction quelconque comme l'unité est à $\sin \mu + \frac{\cos \mu \cdot \cos \eta}{\sin \lambda \cdot \sin \eta}$; ou comme $\sin \eta \cdot \sin \lambda$ est à $\sin \eta \cdot \sin \lambda \cdot \sin \mu + \cos \mu \cdot \cos \eta$.

COROLLAIRE VI.

(579.) Si l'on nomme H la force, ou résistance, horisontale; celle qui s'exerce suivant une direction quelconque sera $= H \left(\sin \mu + \frac{\cos \mu \cdot \cos \eta}{\sin \lambda \cdot \sin \eta} \right)$.

COROLLAIRE VII.

(580.) Dans le cas où l'on demanderoit la force, ou résistance, verticale, on auroit $\sin \mu = 0$, & $\cos \mu = 1$: cette résistance sera donc $= \frac{H \cdot \cos \eta}{\sin \lambda \cdot \sin \eta}$.

COROLLAIRE VIII.

FIG. 58.
& 53.

(581.) Si l'horisontale NO , perpendiculaire à la base LN , est supposée $= de$, on aura $\cos \eta : \sin \eta :: de : da = \frac{de \cdot \sin \eta}{\cos \eta}$; cette valeur étant substituée dans l'expression de la force $m \cdot db \cdot da \left(\sin \lambda \cdot \sin \mu + \frac{\cos \mu \cdot \cos \eta}{\sin \lambda} \right) (a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2$, la changera en celle-ci $m \cdot db \cdot de \left(\frac{\sin \eta \cdot \sin \lambda \cdot \sin \mu}{\cos \eta} + \cos \mu \right) (a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2$.

COROLLAIRE IX.

(582.) Dans le cas où l'on voudroit avoir la résistance verticale, on auroit $\sin \mu = 0$, & $\cos \mu = 1$, & par conséquent cette résistance seroit $= m \cdot db \cdot de \left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2} u \sin \theta \right)^2$.

COROLLAIRE X.

(583.) Puisque l'angle que forme la direction du mouvement avec la différencio-différentielle, est exprimé par θ , on aura aussi $\sin \theta = \sin \lambda \cdot \sin \eta \cdot \sin \mu + \cos \mu \cdot \cos \eta$, dans le cas où il seroit question de la force, ou résistance, suivant cette direction.

COROLLAIRE XI.

(584.) Dans le mouvement horisontal, $\sin \mu = 1$, & $\cos \mu = 0$: donc, dans ce cas, $\sin \theta = \sin \lambda \cdot \sin \eta$.

COROLLAIRE XII.

(585.) Le mouvement étant vertical, $\sin \mu = 0$, & $\cos \mu = 1$: donc, dans ce cas, on aura $\sin \theta = \cos \eta$.

COROLLAIRE

(586.) La résistance horizontale, dans le cas où la direction du mouvement est aussi horizontale, sera donc $m.dc.da (a^2 \pm \frac{1}{2} u \sin \lambda \sin v)^2$; & la résistance verticale, lorsque la direction du mouvement est pareillement verticale, sera $= m.db.de (a^2 \pm \frac{1}{2} u \cos v)^2$.

SCOLIE.

(587.) Dans tous les cas ci-dessus, on doit entendre que la surface AB est en partie plongée dans le Fluide, & en partie au dehors, de sorte que a exprime la distance verticale de la différencio-différencielle $LKMN$, jusqu'à la superficie P du Fluide, celui-ci étant en repos. Toute la surface peut cependant être submergée dans le Fluide, de sorte que Q soit un point de la superficie du Fluide. Dans ce cas, la lettre a devroit représenter la hauteur verticale QM du Fluide au-dessus de la différencio-différencielle $LKMN$, & non la hauteur PM de la surface AB . Pour éviter toute équivoque, nous ferons $QP = D$, & $PM = a$; de sorte que la hauteur verticale du Fluide au-dessus de la différencio-différencielle $LKMN$, ne sera plus exprimée par a , mais par $D+a$. Cette valeur étant donc substituée, dans les expressions précédentes, en place de a seul, qui désignoit auparavant la hauteur verticale du Fluide, on aura (571 & 574.) $\frac{m.db.da \sin x}{\sin v} ((D+a)^2 \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2 = m.db.da (\sin \lambda \sin \mu + \frac{\cos \mu \cos v}{\sin v}) ((D+a)^2 \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2$ pour l'expression de la résistance suivant une direction quelconque; $m.dc.da ((D+a)^2 \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2$ pour la résistance horizontale, (577.) & (582.) $m.db.de ((D+a)^2 \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2$ pour la résistance verticale. Si l'on vouloit avoir les résistances suivant la direction du mouvement, comme, dans ce cas, $x = \theta$, on auroit $\frac{m.db.da \sin \theta}{\sin v} ((D+a)^2 \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2$ pour l'expression de la résistance dans une direction quelconque; & (586.) $m.dc.da ((D+a)^2 \pm \frac{1}{2} u \sin \lambda \sin v)^2$ pour la résistance horizontale; & enfin, $m.db.de ((D+a)^2 \pm \frac{1}{2} u \cos v)^2$ pour la résistance verticale.

PROPOSITION XV.

(588.) Si un Fluide se meut en vertu de sa propre gravité, & prend une vitesse constante, une partie de l'action de chacune de ses particules est détruite par une force quelconque.

Soit CI la superficie du Fluide inclinée à l'horison, & B une de ses

TOME L.

Gg

Fig. 56.

Fig. 57.

particules, l'action de la gravité sur cette particule est dirigée suivant la verticale BD , & peut se décomposer en deux autres, l'une suivant BA , perpendiculaire à la superficie CI ; & l'autre suivant AD , parallèle à cette superficie. Par la première action, le Fluide doit demeurer en équilibre, & par la seconde, sa vitesse devoit s'accélérer: mais, par la supposition, sa vitesse est constante; donc $du=0$. Donc la somme des puissances qui agissent pour augmenter la vitesse, est zéro; & par conséquent il faut qu'il y ait une force, ou puissance, qui agisse dans une direction opposée, & qui détruise celle qui agit suivant AD .

PROPOSITION XVI.

(589.) *Trouver la force dont une différencio-différencielle de surface éprouve l'action, lorsqu'étant en repos, c'est le Fluide qui se meut contre elle, & qui la choque.*

Il paroît, au premier coup-d'œil, que l'action & la réaction étant égales, ce devoit être la même chose, quant à l'effet, que la surface fût en mouvement, ou que ce fût le Fluide; & que toute la différence consiste à supposer que le Fluide soit en mouvement avec la même vitesse u , dans une direction contraire. En effet, ce principe seroit exactement vrai, si la gravitation des particules du Fluide étoit toujours perpendiculaire à sa superficie; mais il n'en est pas ainsi dans le cas où le Fluide se meut, parce que son mouvement dépend de sa *dénivellation*. Dès que le Fluide se meut, sa superficie cesse d'être de niveau, & par conséquent la direction suivant laquelle gravitent ses particules, n'est plus perpendiculaire à sa superficie. Supposons, par exemple, que le Fluide se meuve avec la vitesse constante u , sa superficie CI étant inclinée à l'horison: la gravitation verticale a des particules du Fluide en FB peut se décomposer en deux, l'une β agissant suivant la direction BA perpendiculaire à la superficie CI , & l'autre γ parallèle à cette même superficie. Expriment donc par ω l'angle ADB que forme la verticale avec la superficie du Fluide, on aura $\beta = a \sin \omega$, & $\gamma = a \cos \omega$. Cette dernière gravitation, ou puissance, est détruite, comme on l'a vu Art. 588, & il demeure seulement la force $\beta = a \sin \omega$ perpendiculaire à la superficie CI ; & par conséquent nous aurons équilibre dans le Fluide, par l'action de cette puissance, & sa valeur est celle que nous devons substituer, dans les formules précédentes, en place de a seul.

Supposant maintenant, comme ci-dessus, la verticale $FB = a$, on aura $EB = a \sin \omega$; & substituant aussi cette valeur au lieu de a dans l'équation $a = \frac{Au^2}{2\omega}$, trouvée, Art. 43, nous aurons $a \sin \omega = \frac{Au^2}{2\omega \sin \omega}$;

d'où l'on tire $\frac{u^2}{A} = \frac{u^2}{2a \sin \omega}$: mais (52.) $\frac{u^2}{A} = 32$; donc $32 = \frac{u^2}{2a \sin \omega}$, PLANC. III.

& par conséquent $u = 8a^{\frac{1}{2}} \sin \omega$. Telle est la vitesse avec laquelle le Fluide jaillira par un orifice fait en *B*, en vertu de l'action seule de la puissance $\beta = a \sin \omega$.

La vitesse relative avec laquelle le Fluide se mouvra dans l'orifice, sera donc $= 8a^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm u \sin \theta$; & le poids, ou la force perpendiculaire que supportera la différencio-différencielle *LN.NM* de la surface, FIG. 58.
sera $= m.LN.NM (a^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2$, ou $= \dots \dots \dots$
 $m.LN.NM ((D+a)^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2$. Substituant maintenant dans cette formule les valeurs de *LN* & *NM*, qu'on a trouvées, ou bien, substituant, dans les formules trouvées (587.), $(D+a)^{\frac{1}{2}} \sin \omega$, en place de *D+a*, on aura $\frac{m.db.da \sin \omega}{\sin \omega} ((D+a)^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2 =$
 $m.db.da (\sin \lambda. \sin \mu. + \frac{\cos \mu. \cos \lambda}{\sin \omega}) ((D+a)^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2$, pour l'expression de la force dans une direction quelconque ; $\dots \dots \dots$
 $m.dc.da ((D+a)^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2$, pour celle de la force horizontale, & $m.db.de ((D+a)^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2$, pour la verticale. Et si l'on demande les expressions de la force, suivant la direction du mouvement, on aura $\frac{m.db.da \sin \theta}{\sin \omega} ((D+a)^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2 = \dots \dots \dots$
 $m.dc.da ((D+a)^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{2} u \sin \lambda. \sin \mu.)^2$, quand cette direction est horizontale ; & $m.db.de ((D+a)^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{2} u \cos \eta)^2$, quand elle est verticale.

COROLLAIRE I.

(590.) Si le Fluide se meut horizontalement, on aura $\sin \omega = 1$, & les expressions des forces se réduiront à celles qu'on a trouvées pour le cas où le Fluide est en repos, & que la surface choquée est en mouvement ; d'où il suit que c'est seulement dans cette supposition que peut avoir lieu le principe généralement reçu, qui est que c'est la même chose, quant à l'effet, que ce soit la surface qui se meuve, ou que ce soit le Fluide.

COROLLAIRE II.

(591.) Les formules précédentes sont donc toutes renfermées dans ces dernières : il suffit de faire $\sin \omega = 1$, pour les obtenir.

PROPOSITION XVII.

(592.) Trouver la force qui agit sur une différencio-différencielle de surface, lorsque la surface & le Fluide sont en mouvement

Pour avoir la solution de ce cas, il ne faut que chercher la valeur de la vitesse composée des deux autres, sçavoir, celles de la surface & du Fluide, & la substituer, dans ces dernières formules, en place de u . On substituera de même, en place de θ , la valeur de l'angle que forme la direction composée avec la différencio-différencielle de la surface. Ces substitutions faites, on aura les formules qui conviennent au cas proposé, comme il est évident, par la théorie de la composition & de la décomposition des forces.

S C O L I E.

(593.) Un Fluide étant un corps, il semble que nous aurions dû nous assujettir, dans la théorie de ce Chapitre, aux loix & aux principes que nous avons donnés dans le *Chap. VI du Livre I*; puisque l'impulsion d'une surface contre un Fluide, est une vraie percussion. Sa force, désignée par π dans le Chapitre cité, & qui est $= \frac{DH \cdot D' H'}{DH + D' H'}$, se réduit à $\pi = DH$, dans le cas présent, où la dureté, ou densité D , du Fluide est négligeable par rapport à celle de la surface, ou du corps; c'est-à-dire que la force dont la surface souffre l'action, est en raison directe de la densité du Fluide, & de l'amplitude H de l'impression. Mais cette manière d'envisager la question ne nous auroit pas conduit à une connoissance parfaite de la force qui a fait l'objet de nos recherches: car, quoique nous connoissions la valeur de H dans le cas du repos, laquelle n'est en effet que l'aire de la surface du corps choquant, perpendiculaire à la direction du mouvement, nous ne la connoissons pas dans le cas du mouvement actuel, parce qu'alors cette valeur n'est plus la même, attendu qu'elle subit des altérations. Nous n'aurions pas obtenu une connoissance plus parfaite, en nous servant de l'équation $\pi = \frac{H}{I} (\frac{1}{2} AU^2 + ax)$ qu'on a trouvée, *Art. 312*, équation à laquelle se réduit le cas dont il est ici question; ou bien $\pi = \frac{Hax}{I}$, en supposant la vitesse initiale U avec laquelle se mouvoit la surface égale à zéro: car l'impression totale I étant comme Hx , cette équation nous eût seulement appris que la force π , dont la surface éprouve l'action, est comme la puissance a qui la pousse. C'est pour cela que nous avons tâché de prendre un autre chemin, qui, comme on l'a vu, nous a conduit à la vraie connoissance de la valeur de π , qui est $= \frac{m \cdot db \cdot du \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha} ((D+a)^{\frac{1}{2}} \sin \alpha \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2$. Mais, quelque simple que soit la théorie que nous avons employée, elle ne laisseroit pas cependant de pouvoir être combattue par des raisonnements très-solides, si l'expérience ne la confirmoit pas, au-

tant qu'elle le fait, par tous les moyens qu'on peut employer à cette vérification, comme on le verra par la suite. Au reste, ces embarras ont existé dans tous les temps, & ont fait regarder ce sujet comme de la plus grande difficulté; les plus célèbres Géomètres en ont fait l'objet de leurs recherches, & avouent qu'ils ont tâché seulement d'atteindre le but, sans y être parvenus entièrement.

Le Docteur *Wallis*, dans ses *Œuvres Mathématiques*, établit cette force seulement comme la simple vitesse; & c'est d'après cette doctrine qu'il fonde tous ses calculs sur le mouvement des corps projetés dans l'air. Il ne donne pas d'autre raison pour appuyer son sentiment, & pour suivre cette règle, si ce n'est, qu'avec une vitesse double, une surface en mouvement écarte une quantité double de Fluide, & qu'elle en écarte une quantité triple avec une vitesse triple, & ainsi de suite. Il ajoute qu'on pourroit lui objecter qu'avec une vitesse double, la surface met en mouvement une quantité double de Fluide, en lui donnant une vitesse double; que par conséquent il paroît que la surface a besoin d'une force doublée pour le mouvoir: mais il répond à cela, en disant que la surface ne met pas le Fluide, qu'elle ne fait seulement que le séparer. Il est étonnant que les difficultés qui résultent de ce principe, ne se soient pas présentées au Docteur *Wallis*, & qu'il n'ait pas senti l'insuffisance de cette réponse. En effet, il est bien difficile de concevoir comment la surface peut séparer le Fluide sans le mouvoir, & sans le mouvoir avec une vitesse proportionnelle à la sienne.

Léonard Euler, ce grand Géomètre, s'explique ainsi dans sa *Science Navale*. Qu'on suppose, dit-il, une surface plane AB , dont l'aire soit $= a^2$, mise en mouvement dans l'eau, suivant la direction CO qui lui est perpendiculaire. Soit, de plus, M le poids de du corps dont AB est la surface, & v la hauteur dont il devoit tomber pour acquérir la vitesse avec laquelle il exécute son mouvement. Soit aussi $Cc = dx$, l'espace qu'il parcourt dans un instant, de sorte que, pendant cet instant, la surface passe de la situation AB à la situation ab , Aa étant $= Cc = Bb$; & comme le corps perd de sa vitesse, il met $v - dv$, pour exprimer la hauteur d'où le corps devoit tomber pour acquérir sa vitesse diminuée. Ceci supposé, le même Auteur poursuit ainsi: le corps aura choqué, dans cet instant, l'eau contenue dans l'espace $AabB$, dont le poids est égal à ma^2dx , en exprimant par m la densité, ou la pesanteur spécifique, de l'eau: & en supposant que le centre de gravité de la surface soit dirigé suivant la même ligne Cc , dans laquelle se trouve

celui du volume de l'eau $Aabb$, afin qu'il n'y ait aucune rotation, cette quantité d'eau se mettra en mouvement, & après le premier instant, elle continuera de se mouvoir avec la même vitesse que le corps. La quantité de mouvement sera donc, après ce premier instant, celle du corps & celle de l'eau réunies; c'est-à-dire, . . . $(M+ma^2dx)(v-dv)^{\frac{1}{2}}$. laquelle doit être égale au mouvement qu'avoit le corps au commencement de l'action, c'est-à-dire, immédiatement avant le choc, mouvement qui étoit $Mv^{\frac{1}{2}}$. Donc nous aurons, dit-il, $Mv^{\frac{1}{2}} = (M+ma^2dx)(v-dv)^{\frac{1}{2}} = (M+ma^2dx)(v^{\frac{1}{2}} - \frac{dv}{2v})$; ce qui donne $Mdv = 2ma^2vdx$. Il suppose ensuite que p est une puissance qui, dirigée suivant CO , soit capable de produire le même effet que la force qui pousse la surface; & delà il déduit $Mdv = pdx = 2ma^2vdx$, ou $p = 2ma^2v$; c'est-à-dire que la puissance équivalente à la force qui pousse la surface, ou que cette force elle-même, est égale au double du poids d'une colonne d'eau dont la base est la surface choquée, & la hauteur celle dont il faudroit que le corps tombât pour acquérir la vitesse avec laquelle il se meut.

Pour réduire cette théorie à la nôtre, nous supposerons, dans l'équation $m.dc.da((D+a)^{\frac{1}{2}}\sin\alpha + \frac{1}{2}u\sin\theta)^2, \sin\alpha = 1$, & $\sin\theta = 1$; ce qui la changera en $m.dc.da((D+a)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}u)^2$; d'où l'on voit que ces deux théories ne peuvent convenir entre elles qu'en faisant $D+a=0$, c'est-à-dire, en supposant que la différencio différentielle choquée coïncide précisément avec la superficie du Fluide: car, dans ce cas, la force devient $= m.dc.da.\frac{1}{2}u^2$, ou $= m.dc.da.v$, en substituant (§ 2.) la valeur de $\frac{1}{2}u^2$ qui est $= v$; expression qui convient avec celle d'Euler, avec la seule différence que la sienne est double de celle-ci. Mais on voit que, dans le fait, sa théorie ne convient avec la nôtre que dans un cas seulement, qu'il est presque impossible de supposer; & encore résulte-t-il de la théorie d'Euler que la force est égale au double du poids d'une colonne d'eau, dont la base est la surface choquée, & dont la hauteur est celle dont il faudroit que le corps tombât pour acquérir la vitesse avec laquelle il se meut; résultat dont l'Auteur avoue lui-même n'être pas satisfait, en considérant que le poids qui supporte une surface, est seulement le poids simple de la même colonne d'eau, comme notre théorie l'indique.

Cette observation paroîtra encore plus digne d'attention, si, au lieu de $Mdv = pdx$, on fait $Mdv = \frac{pdx}{3^{\frac{1}{2}}}$, qui est la seule équation légitime. En effet, on a vu (§ 41 & § 2.) que dans les corps graves

qui tombent verticalement, $dv = \frac{Mdu}{32M}$, u désignant la vitesse avec laquelle se meut le corps ; & dans le cas où son mouvement seroit produit par la puissance p , on a $dx = \frac{Mu du}{p}$ (41.) : en combinant ces deux équations, on en tire $32dv = \frac{pdx}{M}$, ou $Mdv = \frac{pdx}{32}$, ce qui donne $\frac{pdx}{32} = 2ma^2vdx$, ou $p = 64ma^2v$; c'est-à-dire que la résistance est égale au poids de 64 colonnes d'eau, dont la base de chacune est la surface choquée, & dont la hauteur est celle dont il faudroit que le corps tombât pour acquérir la vitesse avec laquelle il se meut. Ce résultat, qui indique un poids prodigieux, paroît sans doute bien étrange, & bien éloigné des conséquences que nous ont fourni les principes établis dans le Chapitre précédent.

En outre, il faut observer que le poids de la quantité d'eau que meut le corps, n'est pas ma^2dx , mais (554.) celui d'une colonne d'eau, dont la base est la surface a^2 , & dont la hauteur est celle du Fluide au-dessus de cette surface ; de sorte que le poids sera d'autant plus grand, & par conséquent la résistance d'autant plus grande, que la surface sera plus profondément enfoncée dans le Fluide. Ce résultat, si clair & si évident, ne peut cependant se déduire ni du calcul, ni des équations supposées. On pourroit, au reste, se convaincre de cette vérité, sans cette considération : il suffit, pour cela, de lire le *Scolie* qui est à la fin de la *Proposition XXXV* du *Livre II* de la *Philosophie Naturelle* de *Newton* ; on y verra clairement que le corps, à la vérité, ne choque que la partie de Fluide exprimée par ma^2dx , mais que cette partie en choque une autre qui est devant elle, & cette dernière celle qui la suit, & ainsi de suite successivement, sans qu'il soit possible d'assigner aucune limite ; de sorte que le corps choque immédiatement, ou médiatement, une quantité de Fluide qu'il n'est pas possible de déterminer, bien loin de ne choquer que la quantité contenue dans l'espace a^2dx .

Daniel Bernoulli, Auteur connu si avantageusement dans la république des lettres par ses sçavants Ouvrages, fait un calcul semblable, duquel il conclut de la même manière (a), que le Fluide n'étant pas élastique, la résistance est égale au double du poids d'une colonne du même Fluide, dont la base est la surface choquée, & la hauteur celle d'où le corps devroit tomber pour acquérir la vitesse avec laquelle il se meut : mais il ajoute que, si le Fluide étoit

(a) *Commentaires de l'Académie de Pétersbourg, Mois de Juin & Oâbre 1727.*

élastique, la résistance seroit exprimée par une colonne quadruple, c'est-à-dire qu'elle seroit double de la première. Ce résultat est conséquent pour la vitesse qui demeure aux corps, non-seulement élastiques, mais parfaitement élastiques, après que la plus grande impression est entièrement formée. Cette vitesse a été trouvée (273.) pour le cas dont il est question, $= \frac{(M-ma^2dx)u}{M+ma^2dx} = u-du$ *; d'où l'on tire $(M-ma^2dx)u = (M+ma^2dx)(u-du)$, ou $Mudu = 2ma^2u^2dx$; & en substituant pour $Mudu$ sa valeur pdx , il vient $p = 2ma^2u^2$; c'est-à-dire, la résistance double de celle qu'on vient de trouver, le Fluide n'étant point élastique **. Tout ce qu'on peut dire de ce calcul, c'est qu'il est sujet aux mêmes difficultés, & aux mêmes objections que le précédent; sans compter la supposition que le Fluide soit parfaitement élastique, quoiqu'il ne puisse cependant exercer son élasticité totale qu'après un temps infini. Ce qu'il y a de plus étonnant dans tout ceci, c'est que nos Auteurs n'ayant déterminé que la force qu'éprouvent les surfaces, il ne leur soit pas venu à l'esprit qu'il est impossible que cette force soit simplement comme une fonction de la vitesse; car celle-ci devenant zéro, la force devroit aussi devenir $= 0$; ce qui est contraire à tous les principes du Chapitre précédent, principes dont la certitude est reconnue de tout le monde, & par ces Auteurs mêmes.

Newton commence l'examen de cette question par une voie toute opposée. Il donne, dans la *Section I (Philosophia Naturalis, Lib. II)*, les résultats, ou les conséquences qui doivent suivre de la supposition que les résistances sont comme les simples vitesses; & dans le *Scolie* qui termine la même Section, il dit : *Au reste, l'hypothèse qui fait la résistance des corps dans la raison des simples vitesses, est plus*

* Pour appliquer au cas présent les principes de l'Art. 273, auquel l'Auteur renvoie, on fera attention, 1°. que la vitesse primitive du corps choquant est ici représentée par u ; tandis qu'elle étoit représentée par U dans l'endroit cité; 2°. que la vitesse primitive du corps choqué, qui est ici le Fluide, est zéro, ainsi $V = 0$; 3°. que la vitesse du corps choquant, après le premier instant, c'est-à-dire, après que la plus grande impression est achevée, est, dans le cas présent, $= u-du$.

** Pour voir distinctement la vérité de ce que l'Auteur avance, il ne faut que substituer (52.) à la place de u^2 , sa valeur $64v$, v exprimant la hauteur dont il faudroit que le corps tombât pour acquérir la vitesse u ; alors on aura $n = 128 m^2v$, quantité double de $64 m^2v$ qu'il vient de trouver, le Fluide n'étant pas élastique. Quand l'Auteur dit que le résultat de Daniel Bernoulli est conséquent pour la vitesse qui demeure aux corps parfaitement élastiques, après que la plus grande impression est entièrement formée, il est évident qu'il n'entend parler que de ce qui concerne la duplicité de la résistance, & non de sa mesure effective, qui, comme on le voit, ne convient nullement avec ses principes, & est d'ailleurs absolument contraire à ce que l'expérience manifeste, comme on le verra par la suite.

Chap. II. DE LA FORCE DES FLUIDES EN MOUVEMENT. 241
 mathématique que conforme à la nature. Dans les milieux qui n'ont aucune tenacité, les résistances des corps sont en raison doublée des vitesses : car, dit le même Auteur, dans un temps moindre, un corps qui se meut avec une plus grande vitesse, communique, à la même quantité du milieu, un mouvement plus grand, en raison de sa plus grande vitesse. Donc, en temps égal, il lui communiquera un mouvement plus grand dans la raison doublée, à cause de la plus grande quantité des parties du milieu qui sont mues ; & la résistance, qui n'est que la force de réaction, est égale, ou proportionnelle, au mouvement communiqué. Ce raisonnement, qui est commun à tous les Auteurs, depuis le Docteur Wallis, sert de base à notre Philosophe ; & c'est d'après lui qu'il examine, dans la *Section II*, les conséquences qui doivent résulter de la supposition que les résistances sont comme les quarrés des vitesses. Ensuite, dans la *Section III*, il passe à l'examen des propriétés qui devoient résulter, si les résistances étoient en partie comme les simples vitesses, & en partie comme leurs quarrés. L'objet de l'analyse de ces différentes hypothèses, est de les comparer ensuite avec les expériences, & de découvrir ainsi laquelle est d'accord avec les loix de la nature. Dans les *Sections IV & V*, il détermine le mouvement que doivent prendre les corps qui tournient dans des milieux qui résistent selon les premières suppositions ; & traite de la densité & compression de ces milieux. Dans la *Section VI*, il traite du mouvement & de la résistance qu'éprouvent les pendules, ou les fils à plomb qui oscillent autour d'un point fixe par l'action de la gravité. Enfin, dans la trente-unième & dernière *Proposition*, il démontre que les différences des arcs décrits en descendant, aux arcs décrits en montant, sont comme les résistances. Mais il suppose, pour cela, que les pendules oscillent dans la cycloïde, afin que toutes leurs oscillations soient de même durée ; ou, comme nous l'avons dit, *Art. 369*, que les oscillations des pendules soient d'une très-petite étendue, pour que les arcs qu'ils décrivent coïncident avec ceux de la cycloïde. En outre, le même sçavant Auteur n'a pas négligé de faire & de répéter avec soin les expériences nécessaires pour la recherche d'un principe aussi important.

Toutes ces expériences sont rapportées dans le *Scolie général* qui suit la *Proposition XXXI*. Il s'est servi, pour les premières, du mouvement d'un pendule de 10 pieds $\frac{1}{2}$ anglais de longueur, composé d'un globe de bois de 6 pouces $\frac{1}{2}$ de diamètre. Voici la première Table qu'il en donne.

TOME I.

Hh

Longueur des demi-arcs décrits, Σ 2. 4. 8. 16. 32. 64.
 exprimés en pouces,

Différences des arcs observés. Σ $\frac{1}{656} \cdot \frac{1}{242} \cdot \frac{1}{69} \cdot \frac{4}{71} \cdot \frac{8}{37} \cdot \frac{24}{29}$.

Les premiers nombres sont dans la raison de 1 à 2 : il faudroit donc, pour que les résistances fussent comme les quarrés des vitesses, ainsi que le dit *Newton*, dans le *Scolie* qui termine la premiere *Section*, il faudroit, dis-je, que les seconds fussent dans la raison de 1 à 4.

La premiere raison est celle de $\frac{1}{656}$ à $\frac{1}{161}$, ou celle de 1 à 2 $\frac{172}{161}$.

La seconde est celle de 69 à 242, ou de 1 à 3 $\frac{21}{69}$.

La troisieme est celle de 71 à 276, ou de 1 à 3 $\frac{63}{71}$.

La quatrieme est celle de 37 à 142, ou de 1 à 3 $\frac{71}{37}$.

La cinquieme est celle de 29 à 111, ou de 1 à 3 $\frac{14}{29}$.

Toutes ces raisons sont, comme on le voit, plus grandes que celle de 1 à 4, qui est la raison des quarrés des arcs, ou des quarrés des vitesses. Cependant notre respectable Auteur remarque, avec raison, que les dernieres, dans lesquelles le pendule faisoit de grandes oscillations, sont très-proches d'être comme les quarrés; & par conséquent il en conclut que, dans ces oscillations, les résistances sont à-peu-près comme ces mêmes quarrés. Mais il n'en arrive pas de même dans les petites oscillations : dans la premiere, la raison étoit seulement comme 1 à 2 $\frac{172}{161}$; & il est évident qu'on peut présumer que, si l'on avoit continué à faire des expériences, en diminuant de plus en plus les oscillations, on auroit enfin trouvé les résistances dans la raison de 1 à 2, c'est-à-dire, comme les simples vitesses, puisque la raison a été trouvée de plus en plus grande, à mesure que les oscillations ont été plus petites.

Une autre suite d'observations faites avec le même pendule, & rapportées au même endroit, ne présente rien de plus satisfaisant : voici la Table qu'il en donne.

Demi-arcs décrits, exprimés en Σ 2. 4. 8. 16. 32. 64.
 pouces.

Différences des arcs observés. Σ $\frac{1}{748} \cdot \frac{1}{272} \cdot \frac{4}{325} \cdot \frac{12}{250} \cdot \frac{24}{125} \cdot \frac{36}{68}$.

Chacune de ces différences étant comparée avec celle qui la suit immédiatement, on aura les raisons de 1 à 2 $\frac{202}{172}$; de 1 à 3 $\frac{113}{111}$; de 1 à 3 $\frac{111}{112}$; de 1 à 4; & de 1 à 2 $\frac{101}{102}$. Il est cependant certain qu'il y en a une dans le rapport de 1 à 4, qui est exactement la raison du quarré des vitesses; mais la suivante, celle de 1 à 2 $\frac{101}{102}$, est plus grande, quoiqu'elle dût être moindre, suivant la diminution

qui s'observe dans toutes les précédentes ; ce qui prouve clairement que la différence $\frac{2}{11}$ est excessivement grande, & qu'il s'est glissé quelque erreur dans cette observation. En diminuant cette différence, la dernière raison deviendra plus petite ; mais celle qui la précède augmentera, & ne sera plus celle de 1 à 4.

Ce que nous avons avancé ci-dessus est vérifié dans deux autres suites d'observations, faites avec une balle de plomb de deux pouces de diamètre, ajustée au pendule, en place de celle de bois : en voici les deux Tables.

PREMIERE TABLE.

<i>Demi-oscillations décrites , ex-primées en pouces.</i>	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.
<i>Différences des arcs observés.</i>	$\frac{1}{1808}$	$\frac{1}{912}$	$\frac{1}{386}$	$\frac{1}{140}$	$\frac{4}{181}$	$\frac{4}{53}$	$\frac{8}{30}$

SECONDE TABLE.

<i>Demi-oscillations décrites , ex-primées en pouces.</i>	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.
<i>Différences des arcs observés.</i>	$\frac{1}{2040}$	$\frac{1}{1036}$	$\frac{1}{420}$	$\frac{1}{159}$	$\frac{1}{51}$	$\frac{8}{121}$	$\frac{6}{35}$

Toutes ces différences comparées donnent les raisons plus grandes que celle de 1 à 4 ; mais particulièrement les premières de chaque suite sont de 1 à $1\frac{324}{11}$, & de 1 à $1\frac{1074}{11}$, qui sont bien proches de celle de 1 à 2, c'est-à-dire, d'être comme les simples vitesses.

Les mêmes choses arrivent dans d'autres expériences faites dans l'eau, desquelles *Newton* fait encore mention ; mais sous quelque forme qu'elles soient faites, les résultats ne permettent pas de conclure que les résistances sont comme les quarrés des vitesses, mais bien plutôt comme les simples vitesses, puisque les petites oscillations les donnent ainsi, & qu'elles doivent nécessairement être fort petites, pour qu'on puisse regarder les oscillations faites dans des arcs circulaires, comme confondues avec celles faites dans des arcs de cycloïde.

Quoi qu'il en soit, *Newton* frappé de ces disparités, & du peu d'accord de ses expériences avec la doctrine établie dans le *Scolie* qui termine la première Section, sur la mesure des résistances, avoue franchement qu'il n'a pas grande confiance dans ses expériences, & témoigne le desir qu'il auroit qu'on les répétât. Les mêmes raisons, sans doute, l'ont engagé à rechercher la loi de la résistance, non d'après le principe, ou la supposition, qu'elle est proportionnelle au quarré des vitesses, ou à la simple vitesse, mais en la sup-

posant comme une fonction $hu + ku^{\frac{1}{2}} + lu^2$ de la vitesse. Il résout donc ce cas ; mais les résultats que lui donne cette hypothèse , ne fournissent pas moins de disparités , lorsqu'on vient à comparer les observations les unes avec les autres ; de sorte qu'on ne peut absolument rien conclure de toutes ces expériences. Enfin, dans la *Section VII*, notre Auteur traite de la résistance qu'éprouvent les corps projetés dans un Fluide ; mais ce qu'il dit , à ce sujet , est fondé sur ce principe , que la résistance , ou , comme nous la nommons ici , la force qu'éprouvent les surfaces , est comme les quarrés des vitesses. C'est donc supposer ce qui étoit en question , & ce qu'il étoit nécessaire d'examiner & de déterminer.

On a encore déduit des résultats moins certains , & des conclusions moins satisfaisantes , des expériences physiques faites avec de petites machines , ou instruments , dont les livres sont remplis. Il suffit d'observer que le frottement seul qui a lieu dans ces petites machines , ou même celui des Fluides contre les parois des orifices par lesquels ils jaillissent , est capable de produire des effets très-considérables , & de laisser beaucoup d'incertitude dans les résultats des expériences de cette nature qu'on pourroit faire , quelque soin qu'on y apportât d'ailleurs.

On verra encore plus évidemment combien on étoit éloigné d'arriver à la vraie connoissance des forces de résistance , par toutes les routes qu'on a suivies jusqu'ici , lorsqu'on verra démontré , par notre théorie , que les résistances ne suivent ni la loi des simples vitesses , ni celle de leurs quarrés ; mais que cette loi varie suivant les circonstances & les dispositions des surfaces choquées dans les Fluides.

CHAPITRE III.

Des Forces avec lesquelles les Fluides agissent contre des Surfaces planes, dans le cas du mouvement.

PROPOSITION XVIII.

(594.) *DÉTERMINER la dénivellation qui a lieu dans la surface, d'un Fluide, par l'action, ou le mouvement, d'une surface qui se meut dans ce Fluide.*

FIG. 51.

Soit *AB* une surface plane , de la forme d'un parallélogramme rectangl. , & située de manière que deux de ses côtés soient horizon.

taux ; supposons que cette surface se meuve dans un Fluide en repos, & d'une densité uniforme ; on aura (571.) la force, ou résistance, qu'éprouvera la différencio-différencielle *KLMN*, en ne supposant pas toute la surface *AB* submergée dans le Fluide, = ...

$$\frac{m \cdot db \cdot da \cdot \sin \alpha}{\sin^3} (\sqrt{a \pm \frac{1}{2} u \sin \theta})^2, \text{ ou en intégrant par rapport à } b, \text{ c'est.}$$

à-dire, en considérant *b* seulement comme variable, on aura la force, dont tout le rectangle différentiel *FHIG* éprouvera l'effet, =

$$\frac{mb \cdot da \cdot \sin \alpha}{\sin^3} (\sqrt{a \pm \frac{1}{2} u \sin \theta})^2.$$

Supposons maintenant que *AH* représente la même surface vue de profil, *CD* étant la superficie du Fluide, il est clair que nous aurons pour un point tel que *E*, dans lequel la surface s'éloigne du Fluide, ou le fuit, $\sqrt{a - \frac{1}{2} u \sin \theta} = 0$, même avant que *a* soit = 0 ; ce qui donne $a = PE = \frac{1}{4} u^2 \sin^2 \theta$: puisque, pour ce point *E*, la force différentielle $\frac{mb \cdot da \cdot \sin \alpha}{\sin^3} (\sqrt{a - \frac{1}{2} u \sin \theta})^2$ doit être = 0, & par conséquent le Fluide ne choque, ni ne comprime la surface en ce point ; non plus qu'en aucun de ceux qui sont au-dessus de *E* : il doit donc se former, dans l'espace *CPE*, un creux, ou cavité *CEP*. Dans la partie *DF*, par laquelle la surface choque le Fluide, il se forme, au contraire, une élévation *DFP* ; car en faisant $\sqrt{a + \frac{1}{2} u \sin \theta} = 0$, il en résulte $\sqrt{a} = -\frac{1}{2} u \sin \theta$, expression dans laquelle le signe négatif indique que le point auquel correspond cette valeur de *a*, est au-dessus de *P*, origine de *a*. En quarrant l'équation $\sqrt{a} = -\frac{1}{2} u \sin \theta$, on aura $a = \frac{1}{4} u^2 \sin^2 \theta$, hauteur de ce point au-dessus de *P*. C'est ainsi que, par le mouvement de la surface *AH*, le Fluide altere son niveau dans toute la longueur de cette surface, & dans tout l'espace *CD*.

FIG. 59.

COROLLAIRE.

(595.) Pour déterminer les forces dont les différencielles des surfaces supportent l'effort dans les dénivellations, nous n'aurons qu'à faire $\sqrt{a}$ négatif pour la surface qui choque le Fluide, & le faire positif pour celle qui s'éloigne de lui. On aura donc la force qu'éprouve une différencielle dans la dénivellation, tant pour une surface que pour l'autre, = $\frac{mb \cdot da \cdot \sin \alpha}{\sin^3} (a - \frac{1}{2} u \sin \theta \sqrt{a} + \frac{1}{4} u^2 \sin^2 \theta)$.

Lorsque c'est le Fluide qui se meut, cette force est = ...

$$\frac{mb \cdot da \cdot \sin \alpha}{\sin^3} (a \sin \omega^2 - \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} u \sin \omega \sin \theta + \frac{1}{4} u^2 \sin^2 \theta).$$

S C O L E.

(596.) Ces dénivellations sont celles qu'on peut remarquer tous

les jours, lorsque des corps se meuvent dans des Fluides. Dans la partie où ils sont frappés horifontalement, on voit une intumescence, ou élévation; & dans la partie opposée, on voit, au contraire, un creux, ou cavité. Les hauteurs verticales de ces dénivellations sont telles que nous venons de les déterminer; mais on ne prétend cependant pas que la surface qui, suivant la théorie, devoit correspondre à la cavité, soit entièrement exempte de pression, ni que toute l'intumescence qui lui est égale, demeure complète, ou soit la même dans toute la longueur de la surface; parce que le Fluide s'introduit dans la cavité par les côtés de la surface, & s'écoule de l'intumescence, en allant vers les extrémités de la même surface, & cela dans une direction perpendiculaire au mouvement de celle-ci. Ainsi le Fluide occupe & déoccupe successivement une partie de la cavité & de l'élévation que nous avons déterminée. Ces quantités deviennent sensibles toutes les fois qu'on veut déterminer la valeur précise, ou absolue, de la force qui agit sur les surfaces; parce que l'augmentation, ou la diminution de l'effet produit par la dénivellation, correspond également à tous les points de la surface qui sont submergés dans le Fluide; & quoique ce soit une quantité insensible, prise seulement en partie, elle est considérable dans le tout, ou lorsqu'on en prend la somme totale. En effet, la différence qui correspond seulement à la partie dénivellée, est très-petite quand les corps occupent une grande profondeur dans le Fluide, & que les vitesses avec lesquelles ils se meuvent, ne sont pas fort grandes; car, comme on le verra dans la suite, l'action même de tout le creux, ou de toute l'élévation, devient négligeable dans ces cas, principalement lorsque les angles θ & α sont fort aigus.

PROPOSITION XIX.

(597.) *La cavité CEP, & l'élévation DFP, sont égales & semblables; & les courbes CE, DF, qui terminent le Fluide, sont, l'une & l'autre, des paraboles du premier genre, dont le parametre est $= 64 \sin \alpha^2$, & dont les axes sont les verticales CB, DB, éloignées du point P de la quantité $CP = PD = u \sin \theta$.*

Soit supposé CB ou DB l'abscisse, & BI l'ordonnée; & que la surface AH passe, dans un temps déterminé, de CB en AH, ou de AH en DB; tous les points, ou toutes les particules du Fluide, comme I, prises dans la surface de la courbe, auront parcouru, dans le même temps, leurs ordonnées correspondantes, lesquelles seront, par conséquent (589.), proportionnelles aux vitesses qu'auront

les particules, ou seront $= 8 \sin \omega \sqrt{CB}$, ou $= 8 \sin \omega \sqrt{DB}$. Faisant donc CB , ou $DB = x$, & $BI = y$, nous aurons $8 \sin \omega \sqrt{x} = y$, ou $64 \sin^2 \omega x = y^2$; équation de la parabole, dont le parametre $= 64 \sin^2 \omega$, & dont les axes sont CB , DB , éloignés de P de la quantité $CP = 8 \sin \omega \sqrt{PE} = 8 \sin \omega \sqrt{\frac{u^2 \sin^2 \omega}{64 \sin^2 \omega}} = u \sin \theta$.

SCOLIE I.

(598.) Pour plus de facilité, & pour plus de clarté dans le discours, nous appellerons désormais *Surface choquante* celle qui choque le Fluide, ou celle qui en est choquée, lorsque c'est le Fluide qui se meut; & nous nommerons *Surface choquée*, celle qui s'éloigne du Fluide, ou qui le suit.

SCOLIE II.

(599.) Comme l'expression des forces dans une direction quelconque, savoir, $\frac{m \cdot db \cdot da \cdot \sin^2 \omega}{\sin^2 \omega} ((D+a)^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{4} u \sin \theta)^2$, se réduit à celle des forces horizontales, qui est $= m \cdot dc \cdot da ((D+a)^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{4} u \sin \theta)^2$, en substituant seulement dc en place de $\frac{db \cdot \sin \omega}{\sin^2 \omega}$; & que réciproquement celle-ci peut être réduite à la première; il suffira, pour plus grande facilité, de trouver, pour le présent, les forces horizontales, qu'on réduira ensuite aux autres, en y substituant $\frac{db \cdot \sin \omega}{\sin^2 \omega}$ en place de dc , ou $\frac{b \sin \omega}{\sin^2 \omega}$, en place de c , attendu que la quantité $\frac{\sin \omega}{\sin^2 \omega}$ est constante, puisqu'il ne s'agit, pour le présent, que des surfaces planes.

PROPOSITION XX

(600.) Trouver la force horizontale qui agit sur une surface plane, de la forme d'un parallélogramme rectangle, & qui se meut dans un Fluide immobile, avec deux de ses côtés parallèles à l'horizon, dans le cas où l'on auroit $D=0$, & que l'extrémité supérieure de la surface sortiroit du Fluide d'une quantité égale, ou plus grande que $\frac{1}{4} u^2 \sin^2 \theta$.

La force horizontale qui agit sur la différencio-différencielle $KLMN$ de cette surface, est (577.) $= m \cdot dc \cdot da (a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{4} u \sin \theta)^2$, son intégrale à l'égard de c , savoir, $m \cdot da (a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{4} u \sin \theta)^2$, est l'expression de la force qui agit sur l'espace différenciel $FHIG$; & enfin l'intégrale de cette quantité par rapport à a , c'est-à-dire, $m c (\frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} \pm \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} u \sin \theta + \frac{1}{6} a u^2 \sin^2 \theta)$, est la force horizontale qui agit sur toute la surface, & il ne manque autre chose à cette expression, que la quantité constante qui doit compléter l'intégrale. Appellant donc H cette quantité constante qui

complétte l'intégrale, on aura la force horisontale qui agit sur toute la surface, $= mc(\frac{1}{2}a^2 \pm \frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}u \sin \theta + \frac{1}{2}au^2 \sin \theta^2) + H$.

Pour trouver la valeur de H , il faut considérer que, n'ayant point égard à la dévinnellation du Fluide, & faisant $a=0$, toute l'intégrale doit s'évanouir : donc, dans ce cas, $H=0$. Cela devoit effectivement arriver pour la surface choquante, s'il n'y avoit pas une partie de cette surface hors du Fluide; mais, comme nous supposons ici qu'elle est en partie hors du Fluide, la dénivellation doit nécessairement produire son effet. Nous devons donc ajouter cette quantité pour la surface choquante, & la retrancher, au contraire, pour la surface choquée. Il est donc question maintenant de trouver cette quantité. Pour cela, nous pouvons nous servir de l'intégrale ci-dessus, en faisant a^2 négatif pour les deux surfaces (595.), ce qui la réduit à $mc(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}u \sin \theta + \frac{1}{2}au^2 \sin \theta)$; quantité qui est $=H$. Substituant maintenant à la place de a toute la valeur de la dénivellation que nous avons trouvée $=\frac{1}{2}u^2 \sin \theta^2$, nous aurons la force qui provient de la dénivellation, ou $H=mc(\frac{\frac{1}{2}u^2 \sin \theta^2}{2.64^{\frac{1}{2}}} - \frac{u^{\frac{1}{2}} \sin \theta^{\frac{1}{2}}}{6.8.64} + \frac{u^{\frac{1}{2}} \sin \theta^{\frac{1}{2}}}{64^{\frac{1}{2}}}) = \frac{mc.u^{\frac{1}{2}} \sin \theta^{\frac{1}{2}}}{6.64^{\frac{1}{2}}}$; & par conséquent la force totale dont la surface entière éprouve l'action, est $= mc(\frac{1}{2}a^2 \pm \frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}u \sin \theta + \frac{1}{2}au^2 \sin \theta^2 \pm \frac{u^{\frac{1}{2}} \sin \theta^{\frac{1}{2}}}{6.64^{\frac{1}{2}}})$.

COROLLAIRE.

(601.) Comme la hauteur de la dénivellation est $=\frac{1}{2}u^2 \sin \theta^2$, si cette quantité est négligeable à l'égard de a , hauteur totale de la surface submergée dans le Fluide, on pourra, sans crainte d'erreur, négliger la dénivellation dans l'expression de la force, ou négliger tous les termes de la force, comme $\frac{u^{\frac{1}{2}} \sin \theta^{\frac{1}{2}}}{6.64^{\frac{1}{2}}}$, dans lesquels a ne se trouve pas.

PROPOSITION XXI.

(602.) Trouver la même force qui agit sur la surface choquante, lorsque cette surface aura une moindre hauteur hors du Fluide, que celle qu'acquiert la dénivellation.

Si le point A , extrémité de la surface, tombe entre P & F , le Fluide passera par-dessus la surface, & n'agira sur elle que dans la partie effective de la même surface qui est hors du Fluide, & dont, par supposition, la hauteur est moindre que $\frac{1}{2}u^2 \sin \theta^2$, hauteur totale de la dénivellation. Soit n la hauteur effective de la partie de la surface qui est hors du Fluide. En substituant cette valeur en place de a , dans l'expression de la force qui provient de la dénivellation, c'est-à-dire,

c'est-à-dire, dans $mc(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a^2 u \sin \theta + \frac{1}{24}au^2 \sin^2 \theta)$, il en résultera $mc(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n^2 u \sin \theta + \frac{1}{24}nu^2 \sin^2 \theta)$, pour l'expression de la même force dans le cas présent; par conséquent la force totale dont la surface entière éprouve l'action, sera = ...
 $mc(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^2 u \sin \theta + \frac{1}{24}au^2 \sin^2 \theta) + mc(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n^2 u \sin \theta + \frac{1}{24}nu^2 \sin^2 \theta)$.

PROPOSITION XXII.

(603.) Trouver, dans le même cas que ci-dessus, la force qui agit sur la surface, lorsque c'est le Fluide qui se meut.

Il faut observer que, dans ce cas, nous ne pouvons pas exclure de la formule la valeur de ω . L'expression de la force dont la différencio-différencielle éprouve l'action, est $= m.dc.da(u^2 \sin \omega \pm \frac{1}{2}u \sin \theta)^2$, & son intégrale $mc(\frac{1}{2}a^2 \sin \omega^2 \pm \frac{1}{2}a^2 u \sin \omega \sin \theta + \frac{1}{24}au^2 \sin^2 \theta)$ exprime celle dont toute la surface éprouve l'action, sans y comprendre la force qui résulte de toute la dénivellation. Pour cette dernière force, l'intégrale est $mc(\frac{1}{2}a^2 \sin \omega^2 - \frac{1}{6}a^2 u \sin \omega \sin \theta + \frac{1}{24}au^2 \sin^2 \theta)$, en substituant n en place de a , pour la surface choquante, on aura la force qui provient de la dénivellation $= mc(\frac{1}{2}n^2 \sin \omega^2 - \frac{1}{6}n^2 u \sin \omega \sin \theta + \frac{1}{24}nu^2 \sin^2 \theta)$, & celle dont toute la surface choquante éprouve l'action, sera en tout $= mc(\frac{1}{2}a^2 \sin \omega^2 + \frac{1}{6}a^2 u \sin \omega \sin \theta + \frac{1}{24}au^2 \sin^2 \theta) + ...$
 $mc(\frac{1}{2}n^2 \sin \omega^2 - \frac{1}{6}n^2 u \sin \omega \sin \theta + \frac{1}{24}nu^2 \sin^2 \theta)$. A l'égard de la surface choquée, on substituera dans l'intégrale, $\frac{1}{24}u^2 \sin^2 \theta$, en place de $a \sin \omega^2$, & la force totale pour cette surface, sera = ...
 $mc(\frac{1}{2}a \sin \omega^2 + \frac{1}{6}a^2 u \sin \theta + \frac{1}{24}au^2 \sin^2 \theta - \frac{u^4 \sin^4 \theta}{6.64})$.

COROLLAIRE I.

(604.) Si l'extrémité supérieure de la surface coïncide avec la superficie du Fluide; c'est-à-dire, si le point A tombe sur P , alors on aura $n=0$, & la force totale qui agit contre la surface choquante, se réduira à $mc(\frac{1}{2}a^2 \sin \omega^2 + \frac{1}{6}a^2 u \sin \omega \sin \theta + \frac{1}{24}au^2 \sin^2 \theta)$.

COROLLAIRE II.

(605.) Au contraire, si l'extrémité A de la surface est élevée au-dessus du Fluide d'une quantité égale, ou plus grande que $\frac{u^2 \sin^2 \theta}{6.4 \sin \omega^2}$,

* On trouve cette valeur, en faisant la quantité $a^2 \sin \omega^2 \pm \frac{1}{2}u \sin \theta$ égale à zéro, comme on a fait celle qui lui correspond dans l'Art. 594. Si l'on procède comme dans l'Art. 600, on trouve l'expression même de l'Auteur pour la force qui agit sur la surface choquée.

on aura $n = \frac{u^2 \sin^2 \theta}{64 \sin^2 \omega}$ *, & la force totale qui agit contre la surface choquante se réduira à $mc(\frac{1}{2}a^2 \sin \omega^2 + \frac{1}{2}u^2 \sin \omega \sin \theta + \frac{1}{64}au^2 \sin^2 \theta + \frac{u^4 \sin^4 \theta}{6.64 \sin^2 \omega})$.

S C O L I E.

(606.) L'intégrale $mc(\frac{1}{2}a^2 \sin \omega^2 + \frac{1}{2}u^2 \sin \omega \sin \theta + \frac{1}{64}au^2 \sin^2 \theta) + mc(\frac{1}{2}u^2 \sin \omega^2 - \frac{1}{2}u^2 \sin \omega \sin \theta + \frac{1}{64}nu^2 \sin^2 \theta)$, offre un cas assez remarquable, celui dans lequel le point H tombe en P , ou lorsque $a=0$: auquel cas la surface n'est, comme on voit, ou aucunement submergée dans le Fluide. Car l'intégrale se réduit alors à $mc(\frac{1}{2}u^2 \sin \omega^2 - \frac{1}{2}u^2 \sin \omega \sin \theta + \frac{1}{64}nu^2 \sin^2 \theta)$, qui est la valeur de la force qui agit sur la partie élevée PH ; mais, comme le Fluide n'a aucune prise sur la surface, il n'agit nullement sur elle, & par conséquent elle ne peut l'élever: donc, en ce cas, la quantité restante doit aussi s'évanouir, quoique la formule ne l'indique pas **.

PROPOSITION XXIII.

(607.) Trouver la force horisontale qui agit sur la surface choquée, ou sur la surface qui fuit le Fluide, dans le cas où son extrémité supérieure A tombe entre P & E , ou que D a quelque valeur moindre que $PE = \frac{u^2 \sin^2 \theta}{64 \sin^2 \omega}$.

Comme le Fluide ne parvient que jusqu'à E , en faisant $PE = D+a$, & substituant dans l'intégrale $\frac{u^2 \sin^2 \theta}{64 \sin^2 \omega}$ en place de $D+a$, elle doit se réduire à zéro. L'intégrale de la différentielle de l'Art. 589 est $mc(Da \sin \omega^2 + \frac{1}{2}a^2 \sin \omega^2 - \frac{1}{2}u(D+a) \sin \omega \sin \theta + \frac{1}{64}au^2 \sin^2 \theta) + H$. Substituant donc, dans cette formule, $\frac{u^2 \sin^2 \theta}{64 \sin^2 \omega}$ à la place de $D+a$, ou $\frac{u^2 \sin^2 \theta}{64 \sin^2 \omega} - D$, à la place de a , elle se réduit à $mc(-\frac{1}{2}D^2 \sin \omega^2 - \frac{1}{64}Du^2 \sin^2 \theta + \frac{u^4 \sin^4 \theta}{6.64 \sin^2 \omega}) + H = 0$, d'où l'on tire $H = mc(\frac{1}{2}D^2 \sin \omega^2 + \frac{1}{64}Du^2 \sin^2 \theta - \frac{u^4 \sin^4 \theta}{6.64 \sin^2 \omega})$, & l'intégrale complète

* Cette valeur de n est celle de a qu'on tire de l'équation $a^2 \sin \omega^2 \pm \frac{1}{2}u \sin \theta = 0$.

** Cette singularité ne doit nullement faire soupçonner l'exactitude de la formule; elle vient de la manière dont l'Auteur procède pour calculer la force dont il est question. En effet, il calcule d'abord la force, sans avoir égard à la dénivellation; & ensuite il y ajoute l'effet de cette dernière. Or il n'y a, de cette sorte, que la première partie de l'expression dont les termes soient des fonctions de a , & par conséquent il n'y a qu'elle qui doive éprouver quelque variation suivant les différentes valeurs qu'on suppose à a . Les termes de la seconde partie sont des fonctions de n ; il est évident que s'ils étoient aussi des fonctions de a , ou si l'on avoit pu comprendre l'effet de la dénivellation dans le calcul primitif, la disparité que l'Auteur fait remarquer n'auroit pas lieu. Au reste, on peut appliquer à ce cas une partie de ce qui est exposé, Art. 610.

sera $= mc \left(\frac{1}{2} (D+a)^2 \sin \omega^2 - \frac{1}{2} u (D+a)^{\frac{1}{2}} \sin \omega \cdot \sin \theta + \frac{1}{6} u^2 (D+a) \sin \theta^2 - \frac{u^4 \sin \theta^4}{6.64^2 \sin \omega^2} \right)$.

COROLLAIRE I.

(608.) Si l'on avoit $D=0$, ou si l'extrémité supérieure A de la surface tomboit en P , ou plus haut que P , la force, ou l'intégrale complete se réduiroit à $mc \left(\frac{1}{2} a^2 \sin \omega^2 - \frac{1}{6} u^2 \sin \omega \cdot \sin \theta + \frac{1}{6} a u^2 \sin \theta^2 - \frac{u^4 \sin \theta^4}{6.64^2 \sin \omega^2} \right)$.

COROLLAIRE II.

(609.) Si, au contraire, l'extrémité supérieure A de la surface tomboit en E , on auroit $D = \frac{u^2 \sin \theta^2}{64 \sin \omega^2}$ ce qui donne $a=0$ pour compléter l'intégrale, & l'intégrale complete devient $= \dots \dots mc \left(Da \sin \omega^2 + \frac{1}{2} a^2 \sin \omega^2 - \frac{1}{6} u \left((D+a)^{\frac{1}{2}} - D^{\frac{1}{2}} \right) \sin \omega \cdot \sin \theta + \frac{1}{6} a u^2 \sin \theta^2 \right)$.

S O L U T I O N.

(610.) Si le point H , ou l'extrémité inférieure de la surface, tombe en E , l'intégrale, ou la force qui agit contre la surface choquée, doit s'évanouir, & en effet elle s'évanouit *. Mais ce n'est pas la même chose, si le point H tombe entre E & P , ou en P ; dans ce cas, $D=0$, $a=0$, & la force, ou l'intégrale complete, se réduit à $-\frac{mc u^4 \sin \theta^4}{6.64^2 \sin \omega^2}$, tandis qu'elle devroit également s'évanouir, puisque le Fluide n'atteint pas la surface pour la choquer, lorsque sa partie submergée est moindre que la quantité CE . Ce résultat vient de ce qu'après avoir assigné la force qui agit sur toute la surface, en négligeant la dénivellation, on en a soustrait la force avec laquelle le Fluide cesse d'agir dans la cavité CEP . En effet, on voit que cela doit être ainsi, quand le point H tombe plus bas que le point E , ou quand il tombe sur le point E même; mais lorsqu'il tombe plus haut, ce n'est plus la même chose, attendu que la quantité qu'on soustrait est alors plus grande que celle qui exprime la force, sans avoir égard à la dénivellation. Au reste, comme la force qui agit contre la surface choquée, doit être égale à zéro, toutes les fois que le point H tombe en E , ou qu'il tombe plus haut: l'expression qu'on a donnée dans la Proposition, sert seulement pour le cas où ce point tombe en E , ou au-dessous, c'est-à-dire, lorsqu'on a $(D+a)^{\frac{1}{2}} = 0$ ou $> \frac{u \sin \theta}{8 \sin \omega}$.

PROPOSITION XXIV.

(611.) Trouver la force horizontale qui agit sur les mêmes surfaces, lorsque D a quelque valeur, ou que l'extrémité supérieure A est submergée dans le Fluide.

* On peut aisément s'en assurer, en faisant $D=0$, & $a = \frac{u^2 \sin \theta^2}{64 \sin \omega^2}$, dans l'intégrale complete, Arr. 607.

Dans cette supposition, l'intégrale doit se réduire à zéro, lorsque $a=0$, puisque le Fluide ne peut agir que jusqu'à l'extrémité supérieure de la surface à laquelle $a=0$. Or, la force dont la différencio-différentielle éprouve l'action, est (589.) = ...

$m \, dc \cdot da \left((D+a)^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{2} u \sin \theta \right)^{\frac{1}{2}}$, & son intégrale

$mc \left(Da \sin \omega^2 + \frac{1}{2} a^2 \sin \omega^2 \pm \frac{1}{2} u (D+a)^{\frac{1}{2}} \sin \omega \cdot \sin \theta + \frac{1}{8} au^2 \sin \theta^2 \right) + H$,

exprime celle qui agit sur toute la surface, H marquant la quantité constante qui doit compléter l'intégrale. Faisant maintenant $a=0$,

elle deviendra $= \pm \frac{1}{2} u L^{\frac{1}{2}} \sin \omega \cdot \sin \theta + H = 0$; ce qui donne

$H = \mp \frac{1}{2} u L^{\frac{1}{2}} \sin \omega \cdot \sin \theta$; & par conséquent l'expression complete de la force qui agit sur toute la surface, = ...

$mc \left(Da \sin \omega^2 + \frac{1}{2} a^2 \sin \omega^2 \pm \frac{1}{2} u \left((D+a)^{\frac{1}{2}} - L^{\frac{1}{2}} \right) \sin \omega \cdot \sin \theta + \frac{1}{8} au^2 \sin \theta^2 \right)$.

COROLLAIRE.

(612.) Si $D=0$, c'est-à-dire, si l'extrémité supérieure de la surface tombe en P , la force dont la surface choquante éprouvera l'action, deviendra $= mc \left(\frac{1}{2} a^2 \sin \omega^2 + \frac{1}{2} u a^2 \sin \omega \cdot \sin \theta + \frac{1}{8} au^2 \sin \theta^2 \right)$ comme on l'a déjà trouvée, Art. 604.

PROPOSITION XXV.

(613.) Réduire les expressions des forces horizontales trouvées ci-dessus, à exprimer celles qui agissent sur une surface plane, suivant une direction quelconque.

On a déjà dit (599.) qu'il ne falloit, pour cela, que substituer $\frac{b \sin \pi}{\sin \alpha}$ à la place de c ; cette substitution faite, on aura les expressions suivantes. La force qui agit sur les surfaces choquante, ou choquée, dans le cas où elles sont entièrement submergées dans le Fluide, sera (611.) = $\frac{mb \sin \pi}{\sin \alpha} \left(Da \sin \omega^2 + \frac{1}{2} a^2 \sin \omega^2 \pm \frac{1}{2} u \left((D+a)^{\frac{1}{2}} - D^{\frac{1}{2}} \right) \sin \omega \cdot \sin \theta + \frac{1}{8} au^2 \sin \theta^2 \right)$.

La force qui agit sur la surface choquante, lorsque son extrémité supérieure est élevée au-dessus de la superficie du Fluide, d'une quantité $\frac{n^2}{\sin \omega^2}$ moindre, que $\frac{1}{8} u^2 \sin \theta^2$, sera (603.) = ...

$\frac{mb \sin \pi}{\sin \alpha} \left(\frac{1}{2} a^2 \sin \omega^2 + \frac{1}{2} a^2 u \sin \omega \cdot \sin \theta + \frac{1}{8} au^2 \sin \theta^2 \right) + ...$
 $\frac{mbn \sin \pi}{\sin \alpha} \left(\frac{1}{2} n \sin \omega^2 - \frac{1}{8} n^2 u \sin \omega \cdot \sin \theta + \frac{1}{8} u^2 \sin \theta^2 \right)$; ou si n est égal, ou plus grand que $\frac{1}{8} u^2 \sin \theta^2$, la force deviendra (600 & 603.) = $\frac{mb \sin \pi}{\sin \alpha} \left(\frac{1}{2} a^2 \sin \omega^2 + \frac{1}{2} u \sin \omega \cdot \sin \theta + \frac{1}{8} au^2 \sin \theta^2 + \frac{u^4 \sin^4 \theta}{6.64 \sin \alpha^4} \right)$.

La force qui agit contre la surface choquée, lorsque son extrémité supérieure est au-dessous de la superficie du Fluide, D étant en même temps plus petit que $\frac{u^2 \sin \theta^2}{64 \sin \omega^2}$, sera (607.) = ...

$$\frac{mb \sin \pi}{\sin \omega} \left(\frac{1}{2} (D+a)^2 \sin \omega^2 \pm \frac{1}{2} u (D+a)^{\frac{1}{2}} \sin \omega \sin \theta + \frac{1}{64} u^2 (D+a) \sin \theta^2 - \frac{u^4 \sin \theta^4}{64 \sin \omega^2} \right).$$

Enfin la force qui agit sur l'une ou l'autre des deux surfaces choquante ou choquée, ayant $D=0$, & négligeant la dénivellation, sera (604 & 608.) = $\frac{mb \sin \pi}{\sin \omega} \left(\frac{1}{2} a^2 \sin \omega^2 \pm \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} u \sin \omega \sin \theta + \frac{1}{64} a u^2 \sin \theta^2 \right).$

PROPOSITION XXVI.

(614.) Réduire les expressions précédentes à des fonctions de e & de de

Ayant, par la construction & par la supposition, $\cos \pi : \sin \pi :: de : da$ (581.), on aura $da = \frac{\sin \pi de}{\cos \pi}$, & $a = \frac{e \sin \pi}{\cos \pi}$, parce que, dans ce cas, $\frac{\sin \pi}{\cos \pi}$ est une quantité constante. Substituant cette valeur de a dans les équations précédentes, on aura
 $\frac{mb \sin \pi}{\cos \pi} \left(De \sin \omega^2 + \frac{e^2 \sin \omega^2 \sin \pi}{2 \cos \pi} \pm \frac{u \sin \omega \sin \theta \cos \pi}{6 \sin \pi} \left(\left(D + \frac{e \sin \pi}{\cos \pi} \right)^{\frac{1}{2}} - D^{\frac{1}{2}} \right) + \frac{e u^2 \sin \theta^2}{64} \right).$
 pour la force qui agit sur les surfaces choquante ou choquée, lorsqu'elles sont entièrement submergées dans le Fluide, & à une profondeur plus grande que $\frac{u^2 \sin \theta^2}{64 \sin \omega^2}$.

La formule $\frac{mb \sin \pi}{\cos \pi} \left(\frac{e^2 \sin \omega^2 \sin \pi}{2 \cos \pi} + \frac{u \sin \omega \sin \theta \cos \pi}{6 \sin \pi} \left(\frac{e \sin \pi}{\cos \pi} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{64} e u^2 \sin \theta^2 \right) + \frac{mb \sin \pi}{\sin \omega} \left(\frac{1}{2} n^2 \sin \omega^2 - \frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}} u \sin \omega \sin \theta + \frac{1}{64} n u^2 \sin \theta^2 \right)$, exprimera la force qui agit sur la surface choquante, lorsque son extrémité supérieure est élevée au-dessus de la superficie du Fluide de la quantité $\frac{n^2}{\sin \omega^2}$.

La formule $\frac{mb \sin \pi}{\cos \pi} \left(De \sin \omega^2 + \frac{e^2 \sin \omega^2 \sin \pi}{2 \cos \pi} - \frac{u \sin \omega \sin \theta \cos \pi}{6 \sin \pi} \left(D + \frac{e \sin \pi}{\cos \pi} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{64} e u^2 \sin \theta^2 \right) + \frac{mb \sin \pi}{\sin \omega} \left(\frac{1}{2} D^2 \sin \omega^2 + \frac{1}{64} D u^2 \sin \theta^2 - \frac{u^4 \sin \theta^4}{64 \sin \omega^2} \right)$ exprimera la force qui agit sur la surface choquée, lorsqu'on a $D < \frac{u^2 \sin \theta^2}{64 \sin \omega^2}$.

Enfin la formule $\frac{mb \sin \pi}{\cos \pi} \left(\frac{e^2 \sin \omega^2 \sin \pi}{2 \cos \pi} \pm \frac{u \sin \omega \sin \theta \cos \pi}{6 \sin \pi} \left(\frac{e \sin \pi}{\cos \pi} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{64} e u^2 \sin \theta^2 \right)$ exprimera la force qui agit sur l'une ou l'autre des deux surfaces, ayant $D=0$, & négligeant la dénivellation.

PROPOSITION XXVII.

(615.) Réduire les expressions précédentes au cas où la surface plane est horizontale.

Dans ce cas, $\sin n = 0$, & $\cos n = 1$; mais avant de substituer ces valeurs dans les formules, il est nécessaire de développer la quantité $\left(D + \frac{e \sin n}{\cos n}\right)^{\frac{1}{2}}$, en la réduisant à la série $D^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2} e \sin n}{\cos n} + \frac{\frac{1}{8} e^2 \sin^2 n}{D^{\frac{3}{2}} \cos^2 n} - \&c.$

& de substituer aussi cette valeur.

Par ces substitutions, la première formule se réduit à
 $mbe \cdot \sin x (D \sin \omega \pm D^{\frac{1}{2}} u \sin \omega \cdot \sin \theta + \frac{1}{6} u^2 \sin^2 \theta) = \dots$
 $mbe \cdot \sin x (D^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{6} u \sin \theta)^2$. La seconde formule n'a pas lieu, parce que, dans ce cas, il ne peut y avoir une partie de la surface hors du Fluide; elle doit être toute entière au dedans du Fluide, ou toute entière au dehors. La même chose arrive à la troisième, & par la même raison. La quatrième se réduit à la première, qui, par conséquent, est l'unique.

PROPOSITION XXVIII.

(616.) *Trouver la force verticale qui agit sur la même surface plane, d'après les conditions supposées ci-dessus.*

Ce problème se résout par le problème général donné, Art 613, en substituant seulement $\cos n$ à la place de $\sin x$, parce que, dans ce cas, $\sin x = \cos n$ (573 & 580.); on aura donc

$\frac{mb \cos n}{\sin n} (Da \sin \omega + \frac{1}{2} a^2 \sin \omega \pm \frac{1}{6} u \sin \omega \cdot \sin \theta ((D+a)^{\frac{1}{2}} - D^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{6} au^2 \sin^2 \theta)$, pour l'expression de la force qui agit sur les surfaces choquante ou choquée, lorsqu'elles sont entièrement submergées dans le Fluide.

La formule $\frac{mb \cos n}{\sin n} (Da \sin \omega + \frac{1}{2} a^2 \sin \omega + \frac{1}{6} u \sin \omega \cdot \sin \theta (D+a)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} au^2 \sin^2 \theta) + \frac{mb \cos n}{\sin n} (\frac{1}{2} n^2 \sin \omega - \frac{1}{6} un^2 \sin \omega \cdot \sin \theta + \frac{1}{6} nu^2 \sin^2 \theta)$, exprimera la force qui agit sur la surface choquante, lorsque son extrémité supérieure est élevée au-dessus de la superficie du Fluide, d'une quantité $\frac{n^2}{\sin n}$.

La formule $\frac{mb \cos n}{\sin n} (Da \sin \omega + a^2 \sin \omega - \frac{1}{6} u \sin \omega \cdot \sin \theta (D+a)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} au^2 \sin^2 \theta) + \frac{mb \cos n}{\sin n} (\frac{1}{2} D^2 \sin \omega + \frac{1}{6} Du^2 \sin^2 \theta - \frac{u^4 \sin^4 \theta}{64 \sin^4 n})$, exprimera la force qui agit sur la surface choquée, lorsque $D < \frac{u^2 \sin^2 \theta}{64 \sin^4 n}$.

Enfin $\frac{mb \cos n}{\sin n} (\frac{1}{2} a^2 \sin \omega \pm \frac{1}{6} a^2 u \sin \omega \cdot \sin \theta + \frac{1}{6} au^2 \sin^2 \theta)$ est la formule qui exprime la force qui agit sur l'une quelconque des deux surfaces, ayant $D=0$, & négligeant la dénivellation.

PROPOSITION XXIX.

(617.) *Trouver les mêmes expressions en fonctions de e.*

Qu'on substitue (614.) la valeur de $a = \frac{e \sin \alpha}{\cos \alpha}$, & l'on aura

$mb (De \sin \omega^2 + \frac{e^2 \sin \alpha^2 \sin \alpha}{2 \cos \alpha} \pm \frac{u \sin \alpha \sin \alpha \cos \alpha}{6 \sin \alpha} (D + \frac{e \sin \alpha}{\cos \alpha})^2 - D^2) + \frac{1}{64} eu^2 \sin \theta^2$,
pour l'expression de la force qui agit sur les surfaces choquante ou
choquée, lorsqu'elles sont entièrement submergées dans le Fluide,
& à une profondeur plus grande que $\frac{u^2 \sin \theta^2}{64 \sin \alpha}$.

La formule $mb (\frac{e^2 \sin \alpha^2 \sin \alpha}{2 \cos \alpha} + \frac{u \sin \alpha \sin \alpha \cos \alpha}{6 \sin \alpha} (\frac{e \sin \alpha}{\cos \alpha})^2 + \frac{1}{64} eu^2 \sin \theta^2) +$
 $\frac{mb \cos \alpha}{\sin \alpha} (\frac{1}{2} n^2 \sin \omega^2 - \frac{1}{6} n^2 u \sin \omega \sin \theta + \frac{1}{24} n^2 \sin \theta^2)$ sera l'expression de la
force qui agit sur la surface choquante, lorsque son extrémité supé-
rieure est plus haute que la superficie du Fluide, de la quantité
 $\frac{u^2 \sin \theta^2}{64 n^2 \sin \alpha}$.

La formule $mb (De \sin \omega^2 + \frac{e^2 \sin \alpha^2 \sin \alpha}{2 \cos \alpha} - \frac{u \sin \alpha \sin \alpha \cos \alpha}{6 \cos \alpha} (D + \frac{e \sin \alpha}{\cos \alpha})^2 + \frac{1}{64} eu^2 \sin \theta^2) +$
 $\frac{mb \cos \alpha}{\sin \alpha} (\frac{1}{2} D \sin \omega^2 + \frac{1}{6} Du^2 \sin \theta - \frac{u^4 \sin \theta^4}{6.64 \sin \alpha})$ exprimera la force qui agit
sur la surface choquée, lorsqu'on a $D < \frac{u^2 \sin \theta^2}{64 \sin \alpha}$.

Enfin la formule $mb (\frac{e^2 \sin \alpha^2 \sin \alpha}{2 \cos \alpha} \pm \frac{u \sin \alpha \sin \alpha \cos \alpha}{6 \sin \alpha} (\frac{e \sin \alpha}{\cos \alpha})^2 + \frac{1}{64} eu^2 \sin \theta^2)$
exprimera la force qui agit sur l'une quelconque des deux surfaces,
ayant $D=0$, & négligeant la dénivellation.

COROLLAIRE I

(618) Si la surface étoit horizontale, l'expression de la force
verticale dont elle éprouveroit l'action, seroit (615.) = ...
 $mbe \cos \alpha (D^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2$; mais, dans ce cas, $\cos \alpha = 1$, la force
verticale sera donc $= mbe (D^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2$.

COROLLAIRE II

(619.) Si, outre ces conditions, c'est la surface, & non le
Fluide, qui se meut verticalement, on aura $\sin \omega = 1$, &
 $\sin \theta = 1$, & la force verticale qu'elle éprouvera, se réduira alors à
 $mbe (\sqrt{D} \pm \frac{1}{2} u)^2$. De plus, si la vitesse u est égale à celle qu'ac-
querroit le Fluide en tombant de la hauteur D , on auroit (52 & 564.)
 $u = 8 \sqrt{D}$, ou $\frac{1}{2} u = \sqrt{D}$, ce qui réduit la force qui agit sur la
surface, à $mbe (\sqrt{D} \pm \sqrt{D})^2$; c'est-à-dire que la force qui agira sur
la surface choquante, sera, en ce cas, $= 4 mbe D$, ou égale au
poids de quatre colonnes de Fluide, dont la base $= be$, & dont la
hauteur $= D$, qui est celle du Fluide au-dessus de la surface cho-

quante. La force qui agiroit sur la surface choquée, seroit, dans le même cas $= 0$; ce qui paroitra sensible, en considérant que le Fluide ne peut choquer la surface, sa vitesse étant, dans ce cas, égale à la sienne.

COROLLAIRE III.

(620.) Si c'étoit le Fluide qui se mût verticalement, la surface demeurant en repos, & ayant, comme auparavant, $\sin \alpha = 0$; on auroit $\sin \theta = 1$, & $\sin \alpha = 0$: par conséquent la force verticale qui agira sur la surface, se réduira à $\frac{1}{2} mbeu^2$. Si, de plus, la vitesse u étoit celle qu'acqueroit le Fluide, en tombant de la hauteur D , on auroit, comme ci-dessus, $\frac{1}{2} u = \sqrt{D}$, ou $\frac{1}{4} u^2 = D$, ce qui réduit la force à $mbeD$; c'est-à-dire qu'elle est égale au poids d'une simple colonne de Fluide, dont la base est be , & dont la hauteur $= D$. On voit donc que, si le Fluide tomboit verticalement, par l'action de sa propre gravité, d'une hauteur quelconque D , & choquoit une surface horizontale be , la force dont cette surface éprouveroit l'action, seroit égale au poids de la colonne de Fluide qui seroit au-dessus de la surface; c'est-à-dire, au poids d'une colonne du même Fluide dont la base seroit la surface choquée, & la hauteur celle de la chute du Fluide.

COROLLAIRE IV.

(621.) L'expression de la force différencio-différencielle $m.db.d((D+a)^{\frac{1}{2}} \sin \alpha \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)$, nous fait connoître que, si la quantité $D+a$ étoit constante; c'est-à-dire, si la surface plane étoit toujours horizontale, la force verticale totale, ou intégrale, seroit $= mbe((D+a)^{\frac{1}{2}} \sin \alpha + \frac{1}{2} u \sin \theta)$.

SCOLIE I.

(622.) On voit clairement ici combien il est différent que ce soit la surface qui se meuve, ou que ce soit le Fluide; dans le premier cas, la force qui agit sur la surface, est $4mbeD$, & dans le second, elle est seulement $mbeD$; c'est-à-dire que la première est quatre fois plus grande que la seconde. Cependant je ne connois aucun Auteur qui n'ait supposé ces deux cas comme étant absolument les mêmes; ou qui n'ait supposé que, dans l'un & l'autre cas, la force qui agit sur la surface, est toujours la même.

SCOLIE II.

(623.) Newton, dans les Corollaires 7, 8, 9 & 10 de la Proposition XXXVI

XXXVI, Section VII du Livre II de sa Philosophie naturelle, dit qu'une petite surface horizontale, comme celle que nous supposons, *dbde*, ou *be*, exposée à l'action d'un Fluide qui tombe librement par l'action de sa gravité, ne supporte seulement que le poids de la moitié de la colonne de Fluide, dont la base est *be*, & la hauteur *D*; ce qui n'est que la moitié de ce que nous avons trouvé. Il suppose, pour cela, que si *ACDBA* est un vase constamment plein d'un Fluide, & qui ait l'ouverture *EF* à son fond, le Fluide n'aura de mouvement que dans l'espace *AMEFNB*, qu'il appelle *Cataracte*, terminé par les deux surfaces courbes *AME*, *BNF*, le Fluide demeurant sans mouvement, ou comme un corps dur, dans les espaces *CAE* & *DBF*. Il suppose ensuite qu'on mette au milieu de l'ouverture *EF* la surface *PQ*, & il dit que le Fluide qui est au-dessus d'elle, & est contenu dans l'espace *PHQ*, restera pareillement sans mouvement, à cause qu'il se forme deux autres surfaces convexes *HQ*, *HP*, & que le Fluide se divise comme en deux cataractes. Il dit, de plus, que le poids que soutiendra la surface *PQ*, sera seulement celui du Fluide contenu dans l'espace *PHQ*, parce qu'il suppose que tout le Fluide contenu dans les espaces *AMEPH* & *HQFNB* se meut avec toute liberté, & sans agir sur les surfaces *HP*, *HQ*. Nous laissons au Lecteur à considérer s'il est possible que le Fluide tombe avec une vitesse connue sur la surface *HP*, sans agir sur elle, & sans lui faire supporter d'effort. Ceci seroit contre tous les principes reçus, & même contre ceux établis par ce sçavant Auteur. Selon notre théorie, la force verticale qui agit sur une différencio-différentielle de la surface même *HP*, est = ...
 $m.db.de((D+a)^{\frac{1}{2}}\sin\omega + \frac{1}{2}u\sin\theta)^2$, ou à cause que $\sin\omega = 0$, & que $\frac{1}{2}u = a^{\frac{1}{2}}$, elle est = $m.db.de.a\sin\theta^2$. D'où l'on voit que, dans le cas où l'on admettroit tout ce que suppose notre Auteur, non-seulement la surface *PQ* soutient le poids du Fluide *PHQ*, mais encore la force $m.fdb.de.a\sin\theta^2$, dans laquelle expression θ désigne l'angle que forme la verticale avec la courbe *HP*, & *a* la hauteur du Fluide au-dessus de l'orifice : de sorte qu'en supposant θ constant, ce poids est celui d'une colonne de Fluide, dont la base est *PQ*, & la hauteur celle du Fluide, multipliée par $\sin\theta^2$.

CHAPITRE IV.

De la force avec laquelle les Fluides agissent contre des surfaces quelconques, dans le cas du mouvement.

PROPOSITION XXX.

(624.) *T*ROUVER la force horizontale qui agit sur une surface quelconque, qui se meut dans un Fluide.

Ayant divisé la surface, par des plans horizontaux & verticaux, en petites surfaces quadrilateres sensiblement planes : si l'on cherche la force positive, ou négative, qui agit sur chacune de ces petites surfaces, en en prenant la somme, on aura la force totale. Cela posé, soit D la hauteur verticale comprise depuis la superficie du Fluide jusqu'à l'extrémité supérieure d'un des petits quadrilateres dont a exprime la hauteur ; d'après cela, on aura (600.)

$mc \cdot da \left((D + \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{4}u \sin \theta^{\frac{1}{2}} \right)^2$ pour l'expression de la force horizontale qui agit sur une différencielle de ce même petit quadrilatere ; & l'intégrale $mc \left(Da + \frac{1}{2}a^2 \pm \frac{1}{2}u \left((D + \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}} - D^{\frac{1}{2}} \right) \sin \theta + \frac{1}{4}au^2 \sin \theta^{\frac{1}{2}} \right)$, sera la force dont le quadrilatere entier éprouvera l'action, a marquant toute sa hauteur verticale. Substituant maintenant $D - \frac{1}{2}a$ pour D , afin que D marque la hauteur verticale de la superficie du Fluide au-dessus du centre du petit quadrilatere, l'expression de toute la force horizontale qui agit sur cette petite surface sera = ...

$mc \left(Da \pm \frac{1}{2}u \left((D + \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}} - (D - \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}} \right) \sin \theta + \frac{1}{4}au^2 \sin \theta^{\frac{1}{2}} \right)$: & celle qui agit sur la surface entière, qui est la somme de toutes ces petites surfaces, sera exprimée par

$$mfc \left(Da \pm \frac{1}{2}u \left((D + \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}} - (D - \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}} \right) \sin \theta + \frac{1}{4}au^2 \sin \theta^{\frac{1}{2}} \right).$$

COROLLAIRE I.

(625.) Dans l'une & l'autre dénivellation du Fluide, la force sera (595.) = $mfc \left(Da - \frac{1}{2}u \left((D + \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}} - (D - \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}} \right) \sin \theta + \frac{1}{4}au^2 \sin \theta^{\frac{1}{2}} \right)$.

COROLLAIRE II.

(626.) Réduisant en série la quantité $(D + \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}} - (D - \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}}$, on a $\frac{1}{2}D^{\frac{1}{2}}a \left(1 - \frac{a^2}{96D^2} - \frac{a^4}{2048D^4} - \&c. \right)$: donc, en substituant, on aura la force horizontale qui agit sur un des petits quadrilateres = ...

$$mc \left(Da \pm \frac{1}{2}D^{\frac{1}{2}}au \sin \theta \left(1 - \frac{a^2}{96D^2} - \frac{a^4}{2048D^4} - \&c. \right) + \frac{1}{4}au^2 \sin \theta^{\frac{1}{2}} \right).$$

COROLLAIRE III.

(627.) Si D étoit très-grand par rapport à a , ou si l'on pouvoit traiter a comme une différentielle par rapport à D , on pourroit négliger tous les termes de la série, excepté le premier, ce qui réduiroit la force qui agit sur un des petits quadrilatères quelconque, ou choquant, ou choqué, à
 $mc(Da \pm \frac{1}{2} D^{\frac{3}{2}} u \sin \theta + \frac{1}{6} a u^2 \sin^2 \theta) = mca(D^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2$.

COROLLAIRE IV.

(628.) Le cas dans lequel le rapport $\frac{a}{D}$ peut être le plus grand, est lorsqu'il s'agit des petits quadrilatères contigus à la superficie du Fluide. Comme D exprime la hauteur verticale de la superficie du Fluide au-dessus du centre du petit quadrilatère, on aura, en ce cas, $D = \frac{1}{2} a$. Substituant cette valeur dans la série, elle se réduit à $1 - \frac{1}{24} - \frac{1}{128} - \&c.$; d'où l'on voit que, même dans ce cas extrême, tous les termes de la série sont presque négligeables, excepté le premier.

COROLLAIRE V.

(629.) Comme dans ce cas extrême, où $D = \frac{1}{2} a$, la quantité $(D + \frac{1}{2} a)^{\frac{1}{2}} - (D - \frac{1}{2} a)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$, la force qui agit sur le petit quadrilatère est $= mc(\frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} u \sin \theta + \frac{1}{24} a u^2 \sin^2 \theta)$.

COROLLAIRE VI.

(630.) La série $\frac{1}{2} D^{\frac{1}{2}} a (1 - \frac{a^2}{96 D^2} - \frac{a^4}{2048 D^4} - \&c.)$ se réduira donc aussi, dans ce cas, à $\frac{1}{2} a \sqrt{\frac{1}{2}} a (1 - \frac{1}{24} - \frac{1}{128} - \&c.) = a^{\frac{3}{2}}$; ce qui donne $(1 - \frac{1}{24} - \frac{1}{128} - \&c.) = \frac{1}{2} \sqrt{2} = \sqrt{\frac{8}{9}}$; d'où l'on voit encore combien il s'en faut peu que la série ne se réduise à son premier terme, même dans ce cas extrême où les petits quadrilatères sont contigus à la superficie du Fluide.

COROLLAIRE VII.

(631.) Il suit de tout ce qu'on vient de dire, que a étant une différentielle par rapport à D , la série se réduit toujours au premier terme, même dans les petits quadrilatères contigus à la superficie du Fluide.

PROPOSITION XXXI.

(632.) Trouver la force horizontale qui agit sur la surface d'un corps formé par la révolution d'une ligne, droite ou courbe, autour d'un axe

PLANC. III.

horizontale, en supposant que ce corps se meuve dans un Fluide, suivant la direction de ce même axe, & parallèlement à l'horison.

Fig. 61.

Soit ACG une courbe qui, en tournant autour de l'axe horizontal AM , forme le corps $ADSM$, & supposons que ce corps se meuve dans la direction de l'axe AM , cet axe conservant toujours son parallélisme avec l'horison. Soit mené les deux plans horizontaux $STOPV$, $XYQNZ$, infiniment voisins, & les deux verticaux $BGOQW$, $MCPN$, qui formeront sur la surface du corps le quadrilatere différencio-différenciel $QOPN$, auquel on élèvera la perpendiculaire QE , & on tirera la ligne QB , qui sera égale à l'ordonnée $BG = y$. Soit mené de même la verticale QI , & l'horizontale QF parallèle à l'axe : cette ligne formera, avec le quadrilatere $QOPN$, un angle égal au complément de FQR , QR étant le prolongement de EQ : mais BEQ est égal à FQR ; donc l'angle que forme la direction QF du mouvement avec le quadrilatere différencio-différenciel $QOPN$, est égal au complément de BEQ , ou égal à l'angle EQB , dont le sinus se mesure par la raison de la sous-perpendiculaire BE à la perpendiculaire EQ . Ce sinus sera donc $\sin \theta = \frac{BE}{EQ}$. Mais, dans quelque courbe que ce soit, la sous-perpendiculaire est à la perpendiculaire, comme la différentielle de l'ordonnée est à la différentielle de la courbe * ; faisant donc $AB = x$, $BG = BQ = y$, $BI = c$, & $IQ = a$, on aura . . .

$\sin \theta = \frac{dy}{\sqrt{dy^2 + dx^2}}$, & $BQ = y = \sqrt{c^2 + a^2}$; ce qui donne, en supposant a constant, $dc = \frac{y dy}{y^2 - a^2}$. Ces valeurs étant mises dans l'expression

de la force horizontale $m \cdot dc \cdot da (V \sqrt{D + a \pm \frac{1}{2} u \sin \theta})^2$, on aura pour l'expression de la force horizontale, & suivant la direction de l'axe, qui agit sur un quadrilatere différencio-différenciel $QOPN$, de quelque sur-

face, plane ou courbe, que ce soit, la quantité $\frac{mdavdy}{y^2 - a^2} (V \sqrt{D + a \pm \frac{1}{2} u \sin \theta})^2$.

En intégrant cette expression à l'égard de y , on aura la force qui agit sur une zone, comme $VOQZ = mda (D + a) \int \frac{y dy}{y^2 - a^2} \pm \dots$
 $\pm mda \sqrt{D + a} \int \frac{y dy^2}{y^2 - a^2 \sqrt{dy^2 - dx^2}} + \frac{1}{6} m u^2 da \int \frac{y dy^3}{(dy^2 - dx^2) \sqrt{y^2 - a^2}}$. Enfin, en réintégrant par rapport à a , on aura la force qui agit sur une

PLANC. A.

Fig. 2.

* On voit cela facilement par les triangles semblables CLi , rii ; car ils donnent $CL : Li :: ri : ii$.

Donc $\frac{CL}{Li} = \frac{ri}{ii} = \sin \theta$.

surface comme $AGQZA = m \int da (D+a) \int \frac{y dy}{y^2 - a^2} \pm \dots \dots \dots$ PLANC. III.
 $\frac{1}{2} \mu u \int da \sqrt{D+a} \int \frac{y dy}{y^2 - a^2 \sqrt{dy^2 + dx^2}} + \frac{1}{2} \pi u \int da \int \frac{y dy}{(dy^2 + dx^2) \sqrt{y^2 - a^2}} + H.$

C O R O L L A I R E.

(633.) Si l'on suppose $x=0$, on réduit la surface à un plan circulaire, qui se meut horizontalement & perpendiculairement à sa surface; la force qui agit sur cette surface sera donc $\dots \dots \dots$
 $m \int da (V \sqrt{D+a \pm \frac{1}{2}u}) \int \frac{y dy}{y^2 - a^2} + H = m \int da (V \sqrt{D+a \pm \frac{1}{2}u}) \sqrt{y^2 + a^2} + H:$
 ou, en substituant r en place de y , & en place du rayon par la rotation duquel le plan circulaire est engendré, cette force se réduira enfin à $m \int da (V \sqrt{D+a \pm \frac{1}{2}u}) \sqrt{r^2 - a^2} + H.$

P R O P O S I T I O N XXXII.

(634) Trouver la force horizontale qui agit sur la surface d'un cylindre qui flotte sur un Fluide, & qui se meut horizontalement, suivant une direction perpendiculaire à son axe.

Soit le cylindre $BCQDE$, H -son axe, BE un diamètre horizontal, GI la superficie du Fluide, & CAL une verticale. La résistance qu'éprouve la différencielle horizontale en C , est (627.)
 $= mca (D^2 \pm \frac{1}{2}u \sin \theta)^2$; formule dans laquelle nous devons substituer da pour a , & a à la place de $D=CA$; & comme $\sin \theta$ =le sinus de l'angle LCH , en faisant $AL=f$, on aura $\sin \theta = \frac{\sqrt{R^2 - (a+f)^2}}{R}$, R exprimant le rayon du cylindre. Cette substitution faite, la force qui agit sur la différencielle devient $= mca (a^{\frac{1}{2}} + \frac{u \sqrt{R^2 - (a+f)^2}}{8R})^2$; & celle qui agit sur toute la surface $GCQ = m \int da (a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u \sqrt{R^2 - (a+f)^2}}{8R})^2$.

P R O P O S I T I O N XXXIII.

(635.) Trouver la force verticale qui agit sur une surface quelconque qui se meut dans un Fluide immobile.

Soit divisé la surface du corps qui est dans le Fluide, en de petits quadrilatères sensiblement plans, par des lignes horizontales & verticales. Cherchant ensuite la force verticale, positive ou négative, qui agit sur chacun de ces petits quadrilatères, en prenant la somme de ces forces, on aura la force totale. Ce procédé a déjà été expliqué (624.), pour trouver la force horizontale. On se rappellera que l'expression

de la force horizontale se réduit à celle d'une autre force, suivant une direction quelconque, en substituant seulement (599.) $\frac{b \sin \pi}{\sin \pi}$ en place de c ; mais, comme, dans le cas présent, le mouvement se fait verticalement *, on a (616.) $\sin \pi = \cos \pi$; c'est donc $\frac{b \cos \pi}{\sin \pi}$ que nous devons substituer dans la formule de l'Art. 624, en place de c , pour avoir l'expression de la force verticale qui agit sur une surface quelconque, & cette expression sera

$$mc \sin \frac{b \cos \pi}{\sin \pi} (Da \pm \frac{1}{2} u (D \pm \frac{1}{2} a)^{\frac{1}{2}} - (D - \frac{1}{2} a)^{\frac{1}{2}} \sin \theta + \frac{1}{6} a u^2 \sin \theta^2).$$

COROLLAIRE.

(636.) On aura de la même manière la force verticale (626.) qui agit sur un quadrilatère infiniment petit, choquant ou choqué, = $\frac{mb \cos \pi}{\sin \pi} (Da \pm \frac{1}{2} D^{\frac{1}{2}} a u \sin \theta (1 - \frac{a^2}{96 D^2} - \frac{a^4}{2048 L^4} - \&c.) + \frac{1}{6} a u^2 \sin \theta^2)$; mais, comme (614.) $\frac{a \cos \pi}{\sin \pi} = e$, ou $a = \frac{e \sin \pi}{\cos \pi}$ en substituant cette valeur, la même force verticale sera aussi = ...

$$mbe (D \pm \frac{1}{2} D^{\frac{1}{2}} u \sin \theta (1 - \frac{e^2 \sin \pi^2}{96 D^2 \cos^2 \pi} - \frac{e^4 \sin^4 \pi}{2048 L^4 \cos^4 \pi} - \&c.) + \frac{1}{6} u^2 \sin \theta^2);$$

ou enfin en négligeant tous les termes de cette série, excepté le premier, à cause qu'ils sont fort petits, elle sera encore = ...

$$mbe (D^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} u \sin \theta)^2.$$

PROPOSITION XXXIV.

(637.) Trouver la force verticale qui agit sur la surface d'un cylindre qui flotte sur un fluide, & qui se meut horizontalement dans une direction perpendiculaire à son axe.

FIG. 61.

La force horizontale qui agit sur une différencielle horizontale du cylindre en C , a été trouvée (634.) = $mc \cdot da (a^2 \pm \frac{u \sqrt{R^2 - (a \pm f)^2}}{8R})^2$, R exprimant le rayon du cylindre, a étant = CA , distance verticale de la différencielle à la superficie du fluide, & AL étant = f . Donc la force verticale sera (635.) = $\frac{m \cdot db \cdot da \cdot \cos \pi}{\sin \pi} (a^2 \pm \frac{u \sqrt{R^2 - (a \pm f)^2}}{8R})^2$. Substituant dans cette formule la valeur de $\frac{\cos \pi}{\sin \pi} = \frac{CL}{LH} = \frac{a+f}{\sqrt{R^2 - (a+f)^2}}$

* Cette expression nous paroît inexacte; il faut dire: « mais comme dans le cas présent, il s'agit de la résistance verticale, &c. » C'est sûrement ce que l'Auteur entend; car, si le mouvement se faisoit verticalement, il faudroit faire $\sin \theta = \cos \pi$ (Art. 585.).

la force verticale qui agit sur la surface GCQ, sera = ...
 $mb \int \frac{da (a \pm f)}{\sqrt{R^2 - (a \pm f)^2}} \left(a^2 \pm \frac{u \sqrt{R^2 - (a \pm f)^2}}{8R} \right)^2$, & la force totale qui agit sur
 GQI, sera = $2mb \left(\int \frac{(a \pm f) da}{\sqrt{R^2 - (a \pm f)^2}} + \int (a \pm f) u^2 da \sqrt{\frac{R^2 - (a \pm f)^2}{64 R^2}} \right)$.

CHAPITRE V.

Des résistances horizontales qu'éprouvent les Corps, lorsqu'ils se meuvent dans les Fluides : ou, au contraire, lorsque ce sont les Fluides qui se meuvent, & choquent les corps.

PROPOSITION XXXV.

(638.) **T**ROUVER la résistance horizontale qu'éprouve un corps mu dans un Fluide.

Les résistances qu'éprouvent les corps mus dans les Fluides, ne sont autre chose que la résultante des forces qui agissent sur leurs surfaces suivant une direction déterminée; ou celle qui résulte de la somme de toutes les forces, suivant cette même direction, en prenant positivement celles qui sont positives, & négativement celles qui sont négatives. Qu'on détermine donc, par les règles établies dans le Chapitre précédent, les forces horizontales qui agissent sur les surfaces qui terminent le corps, & qu'on en prenne la somme, on aura la valeur de la résistance.

PROPOSITION XXXVI.

(639.) Trouver la résistance horizontale qu'éprouve un parallépipède rectangle qui flotte sur un Fluide, ayant deux de ses côtés parallèles à l'horison, le parallépipède se mouvant, & non le Fluide, suivant une direction parallèle à ses deux autres côtés, dans le cas où l'on auroit $a > 0$, ou = $\frac{u^2 \sin^2 \theta}{64 \sin^2 \omega}$.

La force qui agit sur la surface choquante, est (602.) = ...
 $mc \left(\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{6} a^2 u \sin \theta + \frac{1}{6} a u^2 \sin^2 \theta \right) + mc \left(\frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{6} n^2 u \sin \theta + \frac{1}{6} n u^2 \sin^2 \theta \right)$.
 Celle qui agit sur la surface choquée, à cause que $\sin \omega = 1$, est (609.)
 $= mc \left(\frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{6} a^2 u \sin \theta + \frac{1}{6} a u^2 \sin^2 \theta - \frac{u^4 \sin^4 \theta}{64 \sin^2 \omega} \right)$. Quant à la force qui agit sur les deux surfaces latérales, elle est zéro, parce qu'étant parallèles à la direction du mouvement, on a $c = 0$. La force qui

agit sur la base ou surface inférieure, est aussi zéro, à cause qu'on a pour cette surface $da = 0$. Il n'y a donc pas d'autres forces, suivant la direction dont il s'agit, que celles qu'éprouvent les deux surfaces choquante & choquée. Cette dernière est négative, parce qu'elle agit dans une direction contraire à la première; par conséquent la résistance horizontale qu'éprouvera le parallépipède sera = ...

$$mc \left(\frac{1}{3} a^2 u \sin \theta + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} u^2 \sin \theta + \frac{1}{6} n u^2 \sin \theta + \frac{u^4 \sin^4 \theta}{6.64^2} \right).$$

COROLLAIRE I.

(640.) Si le parallépipède, flottant, comme on le suppose, avoit une hauteur suffisante hors du Fluide, de manière que le Fluide ne pût passer par-dessus; ou si sa hauteur étoit égale, ou plus grande que $\frac{u^2 \sin^2 \theta}{64}$, n seroit alors $= \frac{u^2 \sin^2 \theta}{64}$, & la résistance se réduiroit à

$$mc \left(\frac{1}{3} a^2 u \sin \theta + \frac{u^4 \sin^4 \theta}{3.64^2} \right) = \frac{1}{3} mc u \sin \theta \left(a^2 + \frac{u^3 \sin^3 \theta}{64^2} \right).$$

COROLLAIRE II.

(641.) Si, au contraire, le parallépipède n'avoit aucune hauteur au-dessus du Fluide, de façon que sa surface supérieure fut de niveau avec celle du Fluide, alors $n = 0$, & la résistance se réduiroit à

$$mc \left(\frac{1}{3} a^2 u \sin \theta + \frac{u^4 \sin^4 \theta}{6.64^2} \right) = \frac{1}{3} mc u \sin \theta \left(a^2 + \frac{u^3 \sin^3 \theta}{2.64^2} \right).$$

COROLLAIRE III.

(642.) En négligeant la dénivellation du Fluide, on doit négliger tous les termes où a ne se trouve pas (601.) : donc la résistance qu'éprouve le parallépipède, en négligeant la dénivellation du Fluide, sera $= \frac{1}{3} mca^2 u \sin \theta$.

COROLLAIRE IV.

(643.) Pour pouvoir négliger la dénivellation du Fluide, il suffit seulement que la profondeur a , à laquelle la surface inférieure du parallépipède est submergée dans le Fluide, soit très-grande à l'égard de $\frac{1}{64} u^2 \sin^2 \theta$. Le parallépipède étant donc très-grand, ou la profondeur à laquelle il s'enfonce dans le Fluide, étant très-grande à l'égard de la vitesse $u \sin \theta$, on pourra négliger la dénivellation; & la fonction qui exprimera la résistance se réduira à une seule quantité, qui sera comme les simples vitesses u .

SCOLIE.

(644.) Nous avons établi dans cette théorie, que la force avec laquelle

quelle le Fluide agit contre une différencio-différencielle de superficie, est proportionnelle à $(8 \sqrt{a \pm u \sin \theta})^2$; & le principe qui nous y a conduit est que nous avons trouvé la vitesse avec laquelle le Fluide jailliroit, par la même différencio-différencielle, s'il avoit un libre passage, $= 8 \sqrt{a \pm u \sin \theta}$. Quelque solide que paroisse ce fondement, on pourroit cependant observer qu'il seroit peut-être également solide de supposer le poids que doit soutenir la différencio-différencielle, le même que celui de la colonne agissante du Fluide qui est au-dessus d'elle, laquelle a pour hauteur $a \pm \frac{1}{4} u^2 \sin \theta^2$, le dernier terme $\frac{1}{4} u^2 \sin \theta^2$ exprimant la hauteur de l'intumescence, ou la profondeur de la cavité. Si l'on fait cette supposition, le poids que supportera la différencielle de la surface choquante, ou choquée, du parallépipède sera $= \dots \dots mc \cdot la (a \pm \frac{1}{4} u^2 \sin \theta^2)$, quantité dont l'intégrale est $mc (\frac{1}{2} a^2 \pm \frac{1}{2} a u^2 \sin \theta^2 + H)$, ou $mc (\frac{1}{2} a^2 \pm \frac{1}{2} a u^2 \sin \theta^2 + \frac{u^4 \sin^4 \theta}{2.64})$; car H devient $= \frac{u^4 \sin^4 \theta}{2.64}$, en faisant $a = \mp \frac{1}{4} u^2 \sin \theta^2$ (600.). Ainsi cette intégrale exprimeroit le poids que supporte l'une quelconque des deux surfaces, choquante ou choquée, du parallépipède, & par conséquent la résistance qui résulte des deux seroit $= \frac{1}{2} mca u^2 \sin \theta^2$; quantité qui, comme on le verra ci-après, Chap. VII, doit se réduire à la moitié $\frac{1}{4} mca u^2 \sin \theta^2$, lorsque le parallépipède se réduit à un plan. Cette détermination est tellement conforme à l'opinion généralement reçue, &, ce qui est plus, aux expériences rapportées par M. Mariotte, dans le troisieme Discours de la seconde Partie de son Traité du mouvement des Eaux, qu'elle auroit très-bien pu être d'un poids égal pour nous, ou peut-être même suffiroit-elle pour nous faire abandonner notre théorie, si la quantité d'expériences qui la justifient, non seulement de l'espece de celles qu'a faites M. Mariotte, mais encore toutes celles que nous avons pu employer à cette vérification, comme on le verra par la suite de ce Traité, ne lui avoient donné le plus grand crédit. Nous n'exposerons, en ce moment, que celles qui contredisent absolument les expériences de M. Mariotte.

Cet Auteur, dans la Regle V du Discours cité, donne deux expériences qu'il a faites, en exposant perpendiculairement au courant de la Seine, une petite planche d'un demi-pied en quarré, en se servant pour cela d'un instrument dont il donne la description. Il dit qu'avec un courant dont la vitesse étoit de 3 pieds $\frac{1}{4}$ par seconde, la planche soutint un poids de 3 livres $\frac{1}{2}$. La surface de la planche, réduite en mesure Anglaise, est de $\frac{16^2}{4.15^2}$ *, & la vitesse du

* L'Auteur prend ici le rapport de 15 à 16 pour celui du pied anglais au pied français, ce qui

courant est de $\frac{1}{11}$ pieds. Pour comparer maintenant cette expérience avec la formule $\frac{1}{64} mca^2 \sin \theta^2$, observons qu'on a $m = 1000$ onces, qui est le poids d'un pied cubique d'eau; $ca = \frac{1}{4} \cdot \frac{16^2}{15^2}$; $\sin \theta = 1$; & $u = \frac{12}{15}$. On aura donc, suivant la formule, le poids que devoit supporter la planche $= \frac{1}{64} \cdot 1000 \cdot \frac{16^2}{4 \cdot 15^2} \cdot \frac{12^2}{15^2} = \frac{21632}{405} = 53$ onces $\frac{1}{2}$, ou 3 liv. 5 onces $\frac{1}{2}$, ce qui n'est que de 6 onces $\frac{1}{2}$ de moins que ce que dit avoir trouvé M. Mariotte. Dans la seconde expérience il dit que la planche soutint un poids de 9 onces, la vitesse du courant étant de 1 pied $\frac{1}{2}$ par seconde. Suivant la formule, le poids doit être égal à $\frac{1}{64} \cdot 1000 \cdot \frac{16^2}{4 \cdot 15^2} \cdot \frac{16}{9} = 8$ onces; quantité qui est seulement moindre d'une once que celle que donne l'Auteur; & l'on ne peut regarder ces différences comme bien sensibles, dans des expériences de cette nature. Mais on va voir combien ces expériences, que l'Auteur regarde comme si exactes, s'éloignent de celles que j'ai pratiquées moi-même pour m'assurer de leur exactitude. Une planche, de la forme d'un parallélogramme rectangle, d'un pied de large, exposée perpendiculairement à l'action d'un courant dont la vitesse étoit de 2 pieds par seconde, a supporté un poids de 25 livres $\frac{1}{2}$, étant submergée d'un pied juste dans le Fluide. Suivant l'opinion généralement reçue, ce poids auroit dû être de $\frac{1}{64} \cdot 1000 \cdot 4 = 62$ onces $\frac{1}{2}$, ou 3 livres 14 onces $\frac{1}{2}$, quantité bien éloignée de celle qu'a donné l'expérience. La même planche a supporté un poids de 26 livres $\frac{1}{2}$, exposée à un courant de $\frac{1}{2}$ pieds de vitesse par seconde, & étant submergée de 2 pieds juste dans le Fluide; suivant l'opinion générale, elle auroit dû supporter un poids de $\frac{1}{64} \cdot 1000 \cdot 2 \cdot \frac{16}{9} = 56$ onces, ou de 3 livres $\frac{1}{2}$; quantité qui est encore extrêmement éloignée de celle qu'a donné l'expérience. Ce qu'il y a de plus remarquable, & ce qui doit, comme semble, faire rejeter absolument l'opinion généralement reçue, c'est que, d'après elle, le second poids auroit dû être moindre que le premier, & au contraire, il a été trouvé de 10 livres $\frac{1}{2}$ plus grand, ce qui est le triple du poids total 3 livres $\frac{1}{2}$ qu'on a cru jusqu'ici qu'elle devoit supporter. Au contraire, notre formule est $(640.)$ $\frac{1}{2} m c \cdot u \sin \theta \left(a^{\frac{1}{2}} + \frac{u^2 \sin \theta}{64 \cdot 64} \right)$, qui, à cause que les vitesses sont petites, & que $\sin \theta = 1$, se réduit à $\frac{1}{2} mca^2 u$; quantité dont il ne faut prendre que la moitié $\frac{1}{4} mca^2 u$, pour les raisons qu'on exposera ci-

est très-proche de la vérité, & est suffisant pour son objet. Voyez, pour plus d'exactitude la note de l'Art. 51.

après (731.). Le poids que devoit supporter la planche dans la première expérience, sera donc $= \frac{1}{2} \cdot 1000.2 = 333$ onces, ou 20 liv. $\frac{1}{2}$, poids qui est seulement de 5 liv. plus fort que celui qu'a donné l'expérience; différence, au reste, qui doit aussi avoir lieu, par ce qui a été exposé, Art. 596. Dans la seconde expérience, le poids qu'auroit dû supporter la planche, devoit être $= \frac{1}{2} \cdot 1000(2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{4} = 628$ onces, ou 39 liv. $\frac{1}{2}$, poids qui est de 13 l. plus grand que l'expérience ne l'a donné; & cet excès devoit effectivement avoir lieu, comme on vient de le dire.

Pour appercevoir & se convaincre de l'accord de l'expérience avec la théorie que nous avons donnée, il n'y a qu'à considérer la raison de 2 à $(2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{4}$, ou celle de 15 à 28, qui lui est à-peu-près égale, dans laquelle doivent être, suivant cette théorie, les deux poids supportés: car elle s'éloigne très-peu de la raison des poids 15 $\frac{1}{2}$ & 26 $\frac{1}{2}$, que l'expérience a donnés. Suivant l'opinion commune, cette raison devoit être celle de 4 à $\frac{2 \cdot 16}{9}$, ou celle de 9 à 8, qui est la raison des produits des surfaces choquées par les quarrés des vitesses; raison qui, comme on voit, est excessivement éloignée de celle de 15 $\frac{1}{2}$ à 26 $\frac{1}{2}$, qui a été fournie par l'expérience: car, comme on l'a dit, cette raison devoit être de plus grande égalité, tandis qu'elle est de moindre.

Les deux expériences donnent, à peu de différence, la mesure absolue de la résistance moindre d'un tiers que celle qui résulte de la théorie, comme on vient de le voir, & comme nous devons nous y attendre, d'après ce qui a été dit dans l'Art. 596: en sorte que, pour avoir la mesure juste & absolue de cette résistance, nous devons prendre les deux tiers de ce qui résulte de la théorie.

PROPOSITION XXXVII.

(645.) Trouver la résistance horizontale qu'éprouve le même parallépipède rectangle, se mouvant, comme on l'a supposé dans la proposition précédente, dans le cas où l'on auroit $a =$, ou $< \frac{u^2 \sin^2 \theta}{64}$.

Nous avons dit, Art. 610. que, dans ce cas, la surface postérieure n'étoit soumise à l'action d'aucune force; ainsi la résistance se réduira à la force qui agit sur la surface antérieure, & dont l'expression est $= mc(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{8}a^2 u \sin \theta + \frac{1}{64}au^2 \sin^2 \theta) + mc(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{8}n^2 u \sin \theta + \frac{1}{64}nu^2 \sin^2 \theta)$.

COROLLAIRE I.

(646.) Si le parallépipède étoit assez élevé au-dessus de la superficie du Fluide pour que celui-ci ne pût passer par-dessus, ou que sa hauteur fût égale, ou plus grande que $\frac{u^2 \sin^2 \theta}{64}$, alors on auroit $n = \frac{1}{2}u^2 \sin^2 \theta$,

& la résistance se réduiroit à $mc(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^2 u \sin \theta + \frac{1}{6}au^2 \sin \theta^2 + \frac{u^4 \sin^4 \theta}{6.64^2})$.

COROLLAIRE. II.

(647.) Si, au contraire, le parallélipède n'avoit aucune hauteur au-dessus du Fluide; c'est-à-dire, s'il étoit entièrement submergé; alors on auroit $n=0$, & la résistance se réduiroit à $mc(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^2 u \sin \theta + \frac{1}{6}au^2 \sin \theta^2)$; la même que celle qui a lieu lorsqu'on néglige la dénivellation du Fluide.

PROPOSITION XXXVIII.

(648.) Trouver la résistance horizontale qu'éprouvera le même parallélipède rectangle, en se mouvant, comme il a été dit ci-dessus; & dans le cas où il seroit entièrement submergé dans le Fluide, ayant $D < \frac{u^2 \sin^2 \theta}{64}$, & $D+a=$, ou $> \frac{u^2 \sin^2 \theta}{64}$.

La force qui agira sur la surface choquante, sera (611.) = $mc(Da + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}u \sin \theta((D+a)^2 - D^2) + \frac{1}{6}au^2 \sin \theta^2)$; & celle qui agira sur la surface choquée, sera (607.) = ...
 $mc(\frac{1}{2}(D+a)^2 - \frac{1}{2}u \sin \theta(D+a)^2 + \frac{1}{6}u^2 \sin \theta^2(D+a) - \frac{u^4 \sin^4 \theta}{6.64^2})$. Soustrayant cette dernière force de la première, & réduisant, la résistance deviendra = $\frac{1}{3}mcu \sin \theta(D+a)^2 - mc(\frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{2}D^2 u \sin \theta + \frac{1}{6}Du^2 \sin \theta^2 - \frac{u^4 \sin^4 \theta}{6.64^2})$.

COROLLAIRE.

(649.) Si $D=0$, la résistance se réduira, comme on l'a dit (641.), à $\frac{1}{3}mcu \sin \theta(a^2 + \frac{u^2 \sin^2 \theta}{2.64^2})$.

PROPOSITION XXXIX.

(650.) Trouver la résistance horizontale qu'éprouvera le même parallélipède rectangle, en supposant toujours qu'il se meuve comme il a été dit ci-dessus; & dans le cas où il seroit entièrement submergé dans le Fluide, ayant $D < \frac{u^2 \sin^2 \theta}{64}$, & $D+a=$, ou $< \frac{u^2 \sin^2 \theta}{64}$.

Dans ce cas, la surface postérieure n'éprouve aucune action (610.), & la résistance se réduit à la force qui agit sur la surface antérieure, laquelle est (611.) = $mc(Da + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}u \sin \theta((D+a)^2 - D^2) + \frac{1}{6}au^2 \sin \theta^2)$.

COROLLAIRE.

(641.) Si l'on avoit $D=0$, & par conséquent $n=0$, la résistance se réduiroit à $mc(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^2 u \sin \theta + \frac{1}{6}au^2 \sin \theta^2)$; la même qu'en négligeant la dénivellation du Fluide.

PROPOSITION XL.

(652.) Trouver la résistance horizontale qu'éprouvera le même parallépipède rectangle, en supposant qu'il se meuve toujours d'après les mêmes conditions, & dans le cas où il seroit entièrement submergé dans le fluide, ayant $D=$, ou $> \frac{1}{4}u^2 \sin^2 \theta$.

La force qui agira sur la surface choquante, sera (611.) $= \dots mc \left(Da + \frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{2}u \sin \theta \left((D+a)^{\frac{1}{2}} - D^{\frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{4}au^2 \sin \theta \right)$; & celle qui agira sur la surface choquée, sera $= \dots m \left(Da + \frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{2}u \sin \theta \left((D+a)^{\frac{1}{2}} - D^{\frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{4}au^2 \sin \theta \right)$. Soustrayant cette dernière expression de la première, & réduisant, on aura la résistance $= \frac{1}{2}mcu \sin \theta \left((D+a)^{\frac{1}{2}} - D^{\frac{1}{2}} \right)$.

COROLLAIRE I.

(653.) Réduisant $(D+a)^{\frac{1}{2}}$ en série, cette résistance sera $= \frac{1}{2}mcD^{\frac{1}{2}}u \sin \theta \left(1 + \frac{a}{4D} - \frac{a^2}{24D^2} + \text{Sc.} \right)$.

COROLLAIRE II.

(654.) Si D étoit très-grand à l'égard de a ; c'est-à-dire, si le parallépipède étoit submergé à une profondeur très-grande, de sorte que sa hauteur a fût très-petite à l'égard de la profondeur D , on pourroit négliger tous les termes de la série, excepté le premier, & la résistance deviendrait $= \frac{1}{2}mcD^{\frac{1}{2}}u \sin \theta$.

COROLLAIRE III.

(655.) Comme, pour compléter l'intégrale, tant de la force qui agit sur la surface choquante, que de celle qui agit sur la surface choquée, dans le cas où le parallépipède est entièrement submergé dans le fluide, & où l'on a $D=$, ou $> \frac{1}{4}u^2 \sin^2 \theta$, on doit supposer $a=0$; on peut, si l'on veut, sommer, ou soustraire, d'abord les forces des différentielles, & trouver ainsi leur résistance, laquelle étant ensuite intégrée d'après la supposition que $a=0$, donnera la résistance qu'éprouve le parallépipède. La force qui agit sur la différentielle choquante, est (589.), après avoir intégré à l'égard de $c=mc.da \left((D+a)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}u \sin \theta \right)$, & celle qui agit sur la surface choquée est $= mc.da \left((D+a)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}u \sin \theta \right)$. Soustrayant cette dernière de la première, on aura la résistance qui provient de ces deux différen-

PLANC. III.

cielles $= \frac{1}{2} mc \cdot da \cdot u \sin \theta (D+a)^{\frac{1}{2}}$; & en intégrant, on aura la résistance qu'éprouve le parallépipède $= \frac{1}{2} mc \cdot u \sin \theta (D+a)^{\frac{1}{2}} + H$. Supposant maintenant $a=0$, il vient $\frac{1}{2} mc \cdot D^{\frac{1}{2}} u \sin \theta + H = 0$; ce qui donne $H = -\frac{1}{2} mc \cdot D^{\frac{1}{2}} u \sin \theta$: par conséquent l'intégrale complète, ou la résistance qu'éprouve le parallépipède sera $= \dots \dots \dots -\frac{1}{2} mc \cdot u \sin \theta ((D+a)^{\frac{1}{2}} - D^{\frac{1}{2}})$, comme ci-dessus (652.).

COROLLAIRE IV.

(656.) Toutes les fois que, pour compléter les intégrales, tant de la surface choquante que de la surface choquée, nous devrions supposer $a=0$, comme dans le cas où l'on a $D=$, ou $> \frac{1}{4} u^2 \sin^2 \theta$; ou, ce qui revient au même, dans le cas où l'on peut négliger la déviation du fluide, à cause que $\frac{1}{4} u^2 \sin^2 \theta$ seroit très-petit par rapport à a , on pourra, dans tous ces cas, chercher premièrement la résistance des différencielles, d'où l'on tirera, en intégrant, celle de tout le corps.

COROLLAIRE V.

(657.) Comme la longueur du parallépipède suivant la direction du mouvement, ne se trouve dans aucune des expressions des résistances horizontales qu'éprouve le parallépipède, dans les différents cas que nous avons examinés, il s'ensuit qu'il éprouvera toujours la même résistance horizontale, quelle que soit sa longueur dans cette même direction.

COROLLAIRE VI.

(658.) Comme, en faisant cette dimension égale à zéro, le parallépipède devient un plan quadrilatère qui se meut avec deux de ses côtés parallèles à l'horizon; il s'ensuit que toutes les expressions des résistances horizontales que nous avons trouvées pour le parallépipède, conviennent aussi pour ce quadrilatère.

PROPOSITION XLI.

FIG. 63.

(659.) Trouver la résistance horizontale qu'éprouve un parallépipède rectangle AB qui flotte sur un fluide, ayant ses côtés AF & KB inclinés à l'horizon, en supposant que ce soit le parallépipède, & non le fluide, qui se meuve horizontalement, & suivant une direction parallèle à AI ; dans le cas où a est $=$, ou $> \frac{1}{4} u^2 \sin^2 \theta$, & que le fluide ne passe point par-dessus.

Soit ED la superficie du fluide, AJ une droite qui lui est parallèle, & CH , EG , FQ , des verticales; faisant $EG=a$, on aura

la force qui agit sur la surface choquante $DJ = \dots$
 $mc(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^2 u \sin \theta + \frac{1}{6}a^2 u^2 \sin^2 \theta + \frac{u^4 \sin^4 \theta}{6.64^2})$. Si l'on appelle Δ l'angle
 que forme la base AF avec l'horizontale AJ , le sinus de l'angle que
 forme cette horizontale avec CJ sera $= \cos \Delta$, & cette valeur sub-
 stituée, dans l'expression ci-dessus, en place de $\sin \theta$, la changera en
 $mc(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^2 u \cos \Delta + \frac{1}{6}a^2 u^2 \cos^2 \Delta + \frac{u^4 \cos^4 \Delta}{6.64^2})$. Par la même raison, la
 force qui agit sur la surface choquée EA est $= \dots$
 $mc(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a^2 u \cos \Delta + \frac{1}{6}a^2 u^2 \cos^2 \Delta - \frac{u^4 \cos^4 \Delta}{6.64^2})$. Ainsi la résistance qui
 provient de ces deux forces, sera $= \frac{1}{3} mc.u \cos \Delta (a^2 + \frac{u^3 \cos^3 \Delta}{64^2})$.

La force qui agit sur JF est $= \dots$
 $mc(Da + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}u \sin \theta (D + a^{\frac{1}{2}} - D^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{6}a^2 u^2 \sin^2 \theta)$. Or, en appel-
 lant e la base AF , FI sera $= e \sin \Delta$. En substituant donc $\cos \Delta$
 pour $\sin \theta$, $e \sin \Delta$ pour a , & a pour D , cette force sera $= \dots$
 $mc(ae \sin \Delta + \frac{1}{2}e^2 \sin^2 \Delta + \frac{1}{6}u \cos \Delta ((a + e \sin \Delta)^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}})) + \frac{mcu^2 e}{64} \sin \Delta \cos \Delta$.
 On aura, par la même raison, celle qui agit sur la base $AF =$
 $mc(ae \sin \Delta + \frac{1}{2}e^2 \sin^2 \Delta - \frac{1}{6}u \sin \Delta ((a + e \sin \Delta)^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}})) + \frac{mcu^2 e}{64} \sin \Delta$.
 Ainsi la résistance qui provient des forces qui agissent sur les deux
 côtés JF , AF , sera $= \dots$
 $mc(\frac{1}{3}u(\cos \Delta + \sin \Delta)((a + e \sin \Delta)^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{6}u^2 e \sin \Delta (\cos \Delta^2 - \sin \Delta^2))$,
 & celle qu'éprouvera tout le parallépipède, sera $= \dots$
 $mc(\frac{1}{2}a^2 u \cos \Delta + \frac{u^4 \cos^4 \Delta}{3.64^2} + \frac{1}{6}u(\cos \Delta + \sin \Delta)((a + e \sin \Delta)^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}})) +$
 $\frac{mcu^2 e}{64} \sin \Delta (\cos \Delta^2 - \sin \Delta^2)$.

COROLLAIRE I.

(660.) Réduisant $(a + e \sin \Delta)^{\frac{1}{2}}$ en série, substituant & réduisant,
 la résistance qu'éprouvera le parallépipède sera encore $= \dots$
 $mc(\frac{1}{3}a^2 u \cos \Delta + \frac{u^4 \cos^4 \Delta}{3.64^2} + \frac{1}{6}u^2 e \sin \Delta (\cos \Delta^2 - \sin \Delta^2)) + \dots$
 $\frac{1}{2}mca^2 u \sin \Delta (\cos \Delta + \sin \Delta)(1 + \frac{e \sin \Delta}{4a} - \frac{e^2 \sin^2 \Delta}{24a^2} + \&c.)$.

COROLLAIRE II.

(661.) Dans le cas où l'on négligeroit la dénivellation, il fau-
 droit supprimer (601.) toutes les quantités dans lesquelles a ne se

* On voit que, dans le cas de la Figure, la base ne choque point le Fluide, mais, au contraire,
 qu'elle en est choquée; c'est ce qui fait que le terme $\frac{1}{2} u \sin \Delta \&c.$ a le signe -.

PLANC. III.

trouve point, ou la quantité $e \sin \Delta$, qui en a fait l'office : donc, pour ce cas, la résistance sera = ...
 $mc (\frac{1}{2} a^{\frac{3}{2}} u \cos \Delta + \frac{1}{2} u^2 e \sin \Delta (\cos \Delta^2 - \sin \Delta^2)) + ...$
 $\frac{1}{2} mca^{\frac{3}{2}} u \sin \Delta (\cos \Delta + \sin \Delta) (1 + \frac{e \sin \Delta}{4} - \frac{e^2 \sin \Delta^2}{24 u^2} + \&c.).$

COROLLAIRE III.

(662.) Si l'on suppose que u & Δ sont infiniment petits, on pourra négliger tous les termes dans lesquels ces grandeurs sont élevées à quelque puissance au-dessus de la première, & la résistance deviendra, dans ce cas, = $mc (\frac{1}{2} a^{\frac{3}{2}} u + a^{\frac{1}{2}} u \sin \Delta) = mca^{\frac{1}{2}} u (\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} \sin \Delta).$

PROPOSITION XLII.

(663.) Trouver la résistance horizontale qu'éprouve un cylindre qui flotte sur un Fluide, & qui se meut horizontalement suivant une direction perpendiculaire à son axe.

Fig. 61.

La force horizontale qui agit sur la surface GCQ , ou IDQ du cylindre BQE , a été trouvée (634.) = $mc \int da (a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u \sqrt{R^2 - (a \pm f)^2}}{8R})^2$, R exprimant le rayon du cylindre, $a = CA$ la profondeur verticale à laquelle une différencielle horizontale en C est abaissée au-dessous de la superficie GI du Fluide, & f étant = AL . Soustrayant donc la force qui agit sur la surface choquée IDQ , de celle qui agit sur la surface choquante GCQ , on aura la résistance qu'éprouve le cylindre = $\frac{mc u}{2R} \int a^{\frac{1}{2}} da \sqrt{R^2 - (a \pm f)^2}$.

S C O L I E.

(664.) On peut trouver, par une autre méthode particulière, la résistance exacte qu'éprouvent une sphere, un cylindre, ou tout autre corps formé par la révolution d'une ligne droite, ou courbe, autour d'un axe horizontal, dans la direction duquel on suppose que se fait le mouvement du corps, lorsque ces corps sont tellement submergés dans le Fluide, que a peut être négligée par rapport à D . Dans ce cas, on peut exprimer par cda une zone verticale du même corps, c désignant la circonférence entière de la même zone, & da la différencielle de l'ordonnée*. La formule $mc \cdot da (\sqrt{D + a \pm \frac{1}{2} u \sin \theta})^2$, se réduira à $mc du (\sqrt{D \pm \frac{1}{2} u \frac{da}{\sqrt{D^2 + d^2}}})^2$, en supposant x l'abscisse,

* On remarquera que ce n'est point la zone verticale même du corps que l'Auteur représente par cda , mais sa projection orthographique sur le plan vertical perpendiculaire à l'axe, ou à

& la résistance deviendra $= \frac{\frac{1}{2}mcu da \sqrt{D}}{\sqrt{da^2 + dx^2}}$; ou, si nous supposons que c exprime la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon est l'unité; nous n'aurons qu'à substituer $2ca$ pour c seul, & la résistance deviendra $= \frac{mcu da^2 \sqrt{D}}{\sqrt{da^2 + dx^2}}$. Dans la sphere, on a $\frac{da}{\sqrt{da^2 + dx^2}} = -\frac{x}{r}$, r étant son rayon, & $ada = -x dx$: donc $\frac{ada^2}{\sqrt{da^2 + dx^2}} = \frac{x^2 dx}{r}$, dont l'intégrale est $\frac{x^3}{3r}$; ou, en faisant $x=r$, on aura $\frac{1}{3}r^2 \cdot mcu \sqrt{D}$ pour la résistance qu'éprouve toute la sphere. Dans le cylindre on a $\frac{da}{\sqrt{da^2 + dx^2}} = 1$. Donc $\frac{ada^2}{\sqrt{da^2 + dx^2}} = ada$; quantité dont l'intégrale est $\frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}r^2$, & la résistance sera $= \frac{1}{2}r^2 \cdot mcu \sqrt{D}$. On voit donc que la résistance de la sphere est les deux tiers de celle du cylindre de même diamètre. Si nous mettons $\frac{1}{2}a$ en place de r , a étant le diamètre de la sphere, ou du cylindre, leurs résistances seront $\frac{1}{4}a^2 mcu \sqrt{D}$, & $\frac{1}{2}a^2 mcu \sqrt{D}$.

PROPOSITION XLIII.

(665.) Trouver la résistance horizontale qu'éprouve un corps quelconque, qui se meut dans un fluide immobile.

On divisera la surface du corps en de très-petits quadrilateres, comme on l'a dit, Art. 624, & on cherchera la force positive, ou négative, qui agit sur chacune de ces petites surfaces; prenant ensuite la somme de toutes ces forces, on aura la résistance qu'éprouve tout le corps. Autrement, on peut prendre la force qui agit sur une petite surface choquante d'un quadrilatere, & l'ajouter avec celle qui agit sur la petite surface choquée qui lui correspond, ou qui est dans la même direction; & l'on aura la résistance qui provient de

la direction du mouvement. Il est évident, d'après l'Art. 555, que c'est aussi cette projection qui entre dans l'expression de la résistance, & qu'on doit prendre pour ada . On peut d'ailleurs s'en convaincre, en remarquant que, puisqu'on suppose le corps tellement submergé dans le fluide, qu'on puisse négliger a à l'égard de D , tous les points de la circonférence de la zone peuvent être considérés comme à égale distance de la superficie du fluide. Ainsi la résistance que cette zone éprouve est la même que celle qu'elle éprouveroit étant développée, & réduite à une différencielle de surface plane, dont la hauteur seroit égale à celle de la zone, & dont la base seroit égale à sa circonférence; cette différencielle étant d'ailleurs enfoncée à la même profondeur dans le fluide, étant supposée se mouvoir dans la même direction que le corps, & l'angle qu'elle forme avec

cette direction étant $= \theta = \frac{dx}{\sqrt{da^2 + dx^2}}$, ou $= -\frac{x}{r}$, s'il s'agit d'une sphere (632). Cette quantité devient = l'unité, s'il s'agit d'un cylindre: car, pour ce dernier corps, la résistance se réduit à celle des bases, & alors θ est de 90 degrés; par conséquent $\sin \theta = 1$.

TOME I.

M m

ces deux petits quadrilateres. Ajoutant donc cette résistance avec toutes celles qui résultent des autres quadrilateres, il est clair qu'on aura la résistance totale.

COROLLAIRE I.

(666.) Si θ exprime l'angle que forme la direction horizontale avec le petit quadrilatere choquant, & $\odot$ celui que forme cette même direction avec le quadrilatere choqué correspondant, ou qui est dans la même direction que le premier, on aura
 $mc(Da + \frac{1}{2}u \sin \theta)((D + \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}} - (D - \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{6}u^2a \sin \theta^2$ pour la force qui agit sur le premier quadrilatere, &
 $mc(Da - \frac{1}{2}u \sin \odot)((D + \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}} - (D - \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{6}u^2a \sin \odot^2$ pour celle qui agit sur le second. Soustrayant celle-ci de la premiere, il reste $\frac{1}{6}mcu(\sin \theta + \sin \odot)((D + \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}} - (D - \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{6}mcu^2a(\sin \theta^2 - \sin \odot^2)$; c'est l'expression de la résistance qu'éprouve le corps, & qui provient de l'action du Fluide sur ces deux petits quadrilateres correspondants, ou qui se trouvent dans la même ligne horizontale, parallele à la direction.

COROLLAIRE II.

(667.) La même résistance qu'éprouvent deux petits quadrilateres correspondants quelconques, sera encore exprimée par
 $\pm \frac{1}{6}mcau D^{\frac{1}{2}}(\sin \theta + \sin \odot)(1 - \frac{a^2}{96D^2} - \frac{a^4}{2048D^4} - \&c.) + \frac{mcau^2}{64}(\sin \theta^2 - \sin \odot^2)$

COROLLAIRE III.

(668.) Si D étoit très-grand par rapport à a , cette expression se réduiroit à $mc(\pm \frac{1}{2}D^{\frac{1}{2}}u(\sin \theta + \sin \odot) + \frac{1}{6}au^2(\sin \theta^2 - \sin \odot^2))$.

COROLLAIRE IV.

(669.) Si la partie antérieure du corps étoit égale & semblable

* On voit que la premiere partie de cette expression suit la raison des simples vitesses, & la seconde celle de leurs quarrés; les quantités θ , $\odot$, a , D & c demeurant les mêmes. Cette seconde partie est positive, lorsque $\sin \theta$ est plus grand que $\sin \odot$, c'est-à-dire, lorsque la partie antérieure, ou choquante, du corps est plus aiguë que la partie postérieure, ou choquée; & elle sera négative, si l'on a $\theta < \odot$, ou si la partie antérieure du corps est moins aiguë que la partie postérieure. Ce cas a lieu le plus généralement dans les Vaisseaux, & est aussi le plus convenable dans la pratique; comme on le verra par la suite. Ainsi, on se rappellera que la partie de la résistance qui suit la raison du quarré des vitesses, est négative.

à la partie postérieure, nous aurions généralement $\theta = \odot$, pour les petits quadrilatères correspondants; & l'expression de leurs résistances se réduiroit par conséquent à $\frac{1}{2}mcu \sin \theta ((D + \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}} - (D - \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}})$, ou à $\frac{1}{2}mcu D^{\frac{1}{2}} a \sin \theta (1 - \frac{a^2}{96D^3} - \frac{a^4}{2048D^5} - \&c.)$; expression qui, comme on voit, suit la raison des simples vitesses.

COROLLAIRE. V.

(670.) Si a étoit très-petit par rapport à D , cette expression deviendrait $= \frac{1}{2}mcu D^{\frac{1}{2}} a \sin \theta$.

S C O L I E.

(671.) Pour tenir compte de la dénivellation du Fluide, on calculera les forces qui agissent sur les petits quadrilatères antérieurs, ou choquants, auxquels parvient l'élevation, ou l'intumescence, du même Fluide. On calculera de même celles que ne doivent point éprouver les quadrilatères postérieurs, ou choqués, à cause du creux, ou de la cavité, qui se forme à la partie postérieure, comme on l'a dit, Art. 594. Les unes & les autres doivent s'ajouter à la résistance déterminée ci-dessus: les premières s'ajoutent, parce qu'elles agissent effectivement contre la direction du mouvement; & les secondes, parce qu'ayant été soustraites dans le calcul précédent, il faut les ajouter de nouveau: les premières sont $mc(Da - \frac{1}{2}u \sin \theta ((D + \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}} - (D - \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{6}u^2 a \sin \theta^2)$, & les secondes $mc(Da - \frac{1}{2}u \sin \odot ((D + \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}} - (D - \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{6}u^2 a \sin \odot^2)$.

COROLLAIRE. VI.

(672.) Les dénivellations n'étant pas excessives, on peut supposer que tous les petits quadrilatères qui se trouvent sur la même verticale, sont choqués par le Fluide sous le même angle θ , en supposant celui-ci tenir un milieu, entre tous les angles formés par les petites surfaces, avec la direction du mouvement. Dans ce cas, en réduisant l'expression de la force qui agit sur un des petits quadrilatères à $mcda(a - \frac{1}{2}ua^{\frac{1}{2}} \sin \theta + \frac{1}{6}u^2 \sin \theta^2)$, l'intégrale $mc(\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}ua^{\frac{1}{2}} \sin \theta + \frac{1}{6}u^2 a \sin \theta^2)$, exprimera la force qui agit sur tous ceux qui sont sur une même verticale. Faisant ensuite, dans cette expression, $a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}u \sin \theta$, cette quantité se réduit à $\frac{mcu^4 \sin^4 \theta}{6.64^{\frac{1}{2}}}$, & par

conséquent la résistance horisontale qui résulte de la dénivellation sera $= \frac{mu^4 \sin^4 \theta}{6.64^2}$.

COROLLAIRE VII.

(673.) La résistance horisontale qui provient de la dénivellation, sera donc généralement, dans cette supposition, comme la quatrième puissance de la vitesse.

COROLLAIRE VIII.

(674.) La résistance horisontale qui agit sur un corps quelconque, sera donc aussi, en général, comme trois quantités; une qui est comme les simples vitesses, l'autre comme leurs quarrés, & la troisième comme leurs quatrièmes puissances.

CHAPITRE VI.

Dés Résistances verticales qu'éprouvent les corps, lorsqu'ils se meuvent dans des Fluides; ou au contraire, lorsque ce sont les Fluides qui se meuvent contre les corps qui sont en repos.

PROPOSITION XLIV.

(675.) **T**ROUVER la résistance verticale qu'éprouve un parallépipède rectangle, lorsqu'il se trouve entièrement submergé dans le Fluide, en supposant que dans son mouvement il conserve toujours deux côtés parallèles à l'horison, & que le côté supérieur soit abaissé au-dessous de la superficie du Fluide, à une profondeur égale ou plus grande que $\frac{u^2 \sin^2 \theta}{64 \sin^4 \theta}$.

La force qu'éprouveront les deux côtés verticaux devient zéro, parce qu'on a pour eux $\cos \theta = 0$, ce qui rend l'expression de l'Art. 616 $\frac{mb \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} (Da \sin \omega^2 + \frac{1}{2} a^2 \sin \omega^2 \pm \frac{1}{2} \sin \omega \cdot \sin \theta ((D+a)^2 - D^2) + \frac{1}{2} au^2 \sin^2 \theta) = 0$.

La force qui agit sur les deux côtés horisontaux est (618.) $= mbe (D^2 \sin^2 \omega \pm \frac{1}{2} u \sin^2 \theta)^2$; expression dans laquelle be marque l'aire, ou la surface des côtés, & D la distance verticale du côté à la superficie du Fluide. Comme les deux côtés horisontaux du parallépipède sont à des profondeurs différentes, la valeur de D n'est pas

la même pour les deux; supposons que D soit la profondeur à laquelle est submergé le côté supérieur, & $D+a$ celle à laquelle est submergé l'inférieur, a marquant ainsi la hauteur du parallélipède; nous aurons $mbe((D+a)^{\frac{1}{2}}\sin\omega \pm \frac{1}{2}u\sin\theta)^2$, pour la force qui agit sur le côté inférieur; & $mbe(D^{\frac{1}{2}}\sin\omega \pm \frac{1}{2}u\sin\theta)^2$ pour celle qui agit sur le supérieur. Soustrayant l'une de ces expressions de l'autre, la différence $mbe(\pm a\sin\omega^2 + \frac{1}{2}u((D+a)^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}})\sin\omega\sin\theta)$ exprimera la résistance verticale qu'éprouve le parallélipède; le signe $+$ ayant lieu dans le cas où il se mouvra de haut en bas, & le signe $-$ dans celui où il se mouvra vers le haut.

COROLLAIRE I.

(676.) Si c'est le parallélipède qui se meut, & non le fluide, on aura $\sin\omega = 1$, & la résistance se réduira à
 $mbe(\pm a + \frac{1}{2}u((D+a)^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}})\sin\theta)$.

COROLLAIRE II.

(677.) Si, outre cette condition, on avoit $a = 0$, ou si le parallélipède se réduisoit à un plan horizontal, la résistance verticale qu'éprouveroit ce plan, deviendrait $= \frac{1}{2}mbeu D^{\frac{1}{2}}\sin\theta$.

COROLLAIRE III.

(678.) La même chose arrivera, si D est très-grand à l'égard de a , de sorte qu'on puisse négliger cette quantité sans erreur sensible, comme il arrive dans les corps qui tombent dans l'air, près de la surface de la terre.

COROLLAIRE IV.

(679.) Si le mouvement est vertical, on aura $\sin\theta = 1$, & la résistance se réduira à $mbe(\pm a + \frac{1}{2}u((D+a)^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}}))$.

COROLLAIRE V.

(680.) Si le mouvement est horizontal, on aura $\sin\theta = 0$: alors la résistance verticale sera $= mbea$; quantité qui exprime le poids d'un volume de fluide égal à celui du parallélipède.

COROLLAIRE VI.

(681.) La même chose arrivera encore, si le parallélipède ne

se meut point, ou si l'on a $u=0$; car la résistance se réduit également à $mbea$.

COROLLAIRE VII.

(682.) La résistance sera $=0$, si, le mouvement se faisant vers le haut, on a $u = \frac{4a \sin \omega}{((D+a)^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}}) \sin \theta}$; & elle sera négative, si l'on a $u < \frac{4a \sin \omega}{((D+a)^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}}) \sin \theta}$. Dans le cas où c'est le parallépipède qui se meut, & non le Fluide; la résistance sera $=0$, si l'on a $u = \frac{4a}{((D+a)^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}}) \sin \theta}$; & elle sera négative, si $u < \frac{4a}{((D+a)^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}}) \sin \theta}$.

COROLLAIRE VIII.

(683.) Si c'est le Fluide qui se meut, & non le parallépipède, on aura $\sin \theta = \cos \omega$; & la résistance verticale se réduira à $mbe (\pm a \sin \omega + \frac{1}{2} u ((D+a)^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}}) \sin \omega \cos \omega)$. On remarquera cependant que cette expression n'est légitime que lorsque la vitesse u est la même pour les deux surfaces supérieure & inférieure.

COROLLAIRE IX.

(684.) Comme ce cas exige que le parallépipède soit entièrement submergé dans le Fluide, comme on l'a supposé dans l'énoncé de la Proposition, il est essentiel de remarquer que la formule ne peut s'étendre que jusqu'au cas dans lequel on a $D^{\frac{1}{2}} \sin \omega - \frac{1}{2} u \sin \theta = 0$, lorsque le mouvement se fait de haut en bas; ou jusqu'à celui où l'on a $(D+a)^{\frac{1}{2}} \sin \omega - \frac{1}{2} u \sin \theta = 0$, lorsque le mouvement se fait vers le haut. Dans le premier cas, la résistance sera $= \dots \dots mbe (a \sin \omega + \frac{1}{2} u (\frac{u^2 \sin^2 \theta}{64 \sin \omega^2} + a)^{\frac{1}{2}} + \frac{u \sin \theta}{8 \sin \omega}) \sin \omega \cdot \sin \theta$; & dans le second, elle sera $= mbe (-a \sin \omega + \frac{1}{2} u (\frac{u^2 \sin^2 \theta}{64 \sin \omega^2} - a)^{\frac{1}{2}} + \frac{u \sin \theta}{8 \sin \omega}) \sin \omega \cdot \sin \theta$; c'est-à-dire qu'en renfermant les deux cas dans une seule formule, la résistance sera $= mbe (\pm a \sin \omega + \frac{1}{2} u (\frac{u^2 \sin^2 \theta}{64 \sin \omega^2} \pm a)^{\frac{1}{2}} + \frac{u \sin \theta}{8 \sin \omega}) \sin \omega \cdot \sin \theta$.

COROLLAIRE X.

(685.) Si l'on suppose que le parallépipède se réduise à un plan, afin d'avoir la même vitesse pour l'une & l'autre surface, ce qui donne $u=0$, la résistance sera $= \frac{1}{2} mbe u (\frac{u \sin \theta}{4 \sin \omega}) \sin \omega \cdot \sin \theta = \frac{1}{8} mbe u^2 \sin \theta^2$.

PROPOSITION XLV.

(686.) Trouver la résistance qu'éprouvera le même parallépipède rectangle qui se meut, comme il a été dit dans la Proposition précédente, lorsque sa surface supérieure est hors du Fluide.

Dans ce cas, la résistance est égale à la force qui agit sur la surface inférieure, laquelle force $= mbc(u^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2$, a marquant la hauteur verticale, dont le parallépipède est enfoncé dans le Fluide.

COROLLAIRE I.

(687.) Si c'est le parallépipède qui se meut, & non le Fluide, on aura $\sin \omega = 1$, & la résistance deviendra $= mbc(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2$.

COROLLAIRE II.

(688.) Si, de plus, le mouvement se fait verticalement, alors $\sin \theta = 1$, & la résistance devient $= mbc(u^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2} u)^2$.

COROLLAIRE III.

(689.) Si, dans le cas présent, la vitesse u étoit celle que pourroit acquérir le Fluide en tombant de la hauteur a , alors $\sqrt{a} = \frac{1}{2} u$: donc la résistance sera $= mbc(\frac{1}{2} u \pm \frac{1}{2} u)^2 = \frac{1}{4} mbcu^2 (1 \pm 1)^2$; ou $mbc(\sqrt{a} \pm \sqrt{a})^2 = mbea(1 \pm 1)^2$; c'est-à-dire que lorsque le mouvement se fait de haut en bas, la résistance est $= 4mbea$; & dans le cas où il se fait vers le haut, elle est $= 0$.

COROLLAIRE IV.

(690.) Si le parallépipède ne se meut pas du tout, alors $u = 0$, & la résistance devient $= mbea$.

COROLLAIRE V.

(691.) Si le mouvement est horizontal, alors $\sin \theta = 0$, & la résistance devient pareillement $= mbea$.

COROLLAIRE VI.

(692.) Si c'est le Fluide qui se meut, & non le parallépipède, on aura $\sin \theta = \cos \omega$; par conséquent la résistance se réduira à $mbc(a^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{2} u \cos \omega)^2$.

COROLLAIRE VII.

(693.) Si, de plus, on avoit $\sin \omega = 0$, ou si le Fluide se mouvoit verticalement, la résistance seroit $= \frac{1}{6} mbu^2 e$; ou $= mbea$; à cause que $\frac{1}{6} u^2 = a$.

CHAPITRE VII.

De la quantité dont les dénivellations du Fluide, causées par quelques surfaces, altèrent la force, & par conséquent les résistances qu'éprouvent d'autres surfaces.

PROPOSITION XLVI.

(694.) *LA dénivellation d'un Fluide qui provient de l'action d'une surface quelconque, s'étend tout autour de cette surface, en formant une parabole égale & semblable.*

Fig. 64.

Soit PF la dénivellation qui provient du mouvement d'une surface; CD étant la superficie du Fluide, & FD la parabole qui le termine: il faut nécessairement qu'il se forme une parabole CF égale & semblable à la première, de l'autre côté de PF . Car c'est de l'élévation FP , & de la gravité qu'elle communique à toutes les particules du Fluide, que se forme la parabole FD ; & les particules en FC devant acquies une gravité égale, il doit se former une autre parabole FC égale & semblable à la première. On peut faire le même raisonnement pour tout le tour de la dénivellation PF : donc il doit se former une semblable parabole tout autour de cette dénivellation.

COROLLAIRE I.

(695.) Cette règle est générale, pour une surface quelconque, choquante ou choquée, verticale, inclinée, ou horizontale.

COROLLAIRE II.

(696.) Si c'étoit le corps AG qui, par son mouvement, produisoit la dénivellation; & si ce corps est tel, que PG soit moindre que $PC = PD$: ce corps n'empêchera point que la dénivellation CGB n'ait lieu, quoique la dénivellation $BGPF$ ne paroisse pas, le corps en occupant la place.

COROLLAIRE III.

COROLLAIRE III.

(697.) Les dénivellations doivent par conséquent produire des forces positives, ou négatives, qui agissent sur les autres surfaces qu'elles environnent, ou auxquelles elles atteignent, & modifier les forces dont ces surfaces éprouveront l'action sans cette circonstance. Elles altéreront également la vitesse avec laquelle le le Fluide jailliroit par un orifice ouvert dans les mêmes surfaces.

COROLLAIRE IV.

(698.) Si la surface est plane, on aura $PC = PD = u \sin \theta$ (597.), θ désignant l'angle que forme la surface avec la direction du mouvement.

PROPOSITION XLVI.

(699.) Trouver la vitesse avec laquelle le Fluide jaillira par un orifice ouvert dans une surface, en ayant égard à l'effet que produit sur elle la dénivellation produite par une autre surface.

La vitesse que prend un Fluide, qui sort par un orifice quelconque, a un certain rapport avec la hauteur de la dénivellation, dans la verticale du même orifice. Or $\frac{1}{64} u^2 \sin^2 \theta$ étant la hauteur de la dénivellation, toutes les particules du Fluide, placées dans la même verticale, prennent la vitesse $u \sin \theta$: donc, en général, si l'on connoît la hauteur de la dénivellation au-dessus d'un orifice, en la multipliant par 64, & extrayant la racine quarrée du produit, on aura la vitesse que prendront les particules du Fluide, en vertu de la dénivellation (52 & 56+). Cette vitesse étant ajoutée, ou soustraite de celle qui doit résulter de la hauteur de la superficie du Fluide au-dessus de l'orifice, on aura la vitesse réelle avec laquelle le Fluide jaillira par cet orifice.

PROPOSITION XLVIII.

(700.) Trouver la force horizontale qui agit sur une surface plane choquante, qui est entièrement submergée dans le Fluide, en ayant égard à la dénivellation que produit une autre surface également choquante.

Soit CL la surface choquante qui éprouve l'action de la force qu'on cherche; CN celle qui cause la dénivellation; OQ la superficie du Fluide; ONQ la dénivellation qui résulte du mouvement de la surface NC ; & $OFED$ celle qui résulte du mouvement de LC ;

TOME I.

Nn

Fig. 69;

cette dernière dénivellation étant supposée moindre que la première, à cause que l'angle formé par CN avec la direction du mouvement, est plus grand que celui formé par LC , avec la même direction. Soit, de plus, dans la verticale BCT , $BC=D$, $CG=x$, l'horizontale GH sera $=\frac{x \cos \theta}{\sin \theta}$, la verticale $HK=D+x$, & KI , la dénivellation correspondante au point H , $=\div OK^2=\div (BO-BK)^2=\div (u \sin \theta - \frac{x \cos \theta}{\sin \theta})^2$; θ exprimant l'angle que forme la direction du mouvement avec CN : en sorte que la vitesse avec laquelle le Fluide jaillira par l'orifice fait en H , sera $=8(D+x)^{\frac{1}{2}} + u \sin \theta - \frac{x \cos \theta}{\sin \theta}$. La force horizontale qui agit sur une différencio-différencielle en H sera donc $=m \cdot dc \cdot dx \left((D+x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left(u \sin \theta - \frac{x \cos \theta}{\sin \theta} \right) \right)$; ou la quantité c étant constante, la force qui agit sur une différencielle sera $=\dots\dots m \cdot c \cdot dx \left((D+x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left(u \sin \theta - \frac{x \cos \theta}{\sin \theta} \right) \right)$; quantité dont l'intégrale est $=mc \left(Dx + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} u \left((D+x)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}} \right) \sin \theta \right) + \dots\dots mc \left(\frac{u^2 x^2 \sin \theta}{64 \sin^2 \theta} - \left(\frac{1}{2} (D+x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} D (D+x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} D^{\frac{1}{2}} \right) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \dots\dots mc \left(\frac{u x^2 \sin \theta \cos \theta}{64 \sin^2 \theta} - \frac{x^3 \cos \theta}{3 \cdot 64 \sin^2 \theta} \right)$. Cette intégrale exprimera la force horizontale qui agit sur la surface HC , en supposant que la droite où

* Il est très-aisé de trouver cette intégrale; pour cela il ne faut que développer la quantité différencielle, en effectuant les opérations indiquées, & l'on aura $\dots\dots\dots$

$$mc \left(Ddx + xdx + \frac{1}{2} u \sin \theta dx (D+x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} x dx (D+x)^{\frac{1}{2}} + \frac{u^2 \sin \theta x^2}{64} dx - \dots\dots \frac{u \sin \theta \cos \theta}{32 \sin^2 \theta} x dx + \frac{\cos^2 \theta}{64 \sin^2 \theta} x^2 dx \right); \text{ quantité, qui s'intègre comme une suite de monomes, excepté le quatrième terme qui échappe à la règle fondamentale. L'intégrale est donc } mc \left(Dx + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} u (D+x)^{\frac{3}{2}} \sin \theta \right) + mc \left(\int - \frac{1}{2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} x dx (D+x)^{\frac{1}{2}} \right) + \dots\dots mc \left(\frac{u^2 x^2}{64} \sin \theta \right) - mc \left(\frac{u x^3 \sin \theta \cos \theta}{64 \sin^2 \theta} - \frac{x^3 \cos \theta}{3 \cdot 64 \sin^2 \theta} \right). \text{ Ainsi, la difficulté, s'il y en avoit,}$$

ne pourroit tomber que sur l'expression $\int - \frac{1}{2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} x dx (D+x)^{\frac{1}{2}}$. Pour avoir cette intégrale, je fais $D+x=y$, & j'en tire $x=y-D$. Considérant que $x dx$ vient, à un multiplicateur constant près, de la différenciation de x^2 , je quarre cette équation, & j'ai $x^2=y^2-2Dy+D^2$, d'où je tire, en différenciant, & divisant par 2, $x dx = y dy - D dy$. Substituant cette quantité dans la différencielle, j'ai $-\frac{1}{2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} x dx (D+x)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} y^{\frac{1}{2}} dy + \frac{1}{2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} D y^{\frac{1}{2}} dy$,] dont l'intégrale est $= -\frac{1}{2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} y^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} D y^{\frac{3}{2}}$. Mettant donc pour y la valeur $D+x$, on a $\int - \frac{1}{2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} x dx (D+x)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (D+x)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} D (D+x)^{\frac{3}{2}}$, (Voyez la qua-

les deux surfaces se rencontrent, c'est-à-dire, leur intersection C , soit horizontale. Si l'on fait maintenant $x = CT = \frac{RT \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{EF \sin \alpha}{\cos \alpha} =$

$$\frac{u \sin \alpha}{\cos \alpha} (\sin \theta - \sin \theta)^*, \theta \text{ exprimant l'angle que fait la direction du mouvement avec la ligne } CL, EF \text{ étant l'espace dont une dénivellation s'étend sur l'autre, on aura la force horizontale qui agit sur la surface } CR = mc \left(\frac{Du \sin \alpha (\sin \theta - \sin \theta)}{\cos \alpha} + \frac{u^2 \sin \alpha (\sin \theta - \sin \theta)^2}{2 \cos \alpha^2} \right) + \dots$$

$$\frac{1}{2} mc u \sin \theta \left(\left(D + \frac{u \sin \alpha (\sin \theta - \sin \theta)}{\cos \alpha} \right)^2 - D^2 \right) - \dots$$

$$\frac{mc \cos \alpha}{10 \sin \alpha} \left(D + \frac{u \sin \alpha (\sin \theta - \sin \theta)}{\cos \alpha} \right)^2 + \frac{mc D \cos \alpha}{6 \sin \alpha} \left(D + \frac{u \sin \alpha (\sin \theta - \sin \theta)}{\cos \alpha} \right)^2 -$$

$$\frac{mc \cos \alpha}{15 \sin \alpha} D^2 + \frac{mc u^3 (\sin \theta^3 - \sin \theta^1) \sin \alpha}{3.64 \cos \alpha^2}.$$

COROLLAIRE I.

(701.) La force horizontale qui agira sur la surface CR , & qui résulte de la dénivellation produite par cette surface, est (611.) =

$$mc \left(Dx + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} u \left((D+x)^2 - D^2 \right) \sin \theta + \frac{1}{24} u^2 x \sin \theta^2 \right) = \dots$$

$$mc \left(\frac{Du \sin \alpha (\sin \theta - \sin \theta)}{\cos \alpha} + \frac{u^2 \sin \alpha (\sin \theta - \sin \theta)^2}{2 \cos \alpha^2} \right) + \dots$$

$$\frac{1}{2} mc u \sin \theta \left(\left(D + \frac{u \sin \alpha (\sin \theta - \sin \theta)}{\cos \alpha} \right)^2 - D^2 \right) + \frac{mc u^3 \sin \theta^3 \sin \alpha}{64 \cos \alpha^2} (\sin \theta - \sin \theta),$$

en mettant pour x la valeur (700, & la Note). Donc, en soustrayant cette valeur de la force trouvée ci-dessus, il restera l'excès de force horizontale que lui communique la dénivellation de l'autre surface; & cet excès est = $\frac{1}{2} mc u (\sin \theta - \sin \theta) \left(\left(D + \frac{u \sin \alpha (\sin \theta - \sin \theta)}{\cos \alpha} \right)^2 - D^2 \right) -$

trième partie du *Cours de Mathématiques de M. Bézout*, Art. 91.). Substituant maintenant cette quantité dans l'intégrale précédente, on aura l'intégrale complète =

$$mc \left(Dx + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} u (D+x)^2 \sin \theta \right) + mc \left(\frac{u^2 x}{64} \sin \theta^2 - \left(\frac{1}{10} (D+x)^2 - \frac{1}{6} D^2 \right) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) -$$

$$mc \left(\frac{u x^2 \sin \theta \cos \alpha}{64 \sin \alpha} - \frac{x^3 \cos \alpha^2}{3.64 \sin \alpha^2} \right) + H; \text{ en désignant par } H \text{ la quantité constante qui com-}$$

plète l'intégrale. Pour trouver la valeur de cette constante, je considère que l'intégrale représentant la résistance qu'éprouve la surface NCL , elle doit s'évanouir au point C ; c'est-à-dire, lorsque $x = 0$; on aura donc $mc \left(\frac{1}{6} u D^2 \right) + mc \left(\frac{1}{6} D^2 \right) - \frac{1}{10} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} D^2 + H = 0$; ce qui donne, en transposant & réduisant, $H = mc \left(-\frac{1}{10} D^2 \right) + mc \left(-\frac{1}{6} D^2 \right) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$. Substituant donc cette valeur de H dans l'intégrale, on a l'expression même de l'Auteur.

* Car $BO = u \sin \theta$, & $BD = OM = u \sin \theta$ (597); donc $BO - OM = BM = EF = \sin \theta - \sin \theta$; & par conséquent $x = CT = \frac{EF \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{u \sin \alpha (\sin \theta - \sin \theta)}{\cos \alpha}$.

$$\frac{mc \cos \alpha}{\sin \alpha} \left(\frac{1}{10} \left(D + \frac{u \sin \alpha}{\cos \alpha} (\sin \Theta - \sin \theta) \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{10} D \left(D + \frac{u \sin \alpha}{\cos \alpha} (\sin \Theta - \sin \theta) \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{11} D^{\frac{1}{2}} \right) \\ + \frac{mcu \sin \alpha}{3.64 \cos \alpha} (\sin \Theta - \sin \theta)^2 (\sin \Theta + 2 \sin \theta).$$

COROLLAIRE II.

(702.) La force horizontale qui agit sur toute la surface CL , en vertu de la dénivellation qu'elle produit elle seule, est (611.) = $mc(Da + \frac{1}{10}a^2 + \frac{1}{10}u \sin \theta ((D+a)^{\frac{1}{2}} - D^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{10}u^2 a \sin \theta^2)$, a exprimant toute la hauteur verticale de la même surface : donc, en ajoutant cette quantité à l'excès de force horizontale que lui communique l'autre surface, toute la force horizontale qui agit sur la surface CL , sera = $mc(Da + \frac{1}{10}a^2 + \frac{1}{10}u \sin \theta ((D+a)^{\frac{1}{2}} - D^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{10}u^2 a \sin \theta^2) + \dots$

$$\frac{mc \cos \alpha}{\sin \alpha} \left(\frac{1}{10} \left(D + \frac{u \sin \alpha}{\cos \alpha} (\sin \Theta - \sin \theta) \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{10} D \left(D + \frac{u \sin \alpha}{\cos \alpha} (\sin \Theta - \sin \theta) \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{11} D^{\frac{1}{2}} \right) \\ + \frac{mcu \sin \alpha}{3.64 \cos \alpha} (\sin \Theta - \sin \theta)^2 (\sin \Theta + 2 \sin \theta).$$

SCOLIE.

(703.) Après l'intégration, nous avons substitué $x = \frac{u \sin \alpha}{\cos \alpha} (\sin \Theta - \sin \theta)$ afin d'avoir la force horizontale qui agit sur la surface CR , comprise entre les points C & R , ce dernier point correspondant à la verticale FR qui passe par F , extrémité de l'espace auquel s'étend la plus grande élévation au-dessus de la moindre. Mais cela ne doit s'entendre que pour le cas où la verticale FR coupe la surface CL , dans un point comme R : si CL étoit moindre que CR , alors il ne faudroit substituer pour x que sa valeur légitime, laquelle seroit $k \sin \alpha$, k marquant la longueur de la surface CL .

SCOLIE II.

(704.) Si BT est moindre que BC , ou si la surface CL tombe dans la partie qui est au-dessus de l'horizontale du point C , les quantités x , a & $\sin \alpha$ seront négatives ; ainsi il faudra, dans ce cas, avoir attention de faire, dans les formules précédentes, les changements qu'exigent ces circonstances.

PROPOSITION XLIX.

(705.) Trouver la force horizontale qui agit sur une surface plane

choquée, qui est entièrement submergée dans le Fluide, en ayant égard à la dénivellation produite par une autre surface également choquée.

Cette proposition ne diffère de la précédente, qu'en ce que KI , & par conséquent $\frac{1}{2}(u \sin \theta - \frac{x \cos \theta}{\sin \theta})$, est négative. Changeant donc les signes des produits correspondants, on aura la force horifontale qui agit sur la surface $CR^* =$

$$mc \left(\frac{Du \sin \theta}{\cos \theta} (\sin \theta - \sin \theta) + \frac{u^2 \sin \theta}{2 \cos \theta} (\sin \theta - \sin \theta)^2 - \dots \right)$$

$$\frac{1}{2} mc u \sin \theta \left((D + \frac{u \sin \theta}{\cos \theta} (\sin \theta - \sin \theta))^2 - D^2 \right) + \dots$$

$$mc \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \left(\frac{1}{10} (D + \frac{u \sin \theta}{\cos \theta} (\sin \theta - \sin \theta))^2 - \frac{1}{2} D (D + \frac{u \sin \theta}{\cos \theta} (\sin \theta - \sin \theta))^2 + \frac{1}{11} D^2 \right)$$

$$+ \frac{mc u^3 \sin \theta}{3.64 \cos \theta} (\sin \theta^3 - \sin \theta^3) .$$

COROLLAIRE I.

(706.) Par les mêmes raisons, l'excès de force horifontale que lui communiquera la dénivellation de l'autre surface, sera = . . .

$$mc \left(-\frac{1}{2} u (\sin \theta - \sin \theta) (D + \frac{u \sin \theta}{\cos \theta} (\sin \theta - \sin \theta))^2 - D^2 \right) + \dots$$

$$\frac{mc \cos \theta}{\sin \theta} \left(\frac{1}{10} (D + \frac{u \sin \theta}{\cos \theta} (\sin \theta - \sin \theta))^2 - \frac{1}{2} D (D + \frac{u \sin \theta}{\cos \theta} (\sin \theta - \sin \theta))^2 + \frac{1}{11} D^2 \right)$$

$$+ \frac{mc u^3 \sin \theta}{3.64 \cos \theta} (\sin \theta - \sin \theta)^2 (\sin \theta + 2 \sin \theta) .$$

COROLLAIRE II.

(707.) Par la même raison, la force horifontale qui agira sur la surface CL , sera = $mc \left(Da + \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2} u \sin \theta ((D+a)^2 - D^2) + \frac{1}{64} u^2 a^2 \sin^2 \theta \right) -$

$$\frac{1}{2} mc u (\sin \theta - \sin \theta) \left((D + \frac{u \sin \theta}{\cos \theta} (\sin \theta - \sin \theta))^2 - D^2 \right) + \dots$$

$$\frac{mc \cos \theta}{\sin \theta} \left(\frac{1}{10} (D + \frac{u \sin \theta}{\cos \theta} (\sin \theta - \sin \theta))^2 - \frac{1}{2} D (D + \frac{u \sin \theta}{\cos \theta} (\sin \theta - \sin \theta))^2 + \frac{1}{11} D^2 \right)$$

$$+ \frac{mc u^3 \sin \theta}{3.64 \cos \theta} (\sin \theta - \sin \theta) (\sin \theta + 2 \sin \theta) .$$

PROPOSITION L.

(708.) Trouver la force horifontale qui agit sur une surface plane choquée, qui est entièrement submergée dans le Fluide, en ayant égard à la dénivellation que produit une autre surface plane choquante.

La vitesse avec laquelle le Fluide jaillira par l'orifice H , & qui résulte de la dénivellation que produit la surface choquante NC , est, par ce qui a été dit, Art. 700, $= 8(D+x)^2 + u \sin \theta - \frac{x \cos \theta}{\sin \theta}$;

* Pour plus de facilité dans ce changement de signes, Voyez la premiere note de l'Art. 700.

mais en supposant maintenant que la surface CL est choquée, ou qu'elle fuit le Fluide avec la vitesse $u \sin \theta$, le Fluide aura cette vitesse de moins, & il en sortira moins par l'orifice H . La vitesse effective du même Fluide sera donc = ...

$8(D+x)^{\frac{1}{2}} + u(\sin \Theta - \sin \theta) - \frac{x \cos^2 \theta}{\sin^3 \theta}$; expression qui ne diffère de la première qu'en ce que $\sin \Theta - \sin \theta$ y tient la place qu'occupe $\sin \Theta$ seul dans la première. Ce problème se résoudra donc, en substituant, dans l'expression donnée, Art. 700, $\sin \Theta - \sin \theta$ en place de $\sin \Theta$ seul, & la force horizontale qui agit sur la surface CR , sera =

$$mc(Dx + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}u(\sin \Theta - \sin \theta)((D+x)^{\frac{1}{2}} - D^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{64}u^2x(\sin \Theta - \sin \theta)^2) - \frac{mc \cos^2 \theta}{\sin^3 \theta}(\frac{1}{10}(D+x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}D(D+x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{11}D^{\frac{1}{2}}) - mc(\frac{ux^2 \cos^2 \theta}{64 \sin^3 \theta}(\sin \Theta - \sin \theta) - \frac{x^3 \cos^2 \theta}{3.64 \sin^3 \theta}).$$

Substituant maintenant la valeur de $x = CT = \frac{RT \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{BO \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{u \sin^2 \theta \sin \Theta}{\cos^2 \theta}$, pour le cas où CL est = ou $>$ CR , la force horizontale

$$qui agit sur la surface CR , sera = ...
 $mc(\frac{Du \sin^2 \theta \sin \Theta}{\cos^2 \theta} + \frac{u^2 \sin^4 \theta \sin \Theta^2}{2 \cos^2 \theta} + \frac{1}{6}u(\sin \Theta - \sin \theta)((D + \frac{u \sin^2 \theta \sin \Theta}{\cos^2 \theta})^{\frac{1}{2}} - D^{\frac{1}{2}}) - \frac{mc \cos^2 \theta}{\sin^3 \theta}(\frac{1}{10}(D + \frac{u \sin^2 \theta \sin \Theta}{\cos^2 \theta})^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}D(D + \frac{u \sin^2 \theta \sin \Theta}{\cos^2 \theta})^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{11}D^{\frac{1}{2}}) + \dots - \frac{mc u^3 \sin^6 \theta ((\sin \Theta - \sin \theta)^3 - \sin^3 \theta)}{3.64 \cos^2 \theta}).$$$

COROLLAIRE I.

(709.) La force horizontale qui agit sur la surface CR , & qui résulte de la dénivellation que cette surface produit, est (611.) =

$$mc(\frac{Du \sin^2 \theta \sin \Theta}{\cos^2 \theta} + \frac{u^2 \sin^4 \theta \sin \Theta^2}{2 \cos^2 \theta} - \frac{1}{6}u \sin \theta((D + \frac{u \sin^2 \theta \sin \Theta}{\cos^2 \theta})^{\frac{1}{2}} - D^{\frac{1}{2}})) + \dots - \frac{mc u^3 \sin^6 \theta \sin \Theta \sin^2 \theta}{64 \cos^2 \theta} : \text{donc, en soustrayant cette valeur de la force trouvée ci-dessus, il restera la force horizontale que lui communique la dénivellation de l'autre surface, laquelle sera =}$$

$$mc(\frac{1}{6}u \sin \theta((D + \frac{u \sin^2 \theta \sin \Theta}{\cos^2 \theta})^{\frac{1}{2}} - D^{\frac{1}{2}})) - \frac{mc \cos^2 \theta}{\sin^3 \theta}(\frac{1}{10}(D + \frac{u \sin^2 \theta \sin \Theta}{\cos^2 \theta})^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}D(D + \frac{u \sin^2 \theta \sin \Theta}{\cos^2 \theta})^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{11}D^{\frac{1}{2}}) + \dots - \frac{mc u^3 \sin^6 \theta \sin \Theta^2 (\sin \Theta - \sin^2 \theta)}{3.64 \cos^2 \theta}.$$

COROLLAIRE II.

(710.) La force horizontale qui agit sur toute la surface CL , & qui résulte de la dénivellation qu'elle produit elle seule, est (611.) = $mc(Da + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}u \sin \theta((D+a)^{\frac{1}{2}} - D^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{64}u^2a \sin^2 \theta)$, a exprimant

toute la hauteur verticale de la même surface : donc , en ajoutant cette quantité à celle que lui communique l'autre surface , la force horizontale entière qui agit sur cette surface CL , sera = ...
 $mc(Da + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}u \sin \theta ((D+a)^{\frac{1}{2}} - D^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}u^2a \sin^2 \theta) + \dots \dots \dots$
 $\frac{1}{2}mcu \sin \theta ((D + \frac{u \sin \theta \sin \theta}{\cos \eta})^{\frac{1}{2}} - D^{\frac{1}{2}}) - \dots \dots \dots$
 $\frac{mc \cos \eta}{\sin \eta} (\frac{1}{2}(D + \frac{u \sin \eta \sin \eta}{\cos \eta})^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}D(D + \frac{u \sin \eta \sin \eta}{\cos \eta})^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}D^{\frac{1}{2}}) + \dots \dots \dots$
 $\frac{mcu \sin \eta \sin \theta}{3.64 \cos \eta} (\sin \theta - 3 \sin \theta).$

SCOLIE I.

(711.) Après l'intégration ; nous avons substitué , à la place de x , la quantité $\frac{u \sin \eta \sin \theta}{\cos \eta}$, pour le cas où RC est = ou $< CL$; mais si RC étoit $> CL$, il faudroit substituer pour x sa valeur légitime , qui sera $k \sin \eta$; k marquant la longueur de CL .

SCOLIE II.

(712.) Si BT étoit moindre que BC , ou si la surface CL tomboit au-dessus de l'horizontale du point C , les quantités x , a & $\sin \eta$ feroient négatives ; par conséquent les signes correspondants doivent être changés dans les formules. On peut se représenter ce cas, en imaginant la surface choquée étendue jusqu'à sortir du Fluide, comme si au lieu de la position CL , elle avoit la position CV .

FIG. 66.

SCOLIE III.

(713.) Lorsque la surface choquée s'étend jusqu'au dehors du Fluide, il se présente deux cas très-distincts ; un lorsqu'elle coupe la droite OR plus bas que le point O , lequel a déjà été résolu dans la Proposition précédente & ses Corollaires : l'autre cas est celui où cette surface coupe la droite OB , & la dénivellation OA . On résoudra ce cas dans le Corollaire suivant.

SCOLIE IV.

(714.) La quantité $\frac{x \cos \eta}{\sin \eta}$ qui entre dans l'expression
 $8(D \pm x)^{\frac{1}{2}} + u \sin \theta - \frac{x \cos \eta}{\sin \eta}$ de la vitesse, est zéro , non-seulement lorsque $\sin \eta = 1$, mais encore lorsque $\cos \eta$ est négatif, ou que la surface choquée tombe entre AC & NC , parce qu'entre ces deux lignes la dénivellation qui est terminée par la ligne AN parallèle

à la superficie OQ , est constante, étant toujours $= \frac{1}{6} u^2 \sin \Theta^2$; de sorte que le second terme de la quantité $\frac{1}{6} (u \sin \Theta - \frac{x \cos \Theta}{\sin \Theta})^2$, laquelle donnoit auparavant la valeur de KI , s'évanouit.

COROLLAIRE III.

(715.) Quand la surface choquée s'étend jusqu'au dehors du Fluide, & qu'elle coupe la dénivellation OA , la vitesse du Fluide dans le point le plus élevé, ou dans le point même M où la surface sort du Fluide, est $= 0$; c'est-à-dire que $8(D \pm x)^{\frac{1}{2}} + u(\sin \Theta - \sin \theta) - \frac{x \cos \Theta}{\sin \Theta} = 0$, laquelle équation donne $x = \dots \dots \dots$
 $\frac{u \sin \Theta}{\cos \Theta} (\sin \Theta - \sin \theta) \pm \frac{64 \sin^4 \Theta}{2 \cos^4 \Theta} \pm \frac{8 \sin^4 \Theta}{\cos^4 \Theta} (D \pm \frac{u \sin \Theta}{\cos \Theta} (\sin \Theta - \sin \theta) + \frac{64 \sin^4 \Theta}{4 \cos^4 \Theta})^{\frac{1}{2}}$;
 c'est la valeur qu'on doit substituer pour x , après avoir intégré.

COROLLAIRE IV.

(716.) Si l'on avoit $\sin \Theta = -1$, il resteroit $x = D - \frac{1}{6} u^2 (\sin \Theta - \sin \theta)^2$; & la même chose aura lieu pour tous les cas où la surface choquée tombe entre AC & NC , sur AC , ou sur NC .

COROLLAIRE V.

(717.) La même surface tombant sur CN , c'est-à-dire, les deux surfaces, choquante & choquée, se réduisant à une seule surface, on a $\sin \Theta = \sin \theta$: donc, pour ce cas, on a $x = D$: ce qui montre que le Fluide se terminera à la surface OQ , demeurant parfaitement de niveau, & sans laisser la moindre cavité derrière la surface choquée.

COROLLAIRE VI.

(718.) Pour l'un quelconque des cas, dans lesquels la surface choquée tombe entre AC & NC , $\cos \Theta$ devant s'évanouir, la force horizontale qui agit sur elle, devient $= \dots \dots \dots$
 $mc(-Dx + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} u(\sin \Theta - \sin \theta)((D+x)^{\frac{1}{2}} - D^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{6} u^2 x(\sin \Theta - \sin \theta)^2)$.

COROLLAIRE VII.

(719.) Si les deux surfaces, choquante & choquée, se réduisent à une seule, on vient de voir qu'on aura $x = D$, & $\sin \Theta = \sin \theta$: donc en substituant ces valeurs, on aura la force qui agit sur la surface choquée $= -\frac{1}{2} mcD^2$, le signe négatif exprimant que la force agit dans une direction opposée à celle de la force choquante.

COROLLAIRE VIII.

COROLLAIRE VIII.

PLANC. III.

(720.) Si x étoit négligeable à l'égard de D , la force horisontale qui agiroit sur la surface choquée, seroit = ...
 $mc(-Dx + \frac{1}{2}u(\sin \Theta - \sin \vartheta)D^2x - \frac{1}{2}u^2x(\sin \Theta - \sin \vartheta)^2)$; expression
 qui devient = $-mcDx$, lorsque $\sin \Theta = \sin \vartheta$.

PROPOSITION LI.

(721.) Trouver les forces horisontales qui agissent sur une surface choquante, ou choquée, en ayant égard à la dénivellation produite par une autre surface, lorsque ces deux surfaces sont séparées par quelque distance. FIG. 67.

Supposons que NC soit une surface choquante, qui produise la dénivellation AO : Supposons aussi qu'en C il y ait une autre surface CG , unie à la première, & à celle-ci une troisième surface GH , unie avec elle en G : il est question de trouver la force qui agit sur cette surface, en ayant égard à la dénivellation AO . Considérant que cette force dépend de la hauteur de la dénivellation, & que la hauteur qui correspond au point G est FB , & non AE que nous avons employée ci-dessus; il est visible qu'il ne s'agit ici que de substituer BF en place de AE , & le problème sera résolu. AE est égal à $\frac{1}{2}OE^2 = \frac{1}{2}u^2 \sin \Theta^2$, & $BF = \frac{1}{2}OF^2 = \frac{1}{2}(OE - EF)^2$: donc il n'y aura qu'à substituer $(OE - EF)^2$ en place de OE^2 , ou $OE - EF$ en place de OE ; c'est-à-dire, $u \sin \Theta - EF$ en place de $u \sin \Theta$ seul, pour que les formules précédentes correspondent au cas présent. La même chose aura lieu, quoique ce soit la surface NC qui soit choquée, parce qu'on peut appliquer le même raisonnement à un cas quelconque. Si la distance horisontale EF comprise entre les deux verticales AC , BG est = q , nous n'aurons qu'à substituer $u \sin \Theta - q$, en place de $u \sin \Theta$ seul.

COROLLAIRE I.

(722.) La distance horisontale q étant = $u \sin \Theta$, ou égale à toute l'amplitude de la dénivellation EO , on aura $u \sin \Theta - q = 0$; & par conséquent la dénivellation ne communiquera aucune force qui agisse sur la surface.

COROLLAIRE II.

(723.) Comme la même chose a lieu, lorsqu'on a $EF > EO = u \sin \Theta$, ou $q > EO = u \sin \Theta$, il s'ensuit que pour le cas où

TOME I.

O O

q est = ou $\geq EO = u \sin \ominus$, on doit substituer dans les formules, q à la place de $u \sin \ominus$.

COROLLAIRE III.

(724.) Comme les quantités qui expriment la force que communie la dénivellation produite par l'autre surface, sont toutes affectées de la quantité $u (\sin \ominus - \sin \theta)$, quand il sera question de la combinaison de surfaces choquantes ou choquées entre elles, & qu'il faudra substituer $u \sin \ominus - q$ en place de $u \sin \ominus$ seul, toutes les quantités seront affectées par $u (\sin \ominus - \sin \theta) - q$: donc si l'on avoit $u \sin \ominus = u \sin \theta + q$, il n'y auroit, dans ces cas, aucune force communicante.

COROLLAIRE IV.

(725.) Comme la différence entre les angles $\ominus$ & θ est très-petite dans les courbes, lorsque les différentielles sont peu éloignées, & comme dans celles où la distance augmente, il est nécessaire de soustraire de la différence des sinus de ces angles la quantité $\frac{1}{2}$: il s'en suit que, dans les courbes, on peut négliger la force que les parties de surface se communiquent les unes aux autres, ce qui simplifiera les calculs, & les rendra plus faciles.

PROPOSITION LII.

(726.) Trouver la résistance horizontale qu'éprouve un parallépipède rectangle qui flotte sur un fluide, deux de ses côtés étant parallèles à l'horizon, en supposant que c'est le parallépipède qui se meut, & non le fluide, suivant une direction parallèle à deux de ses autres côtés, dans le cas où l'on auroit $a =$ ou $> \frac{1}{2} u^2 \sin \theta^2$, & en ayant égard à la force que la dénivellation produite par la surface choquante, communie à la surface choquée.

Puisque, dans ce cas, $\sin \theta = 1$, on aura (708.) la force qui agit sur la surface choquée = ...
 $m c (Dx + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} u (\sin \ominus - \sin \theta) ((D+x)^2 - D^2) + \frac{1}{2} u^2 (\sin \ominus - \sin \theta)^2)$;
 expression dans laquelle on doit faire x négative, & (716.) = . .
 $D - \frac{1}{2} u^2 (\sin \ominus - \sin \theta)^2$. Substituant maintenant $u \sin \ominus - q$ pour $u \sin \ominus$, q marquant la longueur du parallépipède, & observant que, dans le cas présent, $\sin \ominus = \sin \theta$, la force deviendra =
 $- m c (Dx - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} q ((D+x) - D^2) + \frac{1}{2} q^2 x)$, & la valeur de $x =$

$D - \frac{1}{4} q^2$. Substituant cette valeur de x dans l'expression de la force, elle deviendra $-mc(\frac{1}{2} D^2 - \frac{1}{2} q D^2 + \frac{1}{4} q^2 D - \frac{1}{6.64} q^4)$, ou en faisant à présent $D = a$, qui est toute la profondeur à laquelle l'une & l'autre extrémité du parallépipède est enfoncée au - dessous, de la surface du Fluide, la force qui agit sur la surface choquée, sera $= -mc(\frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2} q a^2 + \frac{1}{4} q^2 a - \frac{1}{6.64} q^4)$. Celle qui agit sur la superficie choquante, le Fluide étant supposé ne pas passer par-dessus, est (600.) $= mc(\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} u a^2 \sin \theta + \frac{1}{4} u^2 a \sin^2 \theta + \frac{u^4 \sin^4 \theta}{6.64})$: donc la résistance qu'éprouvera le parallépipède, sera = ... $mc(\frac{1}{2} a^2 (u \sin \theta + q) + \frac{1}{4} a (u^2 \sin^2 \theta - q^2) + \frac{1}{6.64} (u^4 \sin^4 \theta + q^4))$.

COROLLAIRE I.

(727.) Si la longueur du parallépipède étoit égale, ou plus grande que $u \sin \theta$, on substituerait $u \sin \theta$ au lieu de q , & la résistance qu'il éprouveroit seroit $= mc(\frac{1}{2} u a^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{3.64} u^4 \sin^4 \theta)$; c'est la même que nous avons trouvée, Art. 640.

COROLLAIRE II.

(728.) Si l'on avoit $q = 0$; c'est-à-dire, si le parallépipède se réduisoit à un plan, la résistance qu'il éprouveroit, se réduiroit à $mc(\frac{1}{2} a^2 u \sin \theta + \frac{1}{4} a u^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{6.64} u^4 \sin^4 \theta)$.

COROLLAIRE III.

(729.) La résistance qu'éprouvera le parallépipède (727.) sera plus grande que celle qu'éprouvera le plan de la quantité . . . $mc(\frac{1}{2} a^2 u \sin \theta - \frac{1}{4} a u^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{6.64} u^4 \sin^4 \theta)$.

COROLLAIRE IV.

(730.) La résistance qu'éprouve le parallépipède, sera donc double de celle du plan, moins la quantité $\frac{1}{4} mcau^2 \sin^2 \theta$; ou la résistance qu'éprouve la plan est la moitié de celle qu'éprouve le parallépipède, plus la quantité $\frac{1}{4} mcau^2 \sin^2 \theta$.

COROLLAIRE V.

(731.) Si la vitesse u étoit fort petite, on pourroit négliger le

terme $\frac{1}{2}mca^2 \sin \theta$, comme très-petit à l'égard du premier terme $\frac{1}{2}mca^2 u \sin \theta$, & dans ce cas, la résistance du plan se trouveroit précisément égale à la moitié de celle du parallépipède.

COROLLAIRE VI.

(732.) Si le parallépipède est tellement enfoncé dans le fluide, que a soit négligeable à l'égard de D , la force qu'éprouvera la surface choquée, sera (720.) $= mcDa$; & celle qui agit sur la surface choquante étant en ce cas $= mc(Da + \frac{1}{2}auD^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}u^3)$, la résistance qu'éprouvera le parallépipède deviendra $= \frac{1}{2}mcau(D^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}u)$; ou $= \frac{1}{2}mcau D^{\frac{1}{2}}$, si u est fort petit à l'égard de D ; résistance qui est la moitié de celle qu'il éprouve, en faisant abstraction de la dénivellation (654.).

COROLLAIRE VII.

(733.) La résistance qu'éprouve un parallépipède dont la hauteur & la largeur sont égales, est (654.) $= \frac{1}{2}ma^2 u D^{\frac{1}{2}}$, lorsqu'on n'a point égard à la dénivellation, & lorsqu'on peut négliger a par rapport à D . La résistance qu'éprouve une sphère est (664.) $= \frac{1}{15}a^2 mcau D^{\frac{1}{2}}$. Ces deux résistances sont donc entre elles comme 1 est à $\frac{1}{3}c$: mais la résistance du même parallépipède, en ayant égard à la dénivellation, est $= ma^2 u (D^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}u)$, celle qu'éprouve la sphère sera donc dans les mêmes circonstances, $= \frac{1}{15}mca^2 u (D^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}u)$.

SCOLIE I.

(734.) C'est d'après ce qui est démontré dans le Corollaire V, (731.), que, dans le calcul appliqué aux expériences rapportées dans le Scolie de la Proposition XXXVI, Art. 644, on a pris, pour la résistance que devoit éprouver la planche, la moitié de la résistance qui a lieu pour un parallépipède.

SCOLIE II.

(735.) On peut trouver de la même manière la résistance qu'éprouvent les autres corps terminés par des surfaces rectilignes, en ayant égard à la dénivellation qui altere les forces; mais ce que nous avons dit suffit d'autant plus pour notre objet, que nous nous réduisons à la considérations des surfaces courbes, dans lesquelles cette attention devient superflue.

CHAPITRE VIII.

Des dimensions & de la figure que doivent avoir les lignes & les surfaces, pour qu'étant mues dans un Fluide, elles éprouvent la plus grande ou la moindre résistance.

L E M M E I I.

(736.) **T**ROUVER la ligne, ou la surface, qui jouisse d'une certaine propriété dans le plus haut, ou le plus bas, degré; ou celle qui, entre différentes lignes, ou surfaces, qui jouissent d'une certaine propriété dans un degré égal, jouisse aussi d'une autre propriété distincte dans le plus haut, ou le plus bas, degré.

Ayant divisé la ligne, ou la surface, en différencielles, on peut exprimer par une quantité différencielle la propriété dont chacune d'elles doit jouir; & comme on demande la plus grande, ou plus petite, la différencielle de cette quantité doit être constante: car, dans ce cas, l'expression d'une différencielle ne peut augmenter, qu'une autre ne diminue d'autant, cette condition étant essentielle, & absolument nécessaire, pour que la propriété dont il s'agit ne puisse être ni plus grande ni plus petite. Qu'on différencie donc la quantité, ou l'expression différencielle, qui exprime la propriété, en la divisant par la quantité commune qui multipliera tous les termes, on égalera le quotient à une quantité constante. Cette équation étant réduite, sera celle de la ligne, ou de la surface, qui jouira de la propriété en question dans le plus haut, ou le plus bas, degré.

Dans le cas où il s'agit de trouver une ligne, ou une surface, qui jouisse d'une certaine propriété dans le plus haut, ou le plus bas, degré, sans cesser de jouir d'une autre propriété qu'elle auroit déjà dans le même degré, les différencielles des deux quantités différencielles qui expriment les propriétés, doivent, dans ce cas, être égales entre elles, attendu que l'une ne doit point augmenter au préjudice de l'autre. Cette équation étant réduite, sera celle de la ligne, ou de la surface, qui jouira de la propriété dont il s'agit, dans le degré le plus haut, ou le plus bas, sans avoir rien perdu de celle dont elle jouissoit auparavant dans le même degré.

PROPOSITION LIII.

(737.) Une surface plane verticale étant donnée de grandeur, & étant supposée se mouvoir horizontalement dans un fluide immobile, trouver la figure qu'elle doit avoir pour éprouver la plus grande, ou la moindre, résistance.

Soit x les abscisses mesurées verticalement depuis la superficie du fluide, & y les ordonnées horizontales, dont la relation avec les abscisses exprime l'équation de la ligne qui termine la surface. D'après cela on voit que ydx sera une différentielle horizontale de la même surface, laquelle doit être constante, par la condition du problème. La résistance qu'éprouvera la même différentielle sera (654.) $= \frac{1}{2} m y x^{\frac{1}{2}} dx \sin \theta$: donc, suivant le Lemme précédent (736.), nous devons évaluer la différentielle de cette quantité à celle de ydx ; mais cette dernière expression étant constante, nous pouvons substituer q à sa place, & nous aurons $\frac{1}{2} m q x \sin \theta \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 0 = \frac{m q^2 u \sin^3 \theta}{4 y \sqrt{x}}$. Donc pour que la surface éprouve la plus grande, ou la plus petite, résistance, il faut que x ou y soit infinie, & par conséquent que y , ou x , soit zéro. La surface devra donc être d'une extension horizontale infinie, & d'une profondeur infiniment petite, pour qu'elle éprouve la moindre résistance possible.

COROLLAIRE.

(738.) Si la dimension de la surface dans le sens horizontal est déterminée, de façon qu'on ne puisse nullement l'excéder, la surface qui éprouvera la moindre résistance, sera celle d'un rectangle qui se meut, ayant deux de ses côtés parallèles à l'horizon.

PROPOSITION LIV.

(739.) Déterminer les dimensions que doit avoir la même surface verticale, ou le rectangle qui doit éprouver la plus grande, ou la moindre, résistance possible; dans le cas où l'on a égard à la dénivellation.

La résistance qu'éprouve le rectangle, en ayant égard à la dénivellation, est (640 & 658.) $= \frac{1}{2} m u y \sin \theta \left(x^{\frac{3}{2}} + \frac{u^3 \sin^3 \theta}{64} \right)$; & comme on demande que cette résistance soit la moindre possible, sa différentielle sera égale à zéro; c'est-à-dire que $\frac{1}{2} m u y x^{\frac{1}{2}} dx \sin \theta + \frac{1}{2} m u x^{\frac{3}{2}} dy \sin \theta + \frac{m u^4 dy \sin^4 \theta}{3 \cdot 64} = 0$; mais, puisque

Ch. VIII. DES FIG. DE MOIND. OU DE PLUS GR. RÉSIST. 295
 l'aire du rectangle doit être constante, on a $xy = q^2$, q exprimant une constante: donc $xy + ydx = 0$, ou $dx = -\frac{x dy}{y}$. Cette valeur étant substituée dans l'équation précédente, donne, après avoir divisé par $muy \sin \theta$, $-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{u^3 \sin^3 \theta}{3 \cdot 64^{\frac{1}{2}}} = 0$, ou $\frac{2u^3 \sin^3 \theta}{64^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{2}}$; d'où l'on tire $x = \frac{u^2 \sin^3 \theta (4)^{\frac{1}{2}}}{16^{\frac{1}{2}}}$, & $y = \frac{16^{\frac{1}{2}} q^2}{u^2 \sin^3 \theta (4)^{\frac{1}{2}}}$. Telles sont les dimensions que doit avoir le rectangle pour éprouver la moindre résistance possible.

COROLLAIRE I.

(740.) Les dimensions du rectangle dépendent donc, non-seulement de la vitesse u avec laquelle il se meut, mais encore de l'angle θ sous lequel le fluide le frappe. Plus l'une quelconque de ces deux quantités sera grande, plus doit être grande la profondeur x , ou la dimension verticale du rectangle, & plus la largeur y , ou la dimension dans le sens horizontal, doit être petite. Ce sera le contraire lorsque ces quantités diminueront.

COROLLAIRE II.

(741.) La largeur infinie y que nous avons déterminée (737.) ne convient donc au rectangle, que dans le cas où l'on négligerait la dénivellation, ou lorsqu'on aurait $u \sin \theta = 0$.

COROLLAIRE III.

(742.) Si l'on substitue la valeur de $x = \frac{u^2 \sin^3 \theta (4)^{\frac{1}{2}}}{16^{\frac{1}{2}}}$, & celle de $y = \frac{16^{\frac{1}{2}} q^2}{u^2 \sin^3 \theta (4)^{\frac{1}{2}}}$ dans l'expression $\frac{1}{2}muy \sin \theta \left(x^{\frac{1}{2}} + \frac{u^3 \sin^3 \theta}{64^{\frac{1}{2}}}\right)$ de la résistance qu'éprouve le rectangle, on aura la moindre résistance que l'aire rectangulaire puisse éprouver $= \frac{mq^2 u^2 \sin^3 \theta}{16(4)^{\frac{1}{2}}}$.

COROLLAIRE IV.

(743.) Ce qui a été dit dans les deux *Propositions* précédentes & leurs *Corollaires*, convient également à un parallépipède rectangle, qui flotte ayant sa base parallèle à l'horizon, lorsqu'on n'a point égard à l'effet que la dénivellation produit sur sa base.

PROPOSITION LV.

(744.) Trouver la ligne qui doit terminer un plan horizontal, pour

PLANC. IV.

qu'étant mu horizontalement dans un Fluide, il éprouve la plus grande, ou la moindre résistance possible.

FIG. 68.

Soit ABC le plan horizontal composé de deux moitiés égales & semblables, séparées l'une de l'autre par la ligne, ou axe BD , dans la direction duquel se fait le mouvement. Soit pris aussi les abscisses x sur BD , & les ordonnées y sur ses perpendiculaires. Soit supposé de plus, que le plan ait une épaisseur infiniment petite da , & que cette épaisseur forme par-tout un angle droit avec l'horison, on aura la force qu'éprouvera une différencielle de AB , ou $BC = mdady \left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{udy}{8\sqrt{dx^2+dy^2}} \right)^2$, attendu que $\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ exprime ici le sinus de l'angle sous lequel la différencielle rencontre le Fluide, & a la profondeur à laquelle le plan se trouve abaissé au-dessous de la superficie du Fluide. La différencielle de cette expression est . . .

$mdaddy \left(a \pm \frac{a^{\frac{1}{2}}udy}{2\sqrt{dx^2+dy^2}} \mp \frac{a^{\frac{1}{2}}udy^2}{4(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + \dots$
 $mdaddy \left(\frac{3u^2dy^2}{64(dx^2+dy^2)} - \frac{2u^2dy^4}{64(dx^2+dy^2)^2} \right)$, en supposant dx constante. Divisant maintenant par $mdaddy$, & faisant $-dy = \frac{bd}{i}$, i exprimant une variable, ou une indéterminée quelconque, & b une constante, on aura (736.) $a \mp \frac{a^{\frac{1}{2}}ub}{2\sqrt{b^2+i^2}} \pm \frac{a^{\frac{1}{2}}ub}{4\sqrt{(b^2+i^2)^{\frac{3}{2}}}} + \frac{3u^2b^2}{64(b^2+i^2)} - \frac{2u^2b^4}{64(b^2+i^2)^2} = n$, n exprimant une autre constante. Connoissant donc a & u , on déterminera i par cette équation, par conséquent cette quantité sera constante dans toute la ligne ABC , & dans l'équation $-dy = \frac{bdx}{i}$. On aura donc, en intégrant, $b - y = \frac{bx}{i}$, équation à la ligne droite; donc les lignes AB , BC , qui terminent le plan, ou qui couvrent la base AC doivent être droites.

COROLLAIRE I.

(745.) Ayant supposé $-dy = \frac{bdx}{i}$, ou que les ordonnées diminuent, tandis que les abscisses augmentent, il s'ensuit que l'origine des abscisses se trouvera en D .

COROLLAIRE II.

(746.) Faisant $x = 0$, on a $b - y = 0$, ou $y = b$. Donc la demi-ordonnée DC correspondante à l'abscisse $x = 0$, sera $= b$.

COROLLAIRE III.

COROLLAIRE III.

(747.) Pour déterminer le point B , dans lequel les droites AB ou CB coupent l'axe DB , nous n'avons qu'à supposer $y=0$; ce qui donnera, pour ce point, $b=\frac{bx}{\zeta}$, & par conséquent $x=DB=\zeta$.

COROLLAIRE IV.

(748.) Comme la quantité $\zeta=DB$ dépend de l'équation . . .

$$a \mp \frac{a^{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{b^2+u^2}} \pm \frac{a^{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}}}{4\sqrt{(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}}} + \frac{3u^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{64(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2u^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{64(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}} = n$$
, on voit que sans faire varier les quantités a & u , on trouveroit autant de valeurs différentes de cette quantité, qu'on substituerait de quantités différentes pour n : il s'en suit donc que même, sans faire varier ni a ni u , il y a une infinité de lignes droites différentes qui satisfont à la question.

COROLLAIRE V.

(749.) La force qu'éprouvera l'une quelconque de ces lignes droites, comme CB , qui couvrent la demi-ordonnée CD , sera $= mda.b \left(a^{\frac{1}{2}} + \frac{bu}{8(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}}$: d'où l'on voit que, u étant positif, la force sera d'autant plus petite que $\zeta=DB$ sera plus grande, & au contraire: c'est une connoissance que nous avons déjà par anticipation.

COROLLAIRE VI.

(750.) Si u est négatif, plus ζ sera grand, plus la force le sera; & au contraire.

COROLLAIRE VII.

(751.) Si l'on prolonge l'axe BD jusqu'en K , & si l'on termine le plan par les quatre droites AB , BC , CK , KA , la force qui agira sur ABC sera $= 2bmda \left(a^{\frac{1}{2}} + \frac{bu}{8(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}}$; & celle qui agira sur CKA sera $= 2bmda \left(a^{\frac{1}{2}} - \frac{bu}{8(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}}$, DB étant $= \zeta$, & $DK = Z$: donc la résistance sera $= 2bmda \left(\left(a^{\frac{1}{2}} + \frac{bu}{8(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(a^{\frac{1}{2}} - \frac{bu}{8(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)$; & par conséquent plus les axes DB & DK seront grands, plus la résistance sera petite.

S C O L I E.

(752.) De la solution de ce Problème & de ses Corollaires, nous déduisons seulement que les lignes AB , CB doivent être droites,

pour qu'elles éprouvent la plus grande, ou la plus petite résistance, & que cette résistance devient toujours de plus en plus petite, à mesure que le point *B* s'éloigne. Ce point peut cependant être donné, ou déterminé, ou, ce qui revient au même, la longueur du plan peut être déterminée, comme si elle devoit se réduire à *DE*. Il paroît évident que, dans ce cas, le plan doit se terminer par les droites *AE*, *CE*; & c'est ce qui arrive aussi dans quelques cas: mais dans d'autres il y a moins de résistance, lorsque la terminaison est faite par trois lignes droites *AG*, *GF*, & *FC*, la seconde étant parallèle à la base *AC*, ou perpendiculaire à l'axe, & *AG* étant = *CF*, de même que *GE* = *EF*; c'est ce qu'on va démontrer dans le Problème suivant.]

PROPOSITION LVI.

(753.) *Etant donnés la demi-base DC, & l'axe, ou longueur DE du plan horizontal, avec la parallèle EF à la base; trouver le point F, par lequel tirant la ligne CF, on termine le plan DEFC, de manière que ce plan, étant mu horizontalement, suivant la direction de l'axe DE, éprouve la plus grande, ou la moindre résistance.*

Ayant tiré *FH* parallèle à l'axe, & faisant *DE* = *x*, & *EF* = *DH* = *y*; la force qui agit sur *EF* sera = $mda \cdot y (a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2}u)^2$; & celle qui agit sur *FC* sera = $mda (b - y) (a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u(b-y)}{8(x^2 + (b-y)^2)^{\frac{1}{2}}})^2$; & les deux expressions réunies = $mda (ab \pm \frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}uy + \frac{1}{6}u^2y \pm \frac{\frac{1}{2}u(b-y)^2}{4(x^2 + (b-y)^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{u^2(b-y)^3}{64(x^2 + (b-y)^2)^{\frac{3}{2}}})$. Cette quantité devant être ou un *maximum*, ou un *minimum*, sa différentielle sera = 0; on aura donc
 $mda (\pm \frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}udy + \frac{1}{6}u^2dy \mp \frac{2a^{\frac{1}{2}}u(b-y)dy}{4(x^2 + (b-y)^2)^{\frac{1}{2}}} \pm \dots)$
 $mda (\frac{a^{\frac{1}{2}}u(b-y)^3dy}{4(x^2 + (b-y)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3u^2(b-y)^2dy}{64(x^2 + (b-y)^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2u^2(b-y)^4dy}{64(x^2 + (b-y)^2)^{\frac{3}{2}}}) = 0$; d'où l'on tire, en divisant par *udymda*, & en substituant *t* pour *b - y*,

* On remarquera dans ce calcul, 1°. que $\sin \theta = \frac{(b-y)}{(x^2 + (b-y)^2)^{\frac{1}{2}}}$; car $\sin \theta = \sin HFC$, & dans le triangle rectangle *HFC*, on a *FC* : 1 :: *HC* : $\sin HFC = \frac{HC}{FC}$; or *HC* = *CD* - *EF* = *b - y*, & *CF* = $(HF^2 + HC^2)^{\frac{1}{2}} = (x^2 + (b-y)^2)^{\frac{1}{2}}$; donc $\sin HFC$, ou $\sin \theta = \frac{b-y}{(x^2 + (b-y)^2)^{\frac{1}{2}}}$.
 2°. Que dans la différenciation on suppose *x* constante, comme cela doit être, Art. 752.

$$\pm a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}u \mp \frac{2a^{\frac{1}{2}}x^2t + a^{\frac{1}{2}}t^3}{(x^2+t^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3ux^2t^2 + ut^4}{16(x^2+t^2)^{\frac{5}{2}}} = 0, \text{ ou } \dots\dots\dots$$

$\pm 16a^{\frac{1}{2}}(x^2+t^2)^{\frac{3}{2}} \mp 16a^{\frac{1}{2}}(2x^2t+t^3) \sqrt{(x^2+t^2)} + ux^2(x^2-t^2) = 0$; expression qui donnera, en réduisant & ordonnant, $\dots\dots\dots$

$$16^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}t^6 + 2.16^{\frac{1}{2}}ax^2t^4 \dots * \dots - 16^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}x^6 \left\{ \begin{array}{l} \pm 32a^{\frac{1}{2}}ut^6 \pm 32a^{\frac{1}{2}}ux^2t^4 \mp 32a^{\frac{1}{2}}ux^4t^2 \mp 32a^{\frac{1}{2}}ux^6 \\ - u^{\frac{1}{2}}x^2t^4 - 2u^{\frac{1}{2}}x^4t^2 - u^{\frac{1}{2}}x^6 \end{array} \right\} = 0; \text{ équation du}$$

troisième degré, qui contient une racine, ou valeur de t , réelle & positive; c'est cette valeur qui satisfait à la question*.

COROLLAIRE I.

(754.) Si l'on fait, dans cette équation, $t=0$, il en résulte $-x^6(16a^{\frac{1}{2}} \pm u)^2$, quantité négative; & si l'on fait $t=x$, il en résulte $2.16^{\frac{1}{2}}ax^6$, quantité positive: donc t est moindre que x , toutes les fois que a a quelque valeur, ou que le plan est submergé à quelque profondeur dans le Fluide. Si l'on avoit $a=0$, ou si le plan coincidoit avec la superficie du Fluide, on auroit $t=x$: desorte que la plus grande valeur de l'angle HFC sera alors de 45° , & cet angle diminue à mesure que le plan doit être submergé à une plus grande profondeur.

COROLLAIRE II.

(755.) Ayant $a=\infty$, l'équation se change en celle-ci $\dots\dots\dots$ $t^6 + 2x^2t^4 - x^6 = 0$, ou $t^6 + 2x^2t^4 = x^6$, qui, en ajoutant de part & d'autre x^4t^2 , & divisant par t^2+x^2 , devient $t^4+x^2t^2=x^4$. Cette équation étant résolue, donne $t=x\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}}$; expression de la moindre valeur de t ; & dans ce cas, l'angle HFC est, à fort peu près, de $37^\circ 57'$ **.

COROLLAIRE III.

(756.) La valeur de t varie également, en faisant varier la vitesse u . Le cas dans lequel $u=\infty$, correspond à celui où $a=0$, & l'on a, dans ces deux cas, $t=x$. Lorsque $u=0$, ce qui correspond au cas où $a=\infty$, l'on a, comme ci-dessus, $t=x\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}}$.

* Ceci est évident, puisque le dernier terme $(16^{\frac{1}{2}}a \pm 32a^{\frac{1}{2}}u + u^2) - x^6$, ou $-x^6(16a^{\frac{1}{2}} \pm u)^2$ est négatif. (Voyez la Troisième Partie du Cours de Mathématiques de M. Bezout, Art. 201.)

** On trouve dans l'original $31^\circ 44'$, mais il est évident que c'est une faute de calcul; car $\frac{1}{2}\sqrt{5}=1,118$, & $\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}}=0,78$. Donc $t=x(0,78)$; c'est-à-dire que si $x=100$, t sera $=78$. Faisant la proportion $HF:HC::1:tang' HFC$, ou $x:t::1:tang' t$, on trouve $t=37^\circ 57'$. On voit par-là que t est à peu près $=\frac{1}{2}x$.

COROLLAIRE IV.

(757.) Comme t est plus petit que x , la quantité
 $\pm 32 a^2 u(t^4 + x^4 t^2 - x^4 t^2 - x^6)$ sera négative pour la partie choquante
AGFC du plan, & elle sera positive pour la partie choquée *AOLC*;
 donc la valeur de t correspondante à la première, & $= CH$, sera
 plus grande que la valeur de t correspondante à la seconde, &
 qui est $= CM$; de sorte que, supposant $DE = DN$, on doit avoir
 $GF < OL$, pour que le plan éprouve la moindre résistance.

COROLLAIRE V.

(758.) Le point F tombera sur l'axe DB toutes les fois que la
 valeur de t , déduite de l'équation, sera égale à la demi-base CD ;
 & dans ce cas, le demi-plan se réduira à un triangle. Mais si la
 valeur de t étoit plus grande que la demi-base, le point F tom-
 berait de l'autre côté de l'axe sur EG , & la ligne CF couperait
 l'axe entre D & E . Dans ce cas, si l'on termine le plan par une
 droite tirée depuis C jusqu'à E , on aura la Figure susceptible de
 la moindre résistance.

COROLLAIRE VI.

(759.) Les lignes EF & NL seront donc nulles dans tous ces
 cas, & le demi-plan se réduira à un triangle, comme AEC , ou
 AKC . Tous les cas de cette espèce se présentent, quelles que soient
 les valeurs de a & de u , lorsque DC est égale, ou moindre que
 $ED\sqrt{-\frac{1}{5} + \sqrt{5}}$, ou lorsque DC est à peu près égale, ou moins
 que $\frac{1}{2}ED$ (755. Note.).

COROLLAIRE VII.

(760.) Puisque les deux lignes CF , FE sont celles qui éprou-
 vent la moindre résistance, elles en éprouveront donc une moindre
 que deux autres lignes CQ , QE ; & celles-ci une moindre que
 deux autres, l'une desquelles seroit plus éloignée de CF . C'est une
 conséquence nécessaire de ce que toutes les racines de l'équation
 d'où l'on tire la valeur de t sont imaginaires, excepté celle qui
 donne la position de CF .

COROLLAIRE VIII.

(761.) Si entre les deux parallèles DC , EF , on prend un point

Ch. VIII. DES FIG. DE MOIND. OU DE PLUS GR. RÉSIST. 301
 quelconque comme I , & que de ce point on tire aux points C & E deux lignes droites CI & IE , ces droites éprouveront une plus grande résistance que celle qu'éprouvent les droites CF , FE . Car la ligne CI étant prolongée jusqu'en Q , il est clair, par le *Corollaire* précédent, que la résistance qu'éprouveront les lignes IQ & QE , fera moindre que celle qu'éprouvera IE , & par conséquent CQ & QE éprouveront moins de résistance que CI & IE : donc à plus forte raison CF & FE , qui éprouvent moins de résistance que CQ & QE , en éprouveront beaucoup moins que CI & IE .

COROLLAIRE I X.

(762.) De-là on conclut encore qu'avec quelques lignes qu'on termine le plan, qu'elles soient droites, courbes ou mixtes, pourvu que ces lignes soient comprises entre les deux parallèles EF , DC qui terminent le plan, elles éprouveront toujours une résistance plus grande que les deux lignes CF & FE .

COROLLAIRE X.

(763.) Plus la longueur du plan, ou de l'axe DE , sera grande, plus la résistance qu'il éprouvera sera petite; car FR & RS éprouvent une moindre résistance que FE : donc CR & RS en éprouvent aussi une moindre que CF & FE .

COROLLAIRE X I.

(764.) Un corps composé de deux prismes triangulaires ABC , AKC , dans lequel BD & DK sont plus grandes que $\frac{1}{4}DC$, étant mu suivant la direction de l'axe horizontal KB , de façon que les côtés $AB=BC$, & $CK=KA$, soient verticaux, éprouvera une moindre résistance que s'il étoit terminé par quelque surface courbe que ce soit : car on vient de voir, par la *Proposition* précédente, qu'une section quelconque horizontale, terminée par les droites AB , BC , CK & KA , éprouvera moins de résistance que si elle étoit terminée par d'autres lignes, quelles qu'elles fussent.

COROLLAIRE X I I.

(765.) On doit entendre la même chose d'un autre prisme quelconque, quoique ses côtés AB , BC , CK & KA ne soient pas verticaux, pourvu que les sections, ou différentielles horizontales, forment un angle constant avec l'horizon : car, en ce cas, la force

qu'éprouvera une différencielle quelconque , sera exprimée par $mbda(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{ub \sin \alpha}{8(b^2+x^2)^{\frac{1}{2}}})^2$; b exprimant la moitié de la largeur du prisme; & l'angle α que forme la différencielle horizontale du corps avec l'horison étant constant : il est par conséquent évident que les résultats qu'a donné la solution du Problème, ne peuvent changer, que ce Problème contient également le cas dont il s'agit ici, & qu'il n'est question que de substituer $u \sin \alpha$ à la place de u (§ 84 & § 86).

PROPOSITION LVII.

(766.) Connoissant la longueur BK du plan horizontal, ainsi que sa largeur AC, on demande BD, ou le point D, où l'on doit placer cette largeur, pour qu'en formant les deux triangles isocèles, ABC, CKA qui terminent le plan, ce plan éprouve la plus grande, ou la moindre résistance possible, étant mu horizontalement dans la direction de l'axe BK.

Faisant $BK = c$, $DC = b$, & $BD = x$, la force qui agit sur BC fera (§ 753.) $= mda(ab + \frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2}{4(x^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{u^2b^3}{64(x^2+b^2)})$; & celle qui agit sur CK fera $= mda(ab - \frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2}{4((c-x)^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{u^2b^3}{64((c-x)^2+b^2)})$. La résistance qui résulte de ces deux forces sera donc $\dots\dots\dots$
 $mda(\frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2}{4(x^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{u^2b^3}{64(x^2+b^2)} + \frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2}{4((c-x)^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{u^2b^3}{64((c-x)^2+b^2)})$; or cette résistance devant être la plus grande, ou la plus petite, sa différencielle sera = 0. Donc $mda(-\frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2xdx}{4(x^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2u^2b^3xdx}{64(x^2+b^2)^2}) + mda(\frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2(c-x)dx}{4((c-x)^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2u^2b^3(c-x)dx}{64((c-x)^2+b^2)^2}) = 0$. Divisant cette expression par $\frac{1}{2}mda.ub^2dx$, & transposant, on aura $\dots\dots\dots$
 $\frac{\frac{a^{\frac{1}{2}}(c-x)}{((c-x)^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{ub(c-x)}{8((c-x)^2+b^2)^2}}{(\frac{a^{\frac{1}{2}}x}{(x^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{ubx}{8(x^2+b^2)^2})}$. En résolvant cette équation, on en déduira la valeur de $x = BD$, & cela pour toutes les différentes valeurs qu'on peut donner aux quantités a & u .

COROLLAIRE I.

(767.) L'équation ne résout pas le cas dans lequel $a = 0$, ou $\frac{a}{u} = 0$, parce qu'il en résulteroit $-\frac{ub(c-x)}{8((c-x)^2+b^2)^2} = \frac{ubx}{8(x^2+b^2)^2}$; ce qui est impossible.

COROLLAIRE I I.

(768.) Au contraire, si l'on avoit $\frac{u}{a} = 0$, l'équation deviendrait $\frac{a^{\frac{1}{2}}(e-x)}{((e-x)^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}x}{(x^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}$: ce qui donne $x = \frac{1}{2}e$; c'est la valeur de x qui produit la moindre résistance.

COROLLAIRE I I I.

(769.) A mesure que le rapport $\frac{u}{a}$ augmente, la valeur de x , pour produire la moindre résistance, augmente aussi, mais cependant sans jamais parvenir à être $= e$; puisque, dans ce cas, l'équation deviendrait $0 = \frac{a^{\frac{1}{2}}e}{(e^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{ub e}{8(e^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$; ce qui est impossible.

COROLLAIRE I V.

(770.) Au contraire, la valeur de x qui produit la plus grande résistance, est moindre que $\frac{1}{2}e$; & l'on a $x=0$, lorsque $a^{\frac{1}{2}} = \frac{ub}{8(e^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}$.

PROPOSITION LVIII.

(771.) Soit un corps ABFA terminé par deux bases horizontales triangulaires & semblables ABC, DEF, rectangles en A & D, & par les trois autres plans ABED, CBEF, & ACFD, l'un desquels ABED est vertical. Soit supposé que ce corps se meuve horizontalement dans un Fluide, & dans la direction de ce même plan vertical ABED; on propose de trouver la relation entre la profondeur AD, & la largeur DF de la base, pour que, le volume du corps étant constant, ce corps éprouve la moindre résistance possible.

FIG. 69.

Supposons que GHI soit une section, ou différencielle horizontale du corps, laquelle par conséquent sera un triangle semblable aux bases : soit prolongé GH, & tiré la verticale CK, qui sera parallèle à AG, & faisons $AB=e$, $AC=b$, $AG=CK=a$, & $HK=z$. D'après cela on aura $GH=b-z$; le sinus de $GHI=ABC = \frac{b}{(b^2+e^2)^{\frac{1}{2}}}$; & la force qui agira sur la différencielle horizontale (584 & 586.) $= mda(b-z) \left(a^{\frac{1}{2}} + \frac{ubS}{8(b^2+e^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^2$; S exprimant le sinus de l'angle qui forme le plan CBEF avec le plan horizontal GHI. Mais on a $S = \frac{a^{\frac{1}{2}}(b^2+e^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^{\frac{1}{2}}}$ * : donc la force qui agit

* Voici le procédé qu'il faut suivre pour trouver cette valeur de S. Soit mené par la ligne

$$\text{sur la différencielle} = mda(b-z) \left(a^{\frac{1}{2}} + \frac{uba^{\frac{1}{2}}(b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}{8(b^2+c^2)^{\frac{1}{2}} + c^2(b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} = \\ mada(b-z) \left(1 + \frac{uba^{\frac{1}{2}}}{8(a^2(b^2+c^2)+c^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pareillement, les deux triangles ABC , GIH étant semblables, on aura $b:c::b-z:Gl = \frac{c(b-z)}{b}$: donc l'aire du triangle $GIH = \frac{c(b-z)^2}{2b}$; & l'espace qu'occupe la différencielle horizontale $= \frac{eda(b-z)^2}{2b}$. Cet espace devant être constant par la condition du problème, on aura $\frac{eda(b-z)^2}{2b} = q^2$, & par conséquent $da = \frac{2bq^2}{c(b-z)^2}$, q exprimant une constante. Substituant maintenant cette valeur de da dans l'expression de la force, elle se changera en $\frac{2mbq^2}{c(b-z)} \left(1 + \frac{uba^{\frac{1}{2}}}{8(a^2(b^2+c^2)+c^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}}$. Pour parvenir à la résolution du problème, nous n'avons qu'à éga-
ler la différencielle de cette force à celle de l'espace q^2 ; mais cette dernière étant $= 0$, la première le sera aussi, & nous aurons par conséquent

$$\frac{d\tau}{(b-z)^2} - \frac{2ubda^{\frac{1}{2}}d\tau}{8(b-z)^2(a^2(b^2+c^2)+c^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2uba^{\frac{1}{2}}c^2d\tau}{8(b-z)(a^2(b^2+c^2)+c^2)^{\frac{1}{2}}} - \\ - \frac{u^2b^2ad\tau}{64(b-z)^2(a^2(b^2+c^2)+c^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2u^2b^2ac^2d\tau}{64(b-z)(a^2(b^2+c^2)+c^2)^{\frac{1}{2}}} = 0^*$$

CK le plan vertical CRK , perpendiculaire au plan $CBEF$, lequel coupera ce dernier dans la ligne CR , & le plan horizontal GHI dans la ligne KR . Dans le triangle rectangle BAC , on a $BC = (b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}$, & par conséquent $\sin ACB = \sin GHI = \sin RHK = \frac{c}{(b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}$.

Dans le triangle HRK rectangle en R , on a $RK = HK \sin RHK = \frac{c^2}{(b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}$; & dans le triangle CRK rectangle en K , on a $CR = (CK^2 + KR^2)^{\frac{1}{2}} = \left(a^2 + \frac{c^4}{b^2+c^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{(a^2(b^2+c^2)+c^4)^{\frac{1}{2}}}{(b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}$. Ceci posé, on trouvera le $\sin CRK$, ou S , par cette proportion,

$$CR : 1 :: CK : \sin CRK, \text{ ce qui donne } \sin CRK, \text{ ou } S = \frac{CK}{CR} = \frac{a(b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2(b^2+c^2)+c^4)^{\frac{1}{2}}}.$$

* Ce passage présente une difficulté qui pourroit embarrasser quelques lecteurs, la voici. La différencielle de $\frac{2mbaq^2}{c(b-z)} \left(1 + \frac{uba^{\frac{1}{2}}}{8(a^2(b^2+c^2)+c^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}}$, ou en divisant par la quantité constante $\frac{2mbaq^2}{c}$, la différencielle de $\frac{1}{b-z} \left(1 + \frac{uba^{\frac{1}{2}}}{8(a^2(b^2+c^2)+c^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}}$, doit être égale à zéro. Or, d'après les règles générales du calcul, cette différencielle, égale à zéro, est incontestablement

$$\frac{d\tau}{(b-z)^2} + \frac{2ubda^{\frac{1}{2}}d\tau}{8(b-z)^2(a^2(b^2+c^2)+c^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2uba^{\frac{1}{2}}c^2d\tau}{64(b-z)(a^2(b^2+c^2)+c^2)^{\frac{1}{2}}} - \\ - \frac{2u^2b^2ad\tau}{64(b-z)^2(a^2(b^2+c^2)+c^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2u^2b^2ac^2d\tau}{64(b-z)(a^2(b^2+c^2)+c^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

Divisant ensuite, comme le

tion

tion se divise exactement par $-\frac{d\tau}{b-\tau}$: ainsi elle devient . . . PLANC. IV.

$$\frac{1}{(b-\tau)} + \frac{2ub\alpha^{\frac{1}{2}}}{8(b-\tau)(a^2(b^2+c^2)+c^2\tau^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2ub\alpha^{\frac{1}{2}}\cdot\tau}{8(a^2(b^2+c^2)+c^2\tau^2)^{\frac{3}{2}}} + \dots$$

$$\frac{u^2b^2\alpha}{64(b-\tau)(a^2(b^2+c^2)+c^2\tau^2)} + \frac{2u^2b^2\alpha\cdot\tau}{64(a^2(b^2+c^2)+c^2\tau^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Comme en prenant τ positivement, ou de K vers H , elle ne peut jamais parvenir à être plus grande que b , tous les termes de cette équation sont positifs, & par conséquent on n'en peut tirer aucune valeur pour τ . Ainsi il nous reste seulement à faire usage de celle qui résulte de la quantité $-\frac{d\tau}{b-\tau}$, par laquelle on a divisé la première équation. Cette quantité égale à zéro, en supposant τ négative, donne $\tau = -\infty$; c'est-à-dire que la base GH de la différencielle horizontale doit être infinie, pour qu'elle éprouve la moindre résistance possible ; & par conséquent tout le corps entier doit se réduire à un plan horizontal de la même étendue, pour qu'il éprouve la moindre résistance possible.

COROLLAIRE I.

(772.) Un double prisme $AFCHA$, dont les deux bases hori- FIG. 70.

veut l'Auteur, par $-\frac{d\tau}{b-\tau}$, on aura $-\frac{\tau}{b-\tau} - \frac{2ub\alpha^{\frac{1}{2}}}{8(b-\tau)(a^2(b^2+c^2)+c^2\tau^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{u^2b^2\alpha}{64(b-\tau)(a^2(b^2+c^2)+c^2\tau^2)} + \frac{2ub\alpha^{\frac{1}{2}}\cdot\tau}{8(a^2(b^2+c^2)+c^2\tau^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2u^2b^2\alpha\tau^2}{64(a^2(b^2+c^2)+c^2\tau^2)^{\frac{5}{2}}} = 0$. Cette équation est fort différente de celle de l'Auteur, & tous ses termes ne sont point positifs, soit qu'on prenne τ positivement, soit même qu'on le prenne négativement. Si l'équation donnée par l'Auteur ne pouvoit avoir lieu, il est clair que les conséquences qu'il en tire, tant dans la Proposition que dans ses Corollaires, tomberoient d'elles-mêmes : mais nous croyons que c'est avec raison que l'Auteur a modifié les règles générales du calcul différentiel, parce que la nature de la question l'exige. La différencielle qu'il donne, diffère de celle qu'on trouve directement par le calcul, en ce qu'il a pris pour la différencielle du facteur $\frac{1}{b-\tau}$, la quantité $\frac{d\tau}{(b-\tau)^2}$; au lieu que le calcul donne $\frac{d\tau}{(b-\tau)}$, & c'est cette différence qui en produit dans les signes des trois premiers termes de la différencielle. Or cette modification est indiquée par la nature de la question. En effet, AG étant $= a$, hauteur de la surface supérieure au-dessus de la section, ou différencielle, GHI , à mesure que a diminuera, HK ou τ diminuera : par conséquent $d\tau$ est l'expression du décrement de la quantité τ , lequel est égal à l'increment de $GH = b - \tau$, qui est celui qu'on doit considérer. Comme la partie variable de cette quantité est négative, ou est exprimée par $-\tau$, son décrement devra être pris positivement, ainsi pour $d(-\tau)$ il faudra écrire $d\tau$. Au reste, on fera attention que la Figure suppose la base inférieure du corps plus petite que la supérieure : si on l'avoit supposée plus grande, ce qui eût été conforme à la conséquence de la Proposition, alors le point H ayant tombé de l'autre côté de K , par rapport à G , on auroit eu $GH = b + \tau$, & la difficulté qui résulte des signes n'auroit plus eu lieu.

TOME I.

Qq

fontales sont égales, & dont les arrêtes *AE*, *BF*, *CG* & *DH* sont verticales, éprouvera donc moins de résistance qu'aucun autre prisme qui lui seroit égal, & dont la base inférieure *EFGH* seroit moindre que la supérieure *ABCD*.

COROLLAIRE II.

(773.) Ce qu'on vient de dire des prismes doit s'entendre de même de tout autre corps, dont les bases, ou sections horizontales, ne seroient pas des triangles, mais des plans terminés par une courbe quelconque comme *ABC*. Car la différencielle horizontale étant divisée en différens petits quadrilateres sensiblement plans, on démontrera la même chose pour chacun en particulier, & par conséquent pour le tout, ou pour toute la différencielle horizontale, ainsi que pour tout le corps.

PROPOSITION LIX.

(774.) Trouver la ligne qui doit terminer un plan horizontal, pour qu'étant mu horizontalement dans un Fluide, il éprouve la plus grande, ou la moindre, force possible, & qu'en même temps il renferme l'aire la plus grande, ou la plus petite.

On a déjà résolu ce problème, Art. 744, quant à la première partie, ou condition; & nous avons trouvé que la différencielle de la force qui agit sur une différencielle de la ligne cherchée, est = . . .

$$mdaddy \left(a \pm \frac{\frac{a^2 u dy}{2(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}}{\frac{a^2 u dy}{4(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}} \right) + \dots$$

$mdaddy \left(\frac{3u^2 dy^2}{64(dx^2 + dy^2)} - \frac{2u^2 dy^4}{64(dx^2 + dy^2)^2} \right)$. Cette différencielle doit maintenant être égale à celle qui résulte de la différenciation de $mdaxdy$, qui est la différencielle de l'aire : or cette différencielle est $mdaxddy$ * : donc, après avoir divisé par $mdaddy$, nous aurons

$$a \pm \frac{\frac{a^2 u dy}{2(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}}{\frac{a^2 u dy}{4(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}} \mp \frac{3u^2 dy^2}{64(dx^2 + dy^2)} - \frac{2u^2 dy^4}{64(dx^2 + dy^2)^2} = x.$$

Faisant maintenant $-dy = \frac{dx}{b}$, z exprimant une quantité variable,

$$\text{ \& } b \text{ une constante, on aura } ** \ x = a \mp \frac{\frac{a^2 u z}{4(b^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}}{(2b^2 + z^2)} +$$

$$\frac{u^2 z^2}{64(b^2 + z^2)^2} (3b^2 + z^2). \text{ Prenant la différencielle de cette équation, on aura }$$

* On regarde encore x comme constante, par les mêmes raisons que ci-dessus.

** Le calcul de l'Auteur paroît ici en défaut. On est parvenu à l'équation

$$x = \frac{a}{2} + \frac{\frac{a^2 u dy}{2(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}}{\frac{a^2 u dy}{4(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}} \mp \frac{3u^2 dy^2}{64(dx^2 + dy^2)} - \frac{2u^2 dy^4}{64(dx^2 + dy^2)^2}. \text{ On suppose}$$

$dx = \mp \frac{a^{\frac{1}{2}}ub^{\frac{1}{2}}d\tau}{4(b^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}} (2b^2-\tau^2) + \frac{2u^2b^2\tau d\tau}{64(b^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}, (3b^2-\tau^2);$ & cette valeur étant substituée dans l'équation précédente $-dy = \frac{\tau dx}{b}$, on aura $-dy = \mp \frac{a^{\frac{1}{2}}ub^{\frac{1}{2}}d\tau}{4(b^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}} (2b^2-\tau^2) + \frac{2u^2b^2\tau d\tau}{64(b^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}} (3b^2-\tau^2);$ & en intégrant $b-y = \mp \frac{a^{\frac{1}{2}}ub\tau^2}{4(b^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{u^2b}{32} \int \frac{\tau^2 d\tau}{(b^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}$ $(3b^2-\tau^2)$. En supposant qu'on connoisse la valeur de τ , on aura par conséquent les valeurs de x & de y , & on pourra décrire la ligne.

COROLLAIRE I.

(775.) Si, au lieu de la plus grande, ou de la plus petite, force, on demandoit la ligne qui doit éprouver la plus grande, ou la moindre, résistance: comme elle est composée de deux parties, l'une choquante, & l'autre choquée, la différencielle de la résistance qui résulte de la somme des forces qui agissent sur les deux différencielles opposées de la ligne cherchée, fera

$$mdaddy \left(\frac{a^{\frac{1}{2}}dv}{2(ax^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{a^{\frac{1}{2}}dy}{2(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}}udv}{4(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{a^{\frac{1}{2}}udy}{4(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}} \right) +$$

$$mdaddy \left(\frac{3u^2dy^2}{64(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3u^2dx^2}{64(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2u^2dy^4}{64(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2u^2dx^4}{64(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}} \right).$$

La différencielle de l'aire est $= mdady (x+X)$, & la différencielle de cette différencielle est $= mdaddy (x+X)$, x exprimant les abscisses de la partie choquante, & X celles de la partie choquée. Or c'est à cette dernière différencielle qu'il faut égaler celle de la résistance: formant donc cette équation, divisant par $mdaddy$, & faisant $-dy = \frac{\tau dx}{b} = \frac{ZdX}{b}$, on aura

$$x+X = -\frac{a^{\frac{1}{2}}u\tau}{4(b^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}} (2b^2+\tau^2) - \frac{a^{\frac{1}{2}}uZ}{4(b^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}} (2b^2+Z^2) + \dots$$

$$\frac{u^2\tau^2}{64(b^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}} (2b^2+\tau^2) - \frac{u^2Z^2}{64(b^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}} (2b^2+Z^2) *.$$

$-dy = \frac{\tau dx}{b}$, ou $dy = -\frac{\tau dx}{b}$, & l'on substitue, dans l'équation ci-dessus, cette valeur supposée de dy . Or il est évident que la substitution faite, on aura

$$x = a \mp \frac{a^{\frac{1}{2}}u\tau}{4(b^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}} (2b^2+\tau^2) + \frac{u^2\tau^2}{64(b^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}} (3b^2+\tau^2), \text{ \& non } x = a \pm \frac{a^{\frac{1}{2}}u\tau}{4(b^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}} (2b^2+\tau^2) + 6c:$$

comme on le trouve dans le texte Espagnol. C'est une erreur, si elle est réelle, seroit de la plus grande conséquence, si l'on faisoit usage de cette expression générale. Comme la différence n'est que dans les signes, nous avons rétabli ce passage.

* On retrouve ici la même erreur que dans l'Article précédent. Ceci nous fait penser que l'Auteur

COROLLAIRE I I.

PLANC. IV.

(776.) Si l'on suppose, en outre, qu'on prenne constamment les abscisses x de la partie choquée égales aux abscisses X de la partie choquée, de façon qu'on ait constamment $x = X$, on aura aussi $z = Z$, & l'équation deviendra $x = \frac{a^2 u r}{4(b^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}(2b^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} *$ & $b - y = \frac{a^2 u b r^2}{4(b^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}$, ou enfin $y = b - \frac{a^2 u b r^2}{4(b^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}$.

COROLLAIRE I I I.

(777.) Multipliant en croix les deux équations précédentes, on aura $\frac{(b-y)a^2 u r(2b^2 + r^2)}{4(b^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^2 u b r^2 x}{4(b^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}$; & en divisant par $\frac{a^2 u r}{4(b^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}$, il vient $(b-y)(2b^2 + r^2) = b r x$; ou $b - y = \frac{b r x}{2b^2 + r^2}$; c'est l'équation de la courbe.

COROLLAIRE I V.

FIG. 78.

(778.) Si l'on suppose $b - y = 0$, on aura $x = 0$, & $y = b$: prenant donc C pour l'origine, & menant, perpendiculairement à l'axe CA des abscisses, la droite $CB = b$, le point B sera l'origine de la courbe pour les deux parties choquantes & choquées.

n'a pas fait à part les calculs de ce *Corollaire*, & qu'il s'est contenté d'employer le résultat de la *Proposition*, en y faisant les changements de signe convenables. Si nos réflexions sont justes, on ne

peut avoir $x + X = \frac{a^2 u r}{4(b^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}(2b^2 + r^2) + \frac{a^2 u Z}{4(b^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}}}(2b^2 + Z^2) + \theta c$ comme on le trouve dans le texte. Mais $x + X = -\frac{a^2 u r}{4(b^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}(2b^2 + r^2) - \frac{a^2 u Z}{4(b^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}}}(2b^2 + Z^2) + \theta c$.

* Par une suite de la même faute, l'expression du *Corollaire* précédent ne donne point

$x = \frac{a^2 u r}{4(b^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}(2b^2 + r^2)$; mais $x = -\frac{a^2 u r}{4(b^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}(2b^2 + r^2)$. On doit cependant employer la valeur donnée par l'Auteur, & par conséquent l'erreur dont il est question dans la note des deux *Articles* précédents ne peut altérer les conséquences que l'Auteur tire dans les *Corollaires* suivants; puisqu'elles dérivent toutes de l'équation particulière de l'*Article* présent. En effet, l'Auteur supposant ici qu'on a constamment $x = X$, & faisant en conséquence $x + X = 2x$, il s'en suit que, dans cette hypothèse, x représente tout à la fois les abscisses de la partie choquante, & celles de la partie choquée, selon qu'on la prendra positivement ou négativement. Le calcul donne directement les abscisses négatives, & si on les prend positivement, comme cela doit être, puisqu'il s'agit de la partie choquante, on trouve pour x & pour y les mêmes valeurs que l'Auteur.

COROLLAIRE V.

(779.) Si nous prenons la différencielle de $x = \frac{a^{\frac{1}{2}} u \tau (2b^2 + \tau^2)}{4(b^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}}$, nous trouverons $dx = \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} u d\tau \left(\frac{2b^2 + \tau^2}{(b^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{6b^2 \tau^2 + 3\tau^4}{(b^2 + \tau^2)^{\frac{5}{2}}} \right)$; différencielle qui, étant égale à zéro, donne, en réduisant, $2b^2 - \tau^2 = 0$, ou $\tau = b \sqrt{2}$. Cette valeur étant substituée dans celle de x , donne

$$x = \frac{a^{\frac{1}{2}} u b \sqrt{2} (2b^2 + 2b^2)}{4(b^2 + 2b^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} u \sqrt{6}.$$

la plus grande x , & par conséquent CA étant égal à $\frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} u \sqrt{6}$, A sera le point jusqu'où doit s'étendre la courbe.

COROLLAIRE VI.

(780.) Si l'on prend de même la différencielle de $y = b - \frac{a^{\frac{1}{2}} u \tau^2}{4(b^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}}$, on aura $dy = -\frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} u b d\tau \left(\frac{2\tau}{(b^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3\tau^3}{(b^2 + \tau^2)^{\frac{5}{2}}} \right)$; cette différencielle étant égale à zéro, donne $\tau = 0$, & $2b - \tau^2 = 0$, ou $\tau = b \sqrt{2}$, comme dans le Corollaire précédent. La première valeur, $\tau = 0$, étant substituée dans celle de y , donne $y = b$; b est donc la valeur d'une des plus grandes ordonnées, & celle qui correspond à l'origine C ; car ayant $\tau = 0$, on a (777.) $x = 0$. La seconde valeur, $\tau = b \sqrt{2}$, étant substituée dans celle de y , donne la moindre $y = b - \frac{a^{\frac{1}{2}} u}{6\sqrt{3}}$; & elle correspond au point A de la plus grande x .

COROLLAIRE VII.

(781.) Si l'on a donc $y = b - \frac{a^{\frac{1}{2}} u}{6\sqrt{3}} = 0$, le point A tombera sur l'axe CA ; si l'on a $b > \frac{a^{\frac{1}{2}} u}{6\sqrt{3}}$, la courbe ne s'étendra pas jusqu'à l'axe, & elle ne renfermera pas d'espace; enfin si l'on a $b < \frac{a^{\frac{1}{2}} u}{6\sqrt{3}}$, la courbe coupera l'axe.

COROLLAIRE VIII.

(782.) Dans le cas où $\frac{dy}{dx} = \frac{\tau}{b} = \infty$, on aura $\tau = \infty$, cette valeur étant substituée dans celle de $y = b - \frac{a^{\frac{1}{2}} u \tau^2}{4(b^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}}$, donne $y = b - 0$, ou $y = b$: c'est la valeur de l'autre plus grande ordonnée, & celle qui correspond au point F des abscisses.

COROLLAIRE IX.

(783.) Par les Corollaires V & VI, Art. 779 & 780, nous avons $-\frac{dy}{dx} = \frac{bz(2(b^2+z^2)-3z^2)}{(2b^2+3z^2)(b^2+z^2)-6b^2z^2-3z^4} = \frac{z}{b}$. Dans le point B, où $z=0$, on a $-\frac{dy}{dx}=0$; ce qui indique que la courbe, en ce point, est parallèle à l'axe. De même dans le point D, où $z=\infty$, on a $-\frac{dy}{dx}=\infty$; c'est-à-dire que la courbe, en ce point, est perpendiculaire à l'axe. Enfin dans le point A, où $z=b\sqrt{2}$, on a $-\frac{dy}{dx} = \frac{b\sqrt{2}}{b} = \frac{\sqrt{2}}{1}$: donc si AG est supposée une tangente à la courbe en A, on aura $\frac{AE}{EG} = \frac{\sqrt{2}}{1}$.

COROLLAIRE X.

(784.) En supposant $2b^2z+z^3=(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$, on aura $x=\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}u=CF$. Il résulte de cette équation deux valeurs de z , l'une $z=\infty$ *, qui nous a déjà donné $y=FD$; & l'autre $z=b\sqrt{(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5})}$, qui donne $y=FH=b-\frac{a^{\frac{1}{2}}u(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5})}{(2+2\sqrt{5})^{\frac{1}{2}}}$.

COROLLAIRE XI.

(785.) On voit, par ce qu'on vient de dire, que la courbe a deux branches: la première BHA, est celle qui éprouve la moindre résistance; & la seconde AD, est celle qui éprouve la plus grande.

COROLLAIRE XII.

(786.) L'amplitude ED de cette dernière branche est $=\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}u\sqrt{6}-\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}u=\frac{1}{6}a^{\frac{1}{2}}u(4\sqrt{6}-9)$; donc la relation entre son amplitude ED & sa longitude EA=b, sera $\frac{a^{\frac{1}{2}}u(4\sqrt{6}-9)}{36b}$. Pareillement, la relation entre l'amplitude CB=b de l'autre branche, & sa longitude AC= $\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}u\sqrt{6}=\frac{9b}{a^{\frac{1}{2}}u\sqrt{6}}$. Mais dans le point A, où l'axe est coupé par la courbe, on a (781.) $b=\frac{a^{\frac{1}{2}}u}{6\sqrt{3}}$: donc la relation entre l'amplitude & la longitude de la seconde branche, ou la première relation ci-dessus, sera $=\frac{6\sqrt{3}(4\sqrt{6}-9)}{36}=\frac{4\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{2}$; & la même rela-

* Car $dx=0$, & par conséquent $\frac{z}{b}=-\frac{dv}{dx}=\frac{-dy}{0}=\infty$.

Ch. VIII. DES FIG. DE MOIND. OU DE PLUS GR. RÉSIST. 311
 tion pour la première branche est pareillement $= \frac{9}{6\sqrt{3}V6} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

COROLLAIRE XII.

(787.) Les deux branches de la courbe sont donc, comme on le voit, très-distinctes, la branche AD étant beaucoup plus aiguë en EAD , que l'autre branche BHA en BAC .

COROLLAIRE XI V.

(788.) Comme l'abscisse $x = \frac{a^{\frac{1}{2}}u(2b^2 + \zeta^2)}{4(b^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}}$, & l'ordonnée $b - y = \frac{a^{\frac{1}{2}}u\zeta^2}{4(b^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}}$, sont chacune multipliées par $a^{\frac{1}{2}}u$, leur rapport demeurera constant, quelque valeur qu'on donne aux quantités a & u . Donc si la valeur de b est la même pour toutes les profondeurs dans le fluide, comme pour toutes les vitesses, la courbe sera la même pour tous les cas.

COROLLAIRE XV.

(789.) Le corps qui éprouvera le moins de résistance dans le fluide, en supposant la même largeur, ou la même relation entre CB & CA , & qui en même temps renfermera le plus grand espace, sera celui dont toutes les sections horizontales seront comme IBA .

COROLLAIRE XVI.

(790.) Si l'on vouloir prendre une partie de la courbe comme KB , de sorte que la longueur KL fût à la largeur LB , comme un nombre donné n , est à l'unité, l'on auroit $KL = x = \frac{a^{\frac{1}{2}}u(2b^2 + \zeta^2)}{4(b^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}}$, & $LB = b - y = \frac{a^{\frac{1}{2}}u\zeta^2}{4(b^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}}$, & l'on en déduiroit $2b^2\zeta + \zeta^3 = nb\zeta^2$, ou $2b^2 + \zeta^2 = nb\zeta$, ce qui donne $\zeta = \frac{1}{2}b(n \pm \sqrt{n^2 - 8})$. Substituant cette valeur de ζ dans celle de $LB = \frac{a^{\frac{1}{2}}u\zeta^2}{4(b^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}}$, il en résulte . . .
 $LB = \frac{a^{\frac{1}{2}}u(n^2 \pm n\sqrt{n^2 - 8} - 4)}{(4 + 2(n^2 \pm n\sqrt{n^2 - 8}) - 4)^{\frac{3}{2}}}$, & $a^{\frac{1}{2}}u = \frac{LB(4 + 2(n^2 \pm n\sqrt{n^2 - 8}) - 4)^{\frac{3}{2}}}{n^2 \pm n\sqrt{n^2 - 8} - 4}$.
 Cette valeur de $a^{\frac{1}{2}}u$ étant substituée dans celle de la plus grande abscisse CA (779.) $= \frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}u\sqrt{6}$, & dans celle de la plus grande ordonnée CB (781.) $= \frac{a^{\frac{1}{2}}u}{6\sqrt{3}}$, on aura les dimensions CB & CA , au moyen desquelles on pourra décrire, comme auparavant, la courbe, qui passera par le point K .

S C O L I E.

(791.) On trouve dans la Table suivante les valeurs de x & de y qui correspondent aux différentes valeurs de z dans la supposition de $b = 1$. La premiere colonne à gauche de cette Table contient les valeurs de z ; la seconde & la troisieme colonne contiennent, pour la premiere branche, les valeurs des abscisses & des ordonnées qui leur correspondent. Les quatrième, cinquieme & sixieme colonnes contiennent les mêmes éléments pour la seconde branche.

TABLE des *Abscisses & des Ordonnées de la Courbe qui, en renfermant le plus grand, ou le moindre, espace, éprouve la moindre, ou la plus grande, résistance.*

Premiere Branche.			Seconde Branche.		
z	x	$b-y$	z	x	$b-y$
0	0	0	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	1
$\frac{1}{10}$	$\frac{1809}{1021/303}$	$\frac{45}{101/303}$	2	$\frac{18\sqrt{15}}{25}$	$\frac{6\sqrt{15}}{25}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{99\sqrt{51}}{2.17^2}$	$\frac{6\sqrt{51}}{17^2}$	4	$\frac{108\sqrt{51}}{17^2}$	$\frac{24\sqrt{51}}{17^2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{27\sqrt{15}}{50}$	$\frac{3\sqrt{15}}{25}$	∞	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0
1	$\frac{9\sqrt{6}}{8}$	$\frac{3\sqrt{6}}{8}$			
$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	1			

* Si, dans les formules qui donnent la valeur de x & de $b-y$, l'on substitue pour a^2u la valeur z ; si l'on fait $b=1$, & z successivement égal aux nombres de la premiere colonne, on aura tous les nombres de cette Table. Or, a^2u étant constant, on peut en prendre la valeur pour n'importe quel point de la courbe. Au point A, où la courbe coupe l'axe, on a (781) $b = \frac{a^2u}{6\sqrt{3}}$; donc $a^2u = 6b\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$, puisque $b=1$: c'est la quantité qu'on a substituée dans les valeurs de x & de $b-y$.

CHAPITRE IX.

Du Mouvement progressif horizontal que prennent les corps flottants, lorsqu'ils sont poussés par une ou par plusieurs puissances.

PROPOSITION LX.

(792.) **T**ROUVER la relation entre le temps & la vitesse qu'acquiert un corps flottant, lorsqu'il est poussé par une puissance dont la direction est horizontale, & placée dans le centre des résistances, en supposant que celui-ci coïncide avec le centre de gravité.

La direction de la puissance étant horizontale, celle de la résistance le sera pareillement ; & comme elles concourent toutes les deux dans un point, la résultante des forces sera comme une seule puissance qui agit sur le centre de gravité, puisqu'on suppose que ce centre coïncide avec celui des résistances. En conséquence, le corps ne prendra pas de mouvement de rotation, & il se mouvra seulement horizontalement, suivant la direction de la puissance. Cette puissance étant nommée π , & M représentant la masse du corps, nous aurons (19.) $dt(\pi - Ru \mp Qu^2 - Nu^4) = Mdu$, la quantité $Ru \pm Qu^2 + Nu^4$ exprimant les résistances qu'éprouve le corps (674.), ou $dt = \frac{Mdu}{\pi - Ru \mp Qu^2 - Nu^4}$. Cette équation, étant intégrée, donne

$t = M \int \frac{du}{\pi - Ru \mp Qu^2 - Nu^4}$, ou, en divisant le numérateur & le dénominateur par N , $t = \frac{M}{N} \int \frac{du}{\frac{\pi}{N} - \frac{Ru}{N} \mp \frac{Qu^2}{N} - u^4}$. Soit maintenant

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi}{N} - \frac{Ru}{N} \mp \frac{Qu^2}{N} - u^4 &= f^2 h - f^2 (g-h) u - f^2 u^2 - u^4 \\ &\quad - gh(g-h) u + (g-h)^2 u^2 \\ &\quad + gh u^2 \end{aligned} \right\} \text{ Dans}$$

cette équation il y a deux racines réelles, l'une positive $u = h$, & l'autre négative $u = -g$, avec deux racines imaginaires contenues dans l'équation $f^2 - (g-h)u + u^2 = 0$. Nous aurons donc . . .

$$dt = \frac{(A+Eu) du}{f^2 - (g-h)u + u^2} + \frac{C du}{g+u} + \frac{D du}{h-u}; \quad D \text{ étant } = \frac{M}{N(g+h)(2h^2 - g^2 + f^2)};$$

$$C = \frac{M}{N(g+h)(2g^2 - g^2 + f^2)}; \quad B = D - C, \text{ \& } A = C(2g-h) - D(g-2h).$$

TOME I.

R r

L'équation étant sous cette forme, on en déduit, en intégrant, $t = \frac{A + \frac{1}{2}B(g-h)}{f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2} \left(\text{Arc tang}(u - \frac{1}{2}(g-h)) - \text{Arc tang}(V - \frac{1}{2}(g-h)) \right) + \frac{1}{2}B \log \left(\frac{f^2 - (g-h)u + u^2}{f^2 - (g-h)V + V^2} \right) + C \log \left(\frac{g+u}{g+V} \right) + D \log \left(\frac{h-V}{h-u} \right)$. On observera que ces arcs appartiennent à un cercle dont le rayon est $= (f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2)^{\frac{1}{2}}$; & que V exprime la vitesse positive avec laquelle le corps se mouvoit lorsque la puissance π a commencé à agir*.

* Nous allons développer les calculs de cette Proposition, qui pourroient embarrasser quelques Lecteurs.

L'Auteur parvient à l'équation $t = \frac{M}{N} \int \frac{du}{\frac{\pi}{N} - \frac{Ru}{N} + \frac{Qu^2}{N} - u^4}$: ainsi il ne s'agit, pour avoir t , que de trouver la valeur de l'intégrale $\int \frac{du}{\frac{\pi}{N} - \frac{Ru}{N} + \frac{Qu^2}{N} - u^4}$, & de la multiplier par $\frac{M}{N}$. Pour trouver l'intégrale de cette fraction, il faut décomposer son dénominateur en ses facteurs; en conséquence, on considérera $\frac{\pi}{N} - \frac{R}{N}u + \frac{Q}{N}u^2 - u^4$ comme $= 0$;

& sous cette forme, on voit qu'il s'agit de trouver les racines d'une équation du quatrième degré, dont le terme qui contient la troisième puissance de l'inconnue est évanoui, puisque ce sont ces racines qui doivent former les facteurs de cette quantité. (Voyez la *Troisième Partie* du *Cours de Mathématiques* de M. Bezout, Art. 178.).

La vitesse u est une quantité réelle qui peut être positive, ou négative; ainsi cette équation ne peut avoir ses quatre racines imaginaires; & ce qui suit faisant voir qu'elle ne peut les avoir toutes quatre réelles, il faut conclure qu'il y en a deux réelles & deux imaginaires (ibid. Art. 204 & suiv.). Dans cette combinaison, l'inspection seule de la proposée, & l'état de la question, font connoître que les deux racines réelles ne peuvent être toutes deux positives, ni toutes deux négatives; car si l'on avoit $u = \pm g$, & $u = \pm h$, on auroit $g \mp u = 0$, & $h \mp u = 0$, & par conséquent $(g \mp u)(h \mp u)$, ou $gh \mp (g+h)u + u^2 = 0$; ce qui fait voir que l'autre facteur du second degré, qui, multiplié par celui-ci, doit produire la proposée dépourvue du terme qui contient u^4 , & ayant le terme u^2 négatif, est nécessairement de cette forme $f^2 \mp (g+h)u - u^2 = 0$. Or, f^2 étant positif, ce second facteur ne peut avoir ses racines imaginaires, comme on le suppose, & les ayant réelles, alors la proposée auroit ses quatre racines réelles, ce qui ne peut convenir; car, dans le cas où l'on admet le signe +, c'est-à-dire, dans la supposition des racines négatives, le second terme de l'équation qui en résulte n'est pas négatif, comme dans la proposée. A la vérité, en admettant le signe -, ou en supposant les racines positives, le second terme de l'équation résultante est négatif; mais, dans ce cas, comme dans le précédent, le troisième terme est excessivement positif, ce qui ne peut être admis dans la pratique, ainsi qu'on va le voir. Cette hypothèse ne peut donc avoir lieu, & les quatre racines ne peuvent être réelles.

Il faut donc que les deux racines réelles soient, l'une positive, & l'autre négative; c'est la seule combinaison qui soit compatible avec l'état de la question, puisqu'il s'agit de trouver le rapport entre la vitesse acquise u , & le temps employé à l'acquies, & cette vitesse peut être positive, ou négative. Ainsi cette seule considération suffiroit, indépendamment de toute analyse algébrique, pour exclure toutes les autres combinaisons des racines. Mais poursuivons. Soit $u = -g$, & $u = h$, on aura $(h-u)(g+u)$, ou $gh - (g-h)u - u^2 = 0$; l'autre

COROLLAIRE I.

(793.) Dans le cas où le corps auroit une vitesse déterminée, & que cette vitesse viendrait à diminuer, à cause que la somme des forces résistances deviendrait plus grande que la puissance π ; l'équation seroit, en ce cas, $dt(\pi - Ru \mp Qu^2 - Nu^4) = -Mdu$, la même qu'auparavant, avec cette seule différence, que du est négative. Donc la même équation & les mêmes racines satisferont

facteur, qui doit concourir avec celui-ci pour produire la proposée, sera de cette forme $f^2 - (g-h)u + u^2 = 0$. On aura donc $f^2 gh - f^2(g-h)u - \frac{f^2 u^2 - u^4}{-gh(g-h)u + (g-h)^2 u^2} \} = \frac{Ru}{N} - \frac{Qu^2}{N} - u^4$;

équation dont le second terme est négatif, ayant $h < g$, & dont le troisième terme peut être positif, ou négatif, selon la valeur de f^2 . Les deux racines de l'équation $f^2 - (g-h)u + u^2 = 0$, peuvent à la vérité être réelles; mais pour que ce cas extrême arrive, il faut que f^2 soit moindre que $\frac{1}{4}(g-h)^2$, ce qui rend le troisième terme $u^2(-f^2 + (g-h)^2 + gh)$ excessivement positif, car ayant $f^2 < \frac{1}{4}(g-h)^2$, on aura à plus forte raison $f^2 < (g-h)^2$, & encore à bien plus forte raison $f^2 < (g-h)^2 + gh$. Or (666 & 667, Note) pour que le troisième terme qui est celui qui suit la raison du carré des vitesses soit ainsi excessivement positif, il faut que la partie choquante du corps soit beaucoup plus aiguë que la partie choquée, ce qui ne convient nullement avec ce que la pratique exige. Venons maintenant à l'intégration dont il s'agit.

En substituant dans la valeur de dt , les facteurs dans lesquels nous venons de supposer son dénominateur décomposé, on aura $dt = \frac{M du}{(h-u)(g+u)(f^2 - (g-h)u + u^2)}$. Supposons que cette valeur de dt soit aussi représentée par $\frac{(A+Bu)du}{f^2 - (g-h)u + u^2} + \frac{Cdu}{g+u} + \frac{Ddu}{h-u}$, les Coefficients A, B, C, D étant indéterminés. Alors en réduisant au même dénominateur les fractions qui composeront le second membre, supprimant le dénominateur commun, passant tous les termes dans un membre, & réduisant, on aura $(ghA + f^2 hC + f^2 gD - \frac{M}{N})u^0 + (A - gA + ghB - ghC + h^2 C - f^2 C - g^2 D + ghD + f^2 D)u + (-A + hB - gB + gC + hD)u^2 + (D - B - C)u^3 = 0$. Or, pour que cette équation ait lieu indépendamment de toute valeur de u , il faut que la somme des quantités qui multiplient chaque puissance de u soit $= 0$: remplissant donc cette condition, on aura quatre équations à l'aide desquelles on déterminera, par les règles ordinaires de l'Algebre, les valeurs des coefficients A, B, C, D . Ces opérations faites, on trouvera $B = D - C$; $A = C(2g - h) - D(g - 2h)$; $D = \frac{M}{N(g+h)(2h^2 - gh + f^2)}$; & $C = \frac{M}{N(g+h)(2g^2 - gh + f^2)}$, comme le dit l'Auteur.

Ceci posé, soit AM un arc de cercle dont AB est la tangente & CB la secante; soit mené la secante CE infiniment proche de la première, & du point C , comme centre, avec le rayon CB , soit décrit l'arc BS , lequel pourra être considéré comme une petite ligne droite perpendiculaire à CE . Le triangle BSE sera semblable au triangle ACE , puisqu'ils ont chacun un angle droit, & un angle commun, il sera donc aussi semblable au triangle ACB qui en diffère infiniment peu. Faisant $AB = x$, l'arc $AM = y$, & le rayon $AC = a$; BE sera $= dx$, $MN = dy$, & $CD = \sqrt{(aa + x^2)}$. Les triangles semblables

FIG. 4

aux deux cas, en observant seulement que dans celui-ci, à cause qu'on a — Mdu , il faut changer le signe des termes des inté-

ACB , SEB donnent $CB : AC :: BE : BS$, ou $\sqrt{(aa+xx)} : a :: dx : BS = \frac{adx}{\sqrt{(aa+xx)}}$.
Les secteurs semblables CBS , CMN donnent aussi $CB : CM :: BS : MN$, ou $\sqrt{(aa+xx)} : a :: \frac{adx}{\sqrt{(aa+xx)}} : dy = \frac{aadx}{aa+xx}$: c'est l'expression générale de l'élément d'un arc de cercle dont x est la tangente & a le rayon.

Reprenons maintenant l'équation $di = \frac{(A+Bu)du}{f^2 - (g-h)u + u^2} + \frac{Cdu}{g+u} + \frac{Ddu}{h-u}$. Je vois d'abord que les deux derniers termes sont les différentielles du logarithme de $g+u$ & de $h-u$, dont l'une est multipliée par C , & l'autre par $-D$, (ibid. *Quatrième Partie*, Art. 27). Ainsi leurs intégrales sont $C \log(g+u)$, & $-D \log(h-u)$. Quant au premier terme, je cherche à le ramener à la forme $\frac{aadx}{aa+xx}$, dont l'intégrale est $Arc \tan x$, & pour cela je fais évanouir le second terme du dénominateur, en faisant $u = x + \frac{1}{2}(g-h)$ (ibid. *Troisième Partie*, Art. 192); ce qui donne $x = u - \frac{1}{2}(g-h)$, & $dx = du$. Substituant donc ces quantités dans le premier terme, en place de leurs correspondantes, il deviendra.

$$(A + \frac{1}{2}(g-h)) \left(\frac{dx}{x^2 + f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2} \right) + \frac{Bx dx}{x^2 + f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2} = \dots$$

$$\frac{A + \frac{1}{2}(g-h)}{f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2} \left(\frac{(f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2) dx}{x^2 + f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2} \right) + \frac{Bx dx}{x^2 + f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2}$$
; quantités qui s'intègrent facilement : car en faisant $f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2 = aa$, ce qui donne $a = (f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2)^{\frac{1}{2}}$, on voit aisément que l'intégrale de la première partie est $\frac{A + \frac{1}{2}(g-h)}{f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2} (Arc \tan(u - \frac{1}{2}(g-h)))$, & que celle de la seconde est $\frac{1}{2} B \log(x^2 + f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2)$, ou $\frac{1}{2} B \log(f^2 - (g-h)u + u^2)$, en mettant pour x sa valeur. Réunissant donc toutes ces intégrales, on aura $i = \dots$

$$\frac{A + \frac{1}{2}(g-h)}{f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2} (Arc \tan(u - \frac{1}{2}(g-h))) + \frac{1}{2} B \log(f^2 - (g-h)u + u^2) + C \log(g+u) - D \log(h-u) + K.$$

Pour trouver la constante K , je considère que l'intégrale doit être égale à zéro au commencement de l'action, ou lorsque $t=0$; & alors u devient égale à la vitesse initiale que l'Auteur désigne par V : donc on a

$$0 = \frac{A + \frac{1}{2}(g-h)}{f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2} (Arc \tan(V - \frac{1}{2}(g-h))) + \frac{1}{2} B \log(f^2 - (g-h)V + V^2) + C \log(g+V) - D \log(h-V) + K;$$

d'où l'on tire $K = \frac{A + \frac{1}{2}(g-h)}{f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2} (-Arc \tan(V - \frac{1}{2}(g-h))) - \frac{1}{2} B \log(f^2 - (g-h)V + V^2) - C \log(g+V) + D \log(h-V)$. Substituant cette valeur de K dans celle de i , l'intégrale complète, ou la valeur entière de i , sera = ...

$$\frac{A + \frac{1}{2}(g-h)}{f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2} (Arc \tan(u - \frac{1}{2}(g-h))) - Arc \tan(V - \frac{1}{2}(g-h)) + \frac{1}{2} B (\log(f^2 - (g-h)u + u^2) - \log(f^2 - (g-h)V + V^2)) + C (\log(g+u) - \log(g+V)) - D (\log(h-u) - \log(h-V));$$

ou enfin $i = \frac{A + \frac{1}{2}(g-h)}{f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2} (Arc \tan(u - \frac{1}{2}(g-h))) - Arc \tan(V - \frac{1}{2}(g-h)) + \frac{1}{2} B \log\left(\frac{f^2 - (g-h)u + u^2}{f^2 - (g-h)V + V^2}\right) + C \log\left(\frac{g+u}{g+V}\right) + D \log\left(\frac{h-V}{h-u}\right)$: c'est l'expression même de l'Auteur.

Chap. IX. DU MOUVEMENT DES CORPS FLOTTANTS. 317
 gres résultantes, pour avoir la véritable valeur qui convient à ce cas. Donc l'intégrale deviendra.

$$t = \frac{A + \frac{1}{2}B(g-h)}{f^2 - \frac{1}{2}(g-h)^2} \left(\text{Arc tang} \left(V - \frac{1}{2}(g-h) \right) - \text{Arc tang} \left(u - \frac{1}{2}(g-h) \right) \right) + \frac{1}{2}B \log \left(\frac{f^2 - (g-h)V + V^2}{f^2 - (g-h)u + u^2} \right) + C \log \left(\frac{g+V}{g+u} \right) + D \log \left(\frac{h-u}{h-V} \right).$$

COROLLAIRE I I.

(794.) Si l'on vouloir renfermer, dans le cas de la diminution de la vitesse, celui dans lequel on a $\pi = 0$, on auroit $h = 0$, à cause que le terme $f^2 gh$ correspondant à π , doit alors s'évanouir. Substituant donc, dans la dernière valeur de t , celle de $h = 0$, on aura celle qui convient à ce cas.

COROLLAIRE I I I.

(795.) Dans le cas où le corps a acquis sa plus grande, ou sa moindre vitesse, on a $du = 0$: donc on aura aussi $\pi - Ru \mp Qu^2 - Nu^4 = 0$, & la racine, ou facteur positif, $h - u$, fera aussi $= 0$: donc la plus grande, ou la plus petite, vitesse que puisse acquérir le corps, est $= h$.

COROLLAIRE I V.

(796.) Puisque, dans le cas où le corps acquiert sa plus grande, ou sa plus petite, vitesse h , la quantité $D \log \left(\frac{h-V}{h-u} \right)$, ou $D \log \left(\frac{h-a}{h-V} \right)$ devient infinie, il s'ensuit que le temps t sera aussi infini, ou que le corps a besoin d'un temps infini pour acquérir sa plus grande, ou sa moindre, vitesse; ou, ce qui revient au même, il s'ensuit que le corps ne pourra jamais acquérir cette vitesse.

COROLLAIRE V.

(797.) Si le corps avoit ses deux moitiés, choquante & choquée, égales & semblables, on auroit $Q = 0$ (669.); & si, de plus, il étoit très-grand, ou s'il étoit submergé à une grande profondeur dans le Fluide, & que sa plus grande vitesse h ne fût pas excessive, on pourroit négliger la quantité Nu^4 , qui provient de la dénivellation (654, 668 & 673), & l'on auroit $t = M \int \frac{du}{\pi - Ru} = \frac{M}{R} \log \left(\frac{\pi - Rf}{\pi - Ru} \right) *$

* Car $dt = M \left(\frac{du}{\pi - Ru} \right) = \frac{M}{R} \left(\frac{-Rdu}{\pi - Ru} \right)$; donc $t = -\frac{M}{R} \log (\pi - Ru) + K$. Mais au commencement de l'action, cette intégrale doit s'évanouir, & alors $\pi = V$; donc

aux deux cas, en observant seulement que dans celui-ci, à cause qu'on a — Mdu , il faut changer le signe des termes des inté-

ACB , SEB donnent $CB : AC :: BE : BS$, ou $\sqrt{(aa+xx)} : a :: dx : BS = \frac{adx}{\sqrt{(aa+xx)}}$. Les secteurs semblables CBS , CMN donnent aussi $CB : CM :: BS : MN$, ou $\sqrt{(aa+xx)} : a :: \frac{adx}{\sqrt{(aa+xx)}} : dy = \frac{adx}{aa+xx}$: c'est l'expression générale de l'élément d'un arc de cercle dont x est la tangente & a le rayon.

Reprenons maintenant l'équation $dt = \frac{(A+Bu)du}{f^2 - (g-h)u + u^2} + \frac{Cdu}{g+u} + \frac{Ddu}{h-u}$. Je vois d'abord que les deux derniers termes sont les différentielles du logarithme de $g+u$ & de $h-u$, dont l'une est multipliée par C , & l'autre par $-D$, (ibid. *Quatrième Partie*, Art. 27). Ainsi leurs intégrales sont $C \log(g+u)$, & $-D \log(h-u)$. Quant au premier terme, je cherche à le ramener à la forme $\frac{adx}{aa+xx}$, dont l'intégrale est $\text{Arc tang } x$, & pour cela je fais évanouir le second terme du dénominateur, en faisant $u = x + \frac{1}{2}(g-h)$ (ibid. *Troisième Partie*, Art. 192); ce qui donne $x = u - \frac{1}{2}(g-h)$, & $dx = du$. Substituant donc ces quantités dans le premier terme, en place de leurs correspondantes, il deviendra

$$(A + \frac{1}{2}(g-h)) \left(\frac{\frac{dx}{f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2}}{x^2 + f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2} \right) + \frac{Bx dx}{x^2 + f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2} = \dots$$

$$\frac{A + \frac{1}{2}(g-h)}{f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2} \left(\frac{(f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2) dx}{x^2 + f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2} \right) + \frac{Bx dx}{x^2 + f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2}$$

quantités qui s'intègrent facilement : car en faisant $f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2 = aa$, ce qui donne $a = (f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2)^{\frac{1}{2}}$, on voit aisément que l'intégrale de la première partie est $\frac{A + \frac{1}{2}(g-h)}{f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2} (\text{Arc tang } (u - \frac{1}{2}(g-h)))$, & que celle de la seconde est $\frac{1}{2} B \log(x^2 + f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2)$, ou $\frac{1}{2} B \log(f^2 - (g-h)u + u^2)$, en mettant pour x sa valeur. Réunissant donc toutes ces intégrales, on aura $t = \dots$

$$\frac{A + \frac{1}{2}(g-h)}{f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2} (\text{Arc tang } (u - \frac{1}{2}(g-h))) + \frac{1}{2} B \log(f^2 - (g-h)u + u^2) + C \log(g+u) - D \log(h-u) + K.$$

Pour trouver la constante K , je considère que l'intégrale doit être égale à zéro au commencement de l'action, ou lorsque $t=0$; & alors u devient égale à la vitesse initiale que l'Auteur désigne par V : donc on a

$$0 = \frac{A + \frac{1}{2}(g-h)}{f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2} (\text{Arc tang } (V - \frac{1}{2}(g-h))) + \frac{1}{2} B \log(f^2 - (g-h)V + V^2) + C \log(g+V) -$$

$$D \log(h-V) + K; \text{ d'où l'on tire } K = \frac{A + \frac{1}{2}(g-h)}{f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2} (-\text{Arc tang } (V - \frac{1}{2}(g-h))) -$$

$$\frac{1}{2} B \log(f^2 - (g-h)V + V^2) - C \log(g+V) + D \log(h-V). \text{ Substituant cette valeur de } K$$

$$\text{dans celle de } t, \text{ l'intégrale complète, ou la valeur entière de } t, \text{ sera } = \dots$$

$$\frac{A + \frac{1}{2}(g-h)}{f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2} (\text{Arc tang } (u - \frac{1}{2}(g-h))) - \text{Arc tang } (V - \frac{1}{2}(g-h)) + \frac{1}{2} B (\log(f^2 - (g-h)u + u^2) -$$

$$\log(f^2 - (g-h)V + V^2)) + C (\log(g+u) - \log(g+V)) - D (\log(h-u) - \log(h-V)); \text{ ou enfin } t =$$

$$\frac{A + \frac{1}{2}(g-h)}{f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2} (\text{Arc tang } (u - \frac{1}{2}(g-h))) - \text{Arc tang } (V - \frac{1}{2}(g-h)) + \frac{1}{2} B \log \left(\frac{f^2 - (g-h)u + u^2}{f^2 - (g-h)V + V^2} \right) +$$

$$C \log \left(\frac{g+u}{g+V} \right) + D \log \left(\frac{h-V}{h-u} \right); \text{ c'est l'expression même de l'Auteur.}$$

grales résultantes, pour avoir la véritable valeur qui convient à ce cas. Donc l'intégrale deviendra.

$$t = \frac{A + \frac{1}{2}B(g-h)}{f^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(g-h)^{\frac{1}{2}}} \left(\text{Arc tang} \left(V - \frac{1}{2}(g-h) \right) - \text{Arc tang} \left(u - \frac{1}{2}(g-h) \right) \right) + \frac{1}{2}B \log \left(\frac{f^{\frac{1}{2}} - (g-h)V + V^{\frac{1}{2}}}{f^{\frac{1}{2}} - (g-h)u + u^{\frac{1}{2}}} \right) + C \log \left(\frac{g+V}{g+u} \right) + D \log \left(\frac{h-u}{h-V} \right).$$

COROLLAIRE II.

(794.) Si l'on vouloit renfermer, dans le cas de la diminution de la vitesse, celui dans lequel on a $\pi = 0$, on auroit $h = 0$, à cause que le terme $f^{\frac{1}{2}}gh$ correspondant à π , doit alors s'évanouir. Substituant donc, dans la dernière valeur de t , celle de $h = 0$, on aura celle qui convient à ce cas.

COROLLAIRE III.

(795.) Dans le cas où le corps a acquis sa plus grande, ou sa moindre vitesse, on a $du = 0$: donc on aura aussi $\pi - Ru \mp Qu^{\frac{1}{2}} - Nu^{\frac{1}{2}} = 0$, & la racine, ou facteur positif, $h - u$, sera aussi $= 0$: donc la plus grande, ou la plus petite, vitesse que puisse acquérir le corps, est $= h$.

COROLLAIRE IV.

(796.) Puisque, dans le cas où le corps acquiert sa plus grande, ou sa plus petite, vitesse h , la quantité $D \log \left(\frac{h-V}{h-u} \right)$, ou $D \log \left(\frac{h-a}{h-V} \right)$ devient infinie, il s'ensuit que le temps t sera aussi infini, ou que le corps a besoin d'un temps infini pour acquérir sa plus grande, ou sa moindre, vitesse; ou, ce qui revient au même, il s'ensuit que le corps ne pourra jamais acquérir cette vitesse.

COROLLAIRE V.

(797.) Si le corps avoit ses deux moitiés, choquante & choquée, égales & semblables, on auroit $Q = 0$ (669.); & si, de plus, il étoit très-grand, ou s'il étoit submergé à une grande profondeur dans le Fluide, & que sa plus grande vitesse h ne fût pas excessive, on pourroit négliger la quantité $Nu^{\frac{1}{2}}$, qui provient de la dénivellation (654, 668 & 673), & l'on auroit $t = M \int \frac{du}{\pi - Ru} = \frac{M}{R} \log \left(\frac{\pi - Rv}{\pi - Ru} \right) *$

* Car $dt = M \left(\frac{du}{\pi - Ru} \right) = \frac{M}{R} \left(\frac{-Rdv}{\pi - Ru} \right)$; donc $t = -\frac{M}{R} \log (\pi - Ru) + K$. Mais au commencement de l'action, cette intégrale doit s'évanouir, & alors $\pi = V$; donc

pour le cas où la vitesse va en augmentant; & $t = \frac{M}{R} \log \left(\frac{\tau - Ru}{\tau - RV} \right)$, pour le cas où elle va en diminuant.

COROLLAIRE VI.

(798.) D'après les conditions précédentes, la plus grande, ou la moindre, vitesse sera $= \frac{\tau}{R}$.

COROLLAIRE VII.

(799.) On aura donc encore $t = \frac{M}{R} \log \left(\frac{\tau - RV}{\tau - Ru} \right) = \infty$, ou $t = \frac{M}{R} \log \left(\frac{\tau - Ru}{\tau - RV} \right) = -\infty$ **, pour le temps dans lequel le corps acquerra la plus grande, ou la moindre, vitesse.

COROLLAIRE VIII.

(800.) Ayant trouvé $t = \frac{M}{R} \log \left(\frac{\tau - RV}{\tau - Ru} \right)$, on en conclura $\frac{Rt}{M} = \log \left(\frac{\tau - RV}{\tau - Ru} \right)$; & supposant $\log q = 1$, on aura $\frac{Rt}{M} \log q = \log \left(\frac{\tau - RV}{\tau - Ru} \right)$, ou $q^{\frac{Rt}{M}} = \frac{\tau - RV}{\tau - Ru}$: ce qui donne la vitesse, à quelque instant que ce soit de la course du corps, lorsqu'elle va en augmentant, ou la valeur de $u = \frac{\tau}{R} \left(1 - \frac{1}{q^{\frac{Rt}{M}}} \right) + \frac{RV}{q^{\frac{Rt}{M}}}$.

COROLLAIRE IX.

(801.) Dans le cas où la vitesse va en diminuant, on aura

$0 = -\frac{M}{R} \log(\tau - RV) + K$; & par conséquent $K = \frac{M}{R} \log(\tau - RV)$. Substituant cette valeur de K dans l'intégrale, on a $t = \frac{M}{R} \log(\tau - RV) - \frac{M}{R} \log(\tau - Ru) = \frac{M}{R} \log \left(\frac{\tau - RV}{\tau - Ru} \right)$.

* Car alors $\tau - Ru = 0$, ce qui donne $u = \frac{\tau}{R}$.

** Il est évident qu'il y a ici une faute de calcul dans le texte Espagnol. On y trouve encore; pour ce second cas, $t = +\infty$, mais il faut $t = -\infty$, ainsi que le calcul l'indique; car, puisque, dans le cas de la vitesse décroissante, $t = \frac{M}{R} \log \left(\frac{\tau - Ru}{\tau - RV} \right)$, lors de la moindre vitesse $u = \frac{\tau}{R}$,

on a $t = \frac{M}{R} \log \left(\frac{0}{\tau - RV} \right) = -\infty$. On appliquera cette Remarque au Corollaire IV,

Art. 798. Cette faute est d'une conséquence beaucoup plus grande qu'elle ne pourroit le paroître d'abord; si nous sembleroit évident que c'est elle qui a donné lieu à une méprise bien étrange, qu'on trouve dans le Corollaire X, & que nous ferons remarquer.

$\frac{Rt}{M} = \log \left(\frac{1-Ru}{1-RV} \right)$, & $q \frac{Rt}{M} = \frac{1-Ru}{1-RV}$; ce qui donne la vitesse, à quelque instant que ce soit de la course du corps, ou $u = \frac{R}{R} \left(1 - q \frac{Rt}{M} \right) + V q \frac{Rt}{M}$.

COROLLAIRE X.

(802.) La quantité $\frac{1-Ru}{1-RV}$ étant de l'espece des quantités fractionnaires, q sera une quantité de la même espece : par conséquent, lorsque $t = \infty$, on a $q \frac{Rt}{M} = 0$: donc on aura dans ce cas, comme auparavant, la même vitesse $u = \frac{R}{R}$ *.

* Nous avons traduit littéralement ce Corollaire, quoiqu'il doive paroître au moins étrange. La quantité $\frac{1-Ru}{1-RV}$ étant, dit l'Auteur, de l'espece des quantités fractionnaires, q sera une quantité de la même espece. Cette conséquence est évidemment fautive. L'espece de la quantité q est déterminée, & ne dépend nullement de celle de $\frac{1-Ru}{1-RV}$: q est le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. Ce nombre est connu, & est à fort peu près $= 2,7182818$, comme le sçavent tous les Géometres. Or, ce nombre élevé à la puissance dont l'exposant est $\frac{Rt}{M}$, R & M désignant des quantités constantes & finies,

& t une quantité infinie, loin de devenir $= 0$, devient au contraire infini. $\frac{1-Ru}{1-RV}$ est toujours dans le cas présent une quantité fractionnaire, puisque dans la vitesse décroissante, u est moindre que V , & que le terme Ru des résistances est plus grand que la puissance

$\frac{Rt}{M}$ (793) : mais cela prouve seulement que $q \frac{Rt}{M}$ est une fraction, ce qui est évident, puisque t est négatif. Or, lorsque le corps a atteint la plus petite vitesse, $t = -\infty$

(799), & alors $q \frac{Rt}{M} = \frac{1}{q \frac{Rt}{M}} = 0$. Cette expression $q \frac{Rt}{M} = 0$, que l'Auteur donne comme

générale, étant appliquée au cas de la vitesse décroissante (801), donne très-bien la plus petite vitesse $= \frac{R}{R}$; mais s'il eût voulu appliquer la même expression au cas de la vitesse

croissante, il se fût trouvé bien embarrassé, & n'auroit pu que soupçonner quelque erreur dans ses calculs. Il l'eût bientôt découverte dans le Corollaire VII, comme nous l'avons fait remarquer dans la note qui l'accompagne. Voici comment nous voudrions rétablir le Corollaire X, en raisonnant toujours d'après les principes de l'Auteur.

La quantité $\frac{1-Ru}{1-RV}$ étant de l'espece des quantités fractionnaires, $q \frac{Rt}{M}$ sera une quan-

tité de la même espece. Par conséquent, lorsque $t = -\infty$, on a $q \frac{Rt}{M} = 0$. Donc on aura

dans ce cas, comme auparavant, la même vitesse $u = \frac{R}{R}$.

L'expression $q \frac{Rt}{M} = 0$, que l'Auteur donne comme générale, puisqu'il dit que q est fractionnaire & $t = +\infty$, ne convient point au cas de la vitesse croissante; au contraire,

COROLLAIRE XI.

(803.) Si dans la valeur $\frac{r}{R}$ de la plus grande vitesse qu'on a trouvée en négligeant la dénivellation, on substitue les valeurs de $\pi = Nf^2 gh$, & de $R = N(f^2 + gh)(g - h)$, cette plus grande vitesse sera $= \frac{f^2 gh}{(f^2 + gh)(g - h)}$. Cette quantité est toujours plus grande que la plus grande vitesse h qu'on trouve en ayant égard à la dénivellation, à moins qu'on n'ait $f^2 < g(g - h)$.

COROLLAIRE XII.

(804.) Le cas dans lequel la plus grande vitesse, en tenant compte de la dénivellation, est égale à la plus grande vitesse qui a lieu en la négligeant, est celui dans lequel on a $f^2 = g(g - h)$. Si l'on substitue cette valeur de f^2 dans le troisième terme de l'équation supposée, Art. 792, qui est $= u^2(-f^2 + (g - h)^2 + gh)$, ce terme se réduira à $h^2 u^2$, & sera par conséquent positif. Donc la plus grande vitesse h ne peut être plus grande que $\frac{r}{R}$, à moins que la quantité $\mp Q$ ne soit positive, ou, ce qui revient au même, que la partie choquante du corps ne soit pas beaucoup plus aiguë que la partie choquée. (Voyez les Notes des Art. 667 & 792.)

COROLLAIRE XIII.

(805.) Si nous supposons $\frac{f^2 gh}{(f^2 + gh)(g - h)} = h + \theta$, θ exprimant la différence entre les deux plus grandes vitesses, c'est-à-dire, si $\theta = \frac{r}{R} - h$, cette différence θ sera $= \frac{f^2 gh}{(f^2 + gh)(g - h)} - h = \frac{h^2(f^2 - g(g - h))}{(f^2 + gh)(g - h)}$.

SCOLIE I.

(806.) Nous avons assuré dans la Proposition ci-dessus que $f^2 - (g - h)u^2$ contient deux racines imaginaires; cependant

dans ce cas, cette quantité est infinie. Aussi en faisant $\frac{Rt}{M} = \infty$, dans la formule de la vitesse croissante, on trouve la plus grande vitesse $= \frac{r}{R}$ comme cela doit être. En général, il faut observer que dans le cas de la vitesse décroissante, le calcul donne toujours pour t une quantité négative; puisque (799) $t = \frac{M}{R}$ multiplié par le logarithme de la fraction $\frac{\pi - Ru}{\pi - Rv}$; logarithme qui est négatif, comme chacun le sait.

cette

cette quantité peut en contenir deux réelles, si l'on a $\frac{1}{4}(g-h)^2 > f^2$; mais, pour que cela arrive, il est nécessaire que le troisième terme $u^2(-f^2 + (g-h)^2 + gh)$ soit excessivement positif, ou que la partie choquante du corps soit excessivement aiguë, en comparaison de la partie choquée; ce qui ne convient pas dans la pratique. Voyez les Notes des Art. 667 & 792.

SCOLIE II.

(807.) Pour faciliter le calcul, nous avons supposé, dans la Proposition, que la puissance étoit placée au centre de gravité, & que le centre des résistances coïncidoit avec celui de gravité; mais cette supposition est impossible, à moins que le centre de gravité ne suive les variations du centre des résistances; variations qui sont très-réelles, comme on le verra par la suite, & comme on peut facilement le présumer dès-à-présent, en considérant seulement combien varient les résistances qui résultent de la dénivellation. Cependant, lorsque ces résistances ne seront pas excessives, ou que le corps n'aura pas une inclinaison assez considérable pour que les deux centres se séparent, on pourra avec sûreté négliger la différence qui en résulte.

SCOLIE III.

(808.) Quoiqu'on ait fait voir (796.) que le temps dont un corps a besoin pour acquérir sa plus grande, ou sa moindre, vitesse, est infini, cependant il ne laisse pas, pour cela, de l'acquérir presque toute dans un temps très-court. Car soit T le temps nécessaire pour acquérir cette vitesse depuis le repos, & t celui qui est nécessaire pour l'acquérir, en commençant à se mouvoir avec la vitesse primitive V : on aura $T = \frac{M}{R} \log\left(\frac{V}{V-Ru}\right)$, & $t = \frac{M}{R} \log\left(\frac{V-RV}{V-Ru}\right)$. Donc le temps qu'il faut au corps pour acquérir la vitesse V , sera $T-t = \frac{M}{R} \log\left(\frac{V}{V-Ru}\right) - \frac{M}{R} \log\left(\frac{V-RV}{V-Ru}\right) = \frac{M}{R} \log\left(\frac{V}{V-RV}\right)$. Supposons maintenant que V soit une vitesse un peu moindre que la plus grande vitesse $\frac{V}{R}$; soit, par exemple, $V = \frac{V}{R} - \frac{V}{100R} = \frac{V}{R}\left(1 - \frac{1}{100}\right)$, on aura $T-t = \frac{M}{R} \log\left(\frac{V}{V-R\left(1-\frac{1}{100}\right)u}\right) = \frac{M}{R} \log 100 = \frac{M}{R}(4,6)$: de sorte que si $M=R$, on aura $T-t = 4'' 36'''$; c'est le temps qu'emploiera le corps, depuis le repos, pour acquérir une vitesse qui n'est moindre que la plus grande que de $\frac{1}{100}$. Si l'on a $M=2R$, le temps

TOME I.

Ss

fera double ; il sera triple , si $M = 3R$, & ainsi de suite : de sorte que si M étoit cent fois plus grand que R , le temps ne seroit que de $460''$, ou $7' 40''$. Pour un parallépipède rectangle qui flotte , ayant sa base parallèle à l'horison , on a $M = mbae$, e exprimant la longueur du parallépipède , & $R = \frac{1}{2} mba^{\frac{1}{2}}$ (642.) : donc $\frac{M}{R} = \frac{3e}{a^{\frac{1}{2}}}$,

& $T - t = \frac{3e}{a^{\frac{1}{2}}} (4' 36'')$. Si donc on avoit $a = 1$, & $e = 20$, le temps $T - t$ que le parallépipède emploieroit à acquérir une vitesse moindre seulement de $\frac{1}{100}$ que la plus grande , seroit $= 4' 36''$. D'où l'on voit que , dans très-peu de temps , les corps acquièrent une vitesse qu'on peut supposer sans erreur sensible , égale à la plus grande . On dira la même chose de l'expression $D \log \left(\frac{h-V}{h-u} \right)$, qui donne le temps infini , dans le cas où l'on tient compte de la dénivellation .

PROPOSITION LXI.

(809.) Trouver la relation entre la vitesse & l'espace que parcourt un corps flottant , poussé par une puissance dont la direction est horizontale , & qui est placée dans le centre des résistances , en supposant que ce centre coïncide avec celui de gravité .

On a , par la Proposition précédente (792.) , $dt = \frac{Mdu}{-Ru + Qu^2 - Nu^3}$, & par l'Art. 29 , $dt = \frac{de}{u}$, e exprimant l'espace parcouru . Cette valeur de dt étant donc substituée , donnera $de = \frac{Mdu}{-Ru + Qu^2 - Nu^3}$, l'on aura donc aussi , comme dans la Proposition précédente , ...
 $de = \frac{(A+B)du}{f^2 - (g-h)u + u^2} + \frac{Cdu}{g+u} + \frac{Ddu}{h-u}$; D étant $= \frac{Mh}{N(g+h)(2g^2 - g^2 + f^2)}$;
 $C = \frac{-h'g}{N(g+h)(2g^2 - g^2 + f^2)}$ * ; $B = D - C$; & $A = C(2g-h) - D(g-2h)$;
 d'où l'on tirera , en intégrant , (Voyez la Note de l'Article 792.) $e = \frac{A + \frac{1}{2}B(g-h)}{f^2 - \frac{1}{2}(g-h)^2} \left(\text{Arc tang} \left(u - \frac{1}{2}(g-h) \right) - \text{Arc tang} \left(V - \frac{1}{2}(g-h) \right) \right) +$
 $\frac{1}{2} B \log \left(\frac{f^2 - (g-h)u + u^2}{f^2 - (g-h)^2} \right) + C \log \left(\frac{g+u}{g+V} \right) + D \log \left(\frac{h-V}{h-u} \right)$.

COROLLAIRE I.

(810.) Les intégrales avec lesquelles on trouve la valeur de l'espace parcouru e , sont donc les mêmes que celles avec lesquelles on

* Les valeurs de D & de C doivent être telles qu'on les voit ici ; elles sont très-fautives dans l'original .

trouve la valeur du temps t , dans lequel il est parcouru ; elles ne diffèrent que par les coefficients constants A, B, C, D *.

COROLLAIRE II.

(811.) Le corps ne pourra donc acquérir sa plus grande, ou sa moindre, vitesse, qu'après avoir parcouru un espace infini.

COROLLAIRE III.

(812.) Si le corps avoit ses deux moitiés, choquante & choquée, égales & semblables, & si l'on négligeoit l'effet de la dénivellation exprimé par Nu^2 , on auroit $de = \frac{Mu du}{\pi - Ru}$, & par conséquent $e = \frac{M}{K} \left(R(V-u) + \pi \log \left(\frac{\pi - RV}{\pi - Ru} \right) \right)$ **.

COROLLAIRE IV.

(813.) Si la marche du corps commençoit depuis le repos pour parcourir l'espace e , on auroit $V=0$; donc alors $e = \frac{M}{K} \left(-Ru + \pi \log \left(\frac{\pi}{\pi - Ru} \right) \right)$.

COROLLAIRE V.

(814.) Si nous substituons à la place de u sa valeur $\frac{V}{R} \left(1 - \frac{1}{100} \right)$, nous aurons $e = \frac{M}{K} \left(-\pi \left(1 - \frac{1}{100} \right) + \pi(4,6) \right) = \frac{M}{K} (3,61)$.

COROLLAIRE VI.

(815.) L'espace parcouru fera donc en raison directe de la puissance & de la masse, & en raison inverse doublée de la constante R qui multiplie les résistances.

* L'Auteur dit qu'elles ne diffèrent que par les trois coefficients constants A, B & C ; mais cette conséquence est une suite de la faute de calcul que nous venons de faire remarquer.

** Pour trouver cette intégrale, il faut employer une méthode analogue à celle que nous avons développée dans la note de l'Art. 792. Soit $\frac{Mu du}{\pi - Ru} = Adu + \frac{Bdu}{\pi - Ru}$. En réduisant le second membre en fraction, divisant par du , supprimant le dénominateur commun, & passant tous les termes d'un côté, on aura $\pi A + B - R/u - Mu = 0$. Cette équation devant avoir lieu indépendamment de toute valeur de u , on aura $\pi A + B = 0$, & $-RA - M = 0$, d'où l'on tire $A = -\frac{M}{R}$, & $B = \frac{\pi M}{R}$. Substituant ces quantités, on aura $\frac{Mu du}{\pi - Ru}$, ou $de = -\frac{M}{R} du + \frac{\pi M}{R} \cdot \frac{du}{\pi - Ru}$, ou $= -\frac{M}{R} du + \frac{\pi M}{-R} \left(\frac{-Rdu}{\pi - Ru} \right)$; quantité dont le premier terme s'intègre exactement, & dont le second s'intègre par les logarithmes. Intégrant donc, on aura
 $e = -\frac{M}{R} u - \frac{\pi M}{R} \log(\pi - Ru) + K$. Or cette intégrale doit être zéro au commencement de l'action, temps auquel la vitesse u est égale à la vitesse initiale V . Donc $K = \frac{M}{R} V + \frac{\pi M}{R} \log(\pi - RV)$; & par conséquent $e = \frac{M}{K} \left(R(V-u) + \pi \log \left(\frac{\pi - RV}{\pi - Ru} \right) \right)$.

(816.) *Trouver la vitesse des Lames.*

La puissance qui agit dans les Lames, est la gravité de la Lame même. Si une partie de la superficie d'un Fluide s'élève par quelque cause que ce soit, après qu'elle a acquis la plus grande élévation, sa gravité l'oblige de descendre, & lui fait prendre une disposition & une figure vers le bas, qui est égale à celle qu'elle avoit prise vers le haut; puisque l'action & la réaction sont égales; c'est-à-dire, qu'elle forme au-dessous de la superficie du Fluide un enfoncement dont la figure est absolument la même que celle de l'élévation: d'où il s'ensuit que dans les Lames *ABCDEFG*, la partie

Fig. 73.

ABC qui s'élève au-dessus du niveau *AG*, est égale & semblable à la partie *CDE*, celle-ci à *EFG*, & ainsi des autres. Le mouvement de la Lame consiste donc en ce que le point *D* s'élève en *H*, auquel cas on dit que la Lame a parcouru l'espace de *B* en *H*, ou de *I* en *D*; & cette élévation dépend du poids de la colonne *BI*, qui doit mettre en mouvement la masse *BID*. Soit donc la hauteur *BI* = *a*; la moitié *ID* de l'amplitude de la Lame = *b*; la partie dont cette Lame est déjà abaissée; c'est-à-dire, *BK* = *DL* = *x*; *t* le temps, & *u* la vitesse des points *K* ou *L*. Cela posé, nous aurons (19 & 47.) $32(a - 2x) dt = (a + b) du$, & en substituant à la

place de *dt* sa valeur $\frac{dx}{u}$, $32(a - 2x) dx = (a + b) u du$, d'où l'on tirera, en intégrant, $64(ax - x^2) = (a + b)u^2$, ou $u = \frac{dx}{dt} = \frac{8(ax - x^2)^{\frac{1}{2}}}{(a + b)^{\frac{1}{2}}}$. Cette dernière équation donne $dt = \frac{(a + b)^{\frac{1}{2}} dx}{8(ax - x^2)^{\frac{1}{2}}}$,

& en intégrant, $t = \frac{(a + b)^{\frac{1}{2}}}{8 \cdot \frac{1}{2}} \text{Arc } BM^*$, *BMI* étant un demi-cercle décrit sur le diamètre *BI* = *a*. Lorsque le point *K* s'abaisse en *I*, & que le point *L* s'élève en *H*, l'Arc *BM* devient tout le demi-cercle *BMI*, & dans ce cas le rapport $\frac{\text{Arc } MB}{\frac{1}{2}a}$ est celui de la demi-circonférence au rayon. Ce rapport étant donc représenté par *c*, on aura $\frac{1}{8}(a + b)^{\frac{1}{2}}c$, pour l'expression de tout le temps dans le-

* En mettant la valeur de *dt* sous cette forme $\frac{(a + b)^{\frac{1}{2}}}{8 \cdot \frac{1}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{2} dx}{(ax - x^2)^{\frac{1}{2}}}$, on voit que le second facteur est l'élément d'un Arc de cercle dont *a* est le diamètre, & *x* le sinus versé. (Voyez la première Note de l'Art. 365.)

quel le point B s'abaisse en I , & dans lequel le point B s'élève en H , ou pour celui dans lequel B passe en H . Ce temps est le même que celui qu'un pendule de la longueur $\frac{a+b}{2}$ emploie à faire une oscillation (369.). Ce temps $\frac{1}{2}(a+b)^{\frac{1}{2}}c$, est à une seconde, comme la longueur, ou l'espace $ID=b$ que la Lame parcourt dans ce temps, est à $\frac{85}{(a+b)^{\frac{1}{2}}c}$; espace que parcourra la Lame dans une seconde de temps, & qui indique par conséquent sa véritable vitesse (28.).

COROLLAIRE I.

(817.) Le temps $\frac{1}{2}(a+b)^{\frac{1}{2}}c$, est à un autre temps quelconque $\frac{(a+b)^{\frac{1}{2}}}{8. \frac{1}{2}a}$ Arc BM , que le point B emploie à passer de B en N , comme l'espace b que parcourt la Lame pendant ce temps, est à l'espace $BN = \frac{b \cdot \text{Arc } BM}{c. \frac{1}{2}a}$; de sorte que si nous faisons $BN=y$, nous aurons $y = \frac{b \cdot \text{Arc } BM}{c. \frac{1}{2}a}$; équation de la Lame, ou de la courbe BOC , qui est une espèce de cycloïde.

SCOLIE I.

(818.) La relation entre a & b est différente dans les Lames, selon qu'elles vont en augmentant, ou en diminuant. La force du vent fait toujours augmenter les premières, & le rapport $\frac{a}{b}$ est plus grand que dans les secondes, qui sont celles qui subsistent après que le vent a diminué, ou qu'il a cessé entièrement*. Dans ces dernières Lames la quantité b peut être beaucoup de fois plus grande que a , parce que b demeurant constante, a diminue continuellement jusqu'à devenir égale à zéro. Si, dans les premières Lames, ou dans celles qui sont parvenues à tout l'accroissement possible, à l'égard du vent qui les occasionne, on suppose que le mouvement du point B vers H ; se réduise à l'application continue, ou à la rotation, du cercle BMI sur la droite ID , nous aurons $PC = \frac{1}{2}BPI = \frac{1}{2}ac$ (365, Note 1^{re}), & $ID=b=a+\frac{1}{2}ac = a(1+\frac{1}{2}c)$. Le plus grand rapport $\frac{a}{b}$ sera donc, dans cette

* Les Marins Espagnols appellent *Picadas*, ou *Olas Picadas*, les Lames qui vont en augmentant, par l'augmentation de la vitesse du vent; & ils nomment *Olas de Leva*, ou *Mares de Leva*, celles qui subsistent après que le vent qui les a produites est diminué, ou même après qu'il s'est entièrement calmé. Il est visible que ces dernières sont de la seconde espèce, & vont toujours en diminuant.

supposition, $\frac{a}{a(1+\frac{1}{2}c)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}c} = \frac{1}{2,57}$: tous les autres rapports seront moindres, & iront en diminuant jusqu'à l'infini, dans toutes les autres Lames.

S C O L I E I I.

(819.) *Newton*, dans sa *Philosophie Naturelle*, Liv. II, *Proposition XLVI*, néglige la valeur de a ; or, en négligeant d'avoir égard à cette quantité, la vitesse de la Lame est $= \frac{88a}{c}$, & suit la raison des racines quarrées de ses amplitudes, comme le dit cet illustre Auteur.

CHAPITRE X.

Des Moments que les corps éprouvent dans leur mouvement progressif horisontal.

P R O P O S I T I O N L X I I I.

(820.) **T**ROUVER les moments qu'éprouve un Corps qui se meut horisontalement dans un Fluide.

La résistance est une action, ou force, par laquelle le Fluide agit sur le corps; on peut par conséquent la regarder comme une puissance. Donc si l'on multiplie les différentes actions, ou résistances, que le Fluide exerce sur chaque différencielle de la surface du corps, suivant des directions perpendiculaires aux plans qui, passant par ces différencielles, coïncident avec l'axe de rotation; si l'on multiplie, dis je, ces différentes actions par leurs distances à ce même axe, la somme des produits sera celle des moments.

S C O L I E.

(821.) Les moments peuvent être considérés, ou peuvent être calculés, par rapport à trois axes, deux horisontaux perpendiculaires entre eux, & le troisième vertical; les deux premiers peuvent même être pris arbitrairement. Nous nous bornerons cependant dans nos recherches à trouver les moments qui ont lieu à l'égard d'un axe horisontal perpendiculaire à la direction du mouvement, parce que, quelle que puisse être cette direction, on peut toujours la décomposer en deux autres perpendiculaires à deux axes donnés.

PROPOSITION LXIV.

(822.) Trouver les moments qu'éprouve un corps flottant quelconque qui se meut horizontalement dans un fluide immobile.

Soit divisé la surface du corps, par des plans horizontaux & verticaux, en petits quadrilatères sensiblement plans; & soit calculé la force qui agit sur chacun dans une direction perpendiculaire au plan qui, passant par le même petit quadrilatère, coïncide avec l'axe horizontal de rotation. Multipliant ensuite cette force par la distance du petit quadrilatère à l'axe, le produit sera le moment qu'éprouve ce petit quadrilatère. Sommant donc tous les moments qui proviennent de tous les petits quadrilatères, on aura celui qu'éprouve tout le corps.

La force horizontale qui agit sur un petit quadrilatère a été trouvée (624.) $= mc(Da \pm \frac{1}{2}u \sin \theta ((D + \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}} - (D - \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{4}u^2 a \sin \theta^2)$: donc (613.) celle qu'il éprouve dans une direction perpendiculaire au plan qui, passant par le même petit quadrilatère, coïncide avec l'axe, sera $= \frac{mbr \sin \alpha}{\sin \alpha} (Da \pm \frac{1}{2}u \sin \theta ((D + \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}} - (D - \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{4}u^2 a \sin \theta^2) : \alpha$ exprimant le complément de l'angle que forme le petit quadrilatère avec le plan qui, passant par ce quadrilatère, coïncide avec l'axe *; u étant la vitesse horizontale, & θ l'angle que forme le petit quadrilatère avec la direction du mouvement. Multipliant cette force par r , distance du petit quadrilatère à l'axe, le moment qu'il éprouvera, sera exprimé par

$$\frac{mbr \sin \alpha}{\sin \alpha} (Da \pm \frac{1}{2}u \sin \theta ((D + \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}} - (D - \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{4}u^2 a \sin \theta^2) .$$

COROLLAIRE I.

(823.) Les moments qu'éprouvent les petits quadrilatères, & qui sont produits par les deux dénivellations, seront (625.) $= \frac{mbr \sin \alpha}{\sin \alpha} (Da - \frac{1}{2}u \sin \theta ((D + \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}} - (D - \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{4}u^2 a \sin \theta^2)$, & tous les deux sont positifs**. Donc, pour avoir égard à la dénivellation

* L'angle α que la direction suivant laquelle on a décomposé la force, forme avec le petit quadrilatère sur lequel elle agit (571.), est le complément de celui que forme le petit quadrilatère, avec le plan qui, passant par ce quadrilatère, coïncide avec l'axe; car la direction de la force faisant un angle droit avec ce dernier plan (820.), les deux autres angles ne doivent valoir ensemble qu'un angle droit. Donc, &c.

** Car si, par exemple, l'augmentation de force, dans la partie choquante, qui provient de la dénivellation, tend à faire tourner le corps, en lui élevant son extrémité choquante, il est évident

du Fluide, il faudra les ajouter à ceux qu'on a déterminés ci-dessus.

COROLLAIRE I I.

(824.) En décomposant les forces, & par conséquent les moments relatifs à un axe horizontal, on peut les distinguer en moments horizontaux & en moments verticaux. Les moments horizontaux seront le produit des forces horizontales qui agissent sur les petits quadrilatères, par leur distance verticale au plan horizontal qui passe par le centre de gravité; & les moments verticaux seront le produit des forces verticales, qui agissent sur les mêmes petits quadrilatères, par leur distance horizontale au plan vertical qui passe par le centre de gravité.

COROLLAIRE I I I.

(825.) En décomposant de même les forces, & par conséquent les moments qui en résultent relativement à un axe vertical, on peut réduire ces moments à deux autres, avec des directions perpendiculaires entre elles, & toutes deux par rapport au même axe.

COROLLAIRE I V.

(826.) Si le plan vertical coïncidant avec l'une de ces directions, coupoit le corps en deux parties égales & semblables, les moments qui résulteroient par rapport à cette direction, se détruiraient réciproquement, parce que les moments positifs d'un côté se trouveroient égaux aux moments négatifs de l'autre.

PROPOSITION L X V.

(827.) *Trouver les moments relatifs à un axe vertical, qu'éprouve un corps flottant quelconque, qui se meut horizontalement dans une direction perpendiculaire au plan vertical qui partage le corps en deux parties égales & semblables.*

La force horizontale qui agit sur un petit quadrilatère quelconque, ou sur une des différencio - différencielles, dans lesquelles on

que la diminution de force dans la partie choquée, qui provient de la même cause, tend à abaisser l'extrémité choquée; puisque le moment de la force qui agit sur la partie choquée, est négatif, & que la diminution d'une quantité négative produit le même effet que l'augmentation d'une quantité positive. L'extrémité choquante s'élèvera donc encore, en vertu de la dénivellation dans la partie choquée: donc les moments qui proviennent des deux dénivellations sont conspirants, c'est-à-dire, sont tous deux positifs. On raisonnera de même pour tous les autres cas.

divise

divise la surface du corps, est (624.) = ...
 $mc(Da \pm \frac{1}{2}u \sin \theta)((D \pm \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}} - (D - \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}u^2 a \sin^2 \theta$; ou, en substituant x pour D , & dx pour a , en supposant que x désigne la distance verticale du petit quadrilatère à la superficie du Fluide, ou la profondeur à laquelle il est enfoncé dans le Fluide, & dx la hauteur de ce petit quadrilatère; cette expression deviendra = $mcdx(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2}u \sin \theta)^2$, (626 & 627.): ou bien parce qu'on suppose la partie choquante du corps égale & semblable à la partie choquée, la résistance des deux petits quadrilatères correspondants sera (655.) = $\frac{1}{2}mcux^{\frac{1}{2}}dx \sin \theta$. Si donc y désigne la distance horizontale de l'axe à la ligne qui joint les deux petits quadrilatères, le moment qu'ils éprouveront sera = $\frac{1}{2}mcuyx^{\frac{1}{2}}dx \sin \theta$; quantité dont l'intégrale $\frac{1}{2}muscyx^{\frac{1}{2}}dx \sin \theta$ exprimera le moment qu'éprouve tout le corps.

COROLLAIRE.

(828.) Les momens qu'éprouvent les petits quadrilatères, & qui proviennent des deux dénivellations, seront = $mcydx(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}u \sin \theta)^2$.

DÉFINITION III.

(829.) On appelle *Stabilité* les moments qu'éprouve un corps à l'égard d'un axe horizontal; parce que ce sont ces moments qui agissent pour maintenir le corps dans l'état où il se trouvoit auparavant.

PROPOSITION LXVI.

(830.) Trouver la *Stabilité* d'un corps flottant quelconque, ou les moments qu'il éprouve, lorsqu'il se meut horizontalement dans une direction perpendiculaire à l'axe horizontal de rotation.

La force horizontale qui agit sur un petit quadrilatère quelconque, est, par ce qu'on vient de voir, = $mcdx(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2}u \sin \theta)^2$. Supposons maintenant que k représente la profondeur verticale à laquelle le centre de gravité du corps est abaissé au-dessous de la superficie du Fluide, il est clair que $k - x$ sera la distance verticale du même centre de gravité au plan horizontal qui passe par le petit quadrilatère *. Donc $mcdx(k - x)(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2}u \sin \theta)^2$ sera l'expression du moment horizontal qu'éprouvera ce petit quadrilatère. Pareillement si l'on nomme y

* Cette expression paroît supposer k plus grand que x , ou que le petit quadrilatère est plus proche de la superficie du Fluide que le centre de gravité du corps; mais elle n'en convient pas moins au cas, où il en seroit plus éloigné; car alors $k - x$ est négatif, ce qui est concevable, puisque le moment horizontal doit aussi l'être.

l'ordonnée du corps, ou la distance horizontale du petit quadrilatère au plan vertical qui coïncide avec l'axe de rotation, on aura $mcydy(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2}u \sin \theta)^2$ pour l'expression de la force verticale qui agit sur ce quadrilatère (556.), & par conséquent son moment vertical sera $= mcydy(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2}u \sin \theta)^2$; donc la totalité des moments qu'éprouvera le corps sera $= mfcydy(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2}u \sin \theta)^2 + mfc dx(k-x)(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2}u \sin \theta)^2$.

COROLLAIRE I.

(831.) Les moments qui résultent des dénivellations seront par conséquent $mfcydy(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}u \sin \theta)^2 + mfc dx(k \pm x)(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}u \sin \theta)^2$, le signe $+$ ayant lieu pour la partie choquante, & le signe $-$ pour la partie choquée *.

COROLLAIRE II.

(832.) Si le plan vertical qui coïncide avec l'axe, partage le corps en deux moitiés égales & semblables, la somme des moments de deux petits quadrilatères correspondants dans l'une & l'autre moitié sera $= \frac{1}{2}mfcux^{\frac{1}{2}}ydy \sin \theta + \frac{1}{2}mfcu(k-x)x^{\frac{1}{2}}dx \sin \theta$.

COROLLAIRE III.

(833.) Si y exprime l'ordonnée de la partie choquante, & Y celle de la partie choquée; les moments de cette dernière étant négatifs, on aura l'expression suivante pour les moments qu'éprouve le corps; $mcydy(x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}u \sin \theta)^2 - mcYdY(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}u \sin \theta)^2$ $+ mcdx(k-x)(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}u(\sin \theta + \sin \theta)) + \frac{1}{2}u^2(\sin^2 \theta - \sin^2 \theta)$, θ & $\ominus$ exprimant les angles que forment les petits quadrilatères avec la direction du mouvement, tant dans la partie choquante que dans la partie choquée.

COROLLAIRE IV.

(834.) Si l'on a $u=0$, ou si le corps n'a point de mouvement horizontal, les moments se réduiront aux seuls moments verticaux $fmcxycdy - fmcYxdY = fmcx(ydy - YdY)$.

* Il est essentiel de se rappeler ici que la quantité x est seulement relative à la hauteur de la dénivellation, & $= \frac{1}{2}u^2 \sin^2 \theta$, (594.); ainsi cette lettre n'exprime point la même grandeur que dans l'expression des moments du corps qui proviennent des résistances. On appliquera cette remarque aux Articles 823 & 828.

COROLLAIRE V.

(835.) La quantité $mfcx (ydy - YdY)$, est égale au produit du poids de tout le corps, par la distance horizontale du centre de gravité à la verticale qui passe par le centre du volume *. Donc si nous appellons P le poids de tout le corps, & h la distance horizontale du centre de gravité à la verticale qui passe par celui du volume, on aura $mfcx (ydy - YdY) = hP$.

PLANC. III.

COROLLAIRE VI.

(836.) Ces moments verticaux $mfcx (ydy - YdY) = hP$ peuvent être positifs, ou négatifs, selon que $fcxydy$ sera plus grand, ou plus petit que $fcxYdY$; ou selon que la verticale qui passe par le centre du volume, passera entre le centre de gravité & la partie choquante, ou entre ce même centre & la partie choquée.

COROLLAIRE VII.

(837.) Si donc on avoit $fcxydy = fcxYdY$, les moments verticaux seroient zéro.

COROLLAIRE VIII.

(838.) Dans les corps formés par la révolution d'un plan quelconque autour d'un axe horizontal H , la verticale QH , qui passe par le centre du volume, passe aussi par ce même axe: donc, en nommant K la distance HO du centre de volume au centre de gravité O , & Δ l'angle QHO , la distance de O à la verticale QH sera $= h = K \sin \Delta$, & $hP = KP \sin \Delta$.

FIG. 62.

COROLLAIRE IX.

(839.) Dans les corps qui ne sont point formés par la révolution d'un plan quelconque autour d'un axe horizontal, on ne laissera pas d'avoir $hP = KP \sin \Delta$; mais K sera variable suivant les différentes inclinaisons Δ que peut prendre le corps.

COROLLAIRE X.

(840.) Si le centre de volume H étoit plus bas que le centre

* Car le moment qui résulte de la somme des moments verticaux, ou le moment vertical total, est égal à la résultante des forces verticales, ou à la force verticale totale, multipliée par la distance horizontale de sa direction à la verticale qui passe par le centre de gravité du corps. Or la force verticale totale est (561.) égale au poids du volume de fluide que le corps déplace, ou (562.) égale au poids de tout le corps; & elle passe par le centre du volume déplacé: donc, &c.

de gravité. K seroit alors négatif, & par conséquent le moment $KP \sin \Delta$ le seroit aussi.

S C O L I E.

(841.) Il est nécessaire de ne pas perdre de vue, que les moments qui proviennent du poids du corps doivent être pris dans leur entier, parce que le poids est réel & positif; ils diffèrent par conséquent des moments qui proviennent des résistances, parce que celles-ci doivent être réduites aux deux tiers (644.). Ainsi, dans le cas où il sera question de combiner ces moments les uns avec les autres, on aura attention de réduire aux deux tiers toute quantité qui sera multipliée par la vitesse u .

P R O P O S I T I O N L X V I I.

(842.) Trouver en général le moment qu'éprouve un corps quelconque qui est sans mouvement, & est composé de deux moitiés égales & semblables, séparées l'une de l'autre par un plan qui coïncide avec l'axe horizontal.

FIG. 74.

Soit ABD le corps composé de deux moitiés égales & semblables ABE , DBE ; & C son centre de gravité. Soit de plus BCE perpendiculaire à la droite AD , cette ligne AD étant supposée coïncider avec la superficie du Fluide, lorsque le corps est droit, ou que la ligne BCE est verticale. Supposons maintenant que le corps soit dans une situation inclinée, GL étant la superficie du Fluide; & soit tiré les verticales MC , FN , la première passant par le centre de gravité C , & la seconde par le centre F , qui est celui du volume du corps, lorsqu'il se trouve dans une situation droite. Cela posé, faisant $AD = e$, $CE = k$, $CF = \pm H$, & l'angle de l'inclinaison $MCE = CFN = LED = \Delta$; l'horizontale CN sera $= H \sin \Delta$; $EM = k \sin \Delta$; & l'aire du triangle DEL , ou AEG , sera $= \frac{1}{2} e^2 \sin \Delta$, DL , ou AG étant sensiblement des lignes droites. Le moment qu'éprouvera toute la partie ABD du corps, le poids de cette partie étant P , sera $\pm CN.P = \pm HP \sin \Delta$; & celui qu'éprouvera le triangle LED sera $= m(\frac{1}{2} EL + EM) \frac{1}{2} e^2 \sin \Delta =$

* Car, en abaissant la perpendiculaire DS sur la ligne EL , on aura 1. $ED :: \sin LED :: DS$, ou 1. $:\frac{1}{2}e:: \sin \Delta : DS = \frac{1}{2}e \sin \Delta$. Donc le triangle $DEL = \frac{EL \cdot DS}{2} = \frac{\frac{1}{2}e^2 \sin \Delta}{2} = \frac{1}{4}e^2 \sin \Delta$. Dans les inclinaisons infiniment petites, le point S est sensiblement confondu avec le point L .

$m(\frac{1}{2}e+k\sin\Delta)\frac{1}{2}e^2\sin\Delta^*$; enfin celui qu'éprouvera le triangle AEG sera $= m(\frac{1}{2}EG - EM)\frac{1}{2}e^2\sin\Delta = m(\frac{1}{2}e - k\sin\Delta)\frac{1}{2}e^2\sin\Delta$. Ainsi la somme de tous les moments qu'éprouvent les triangles tels que LED dans toute la longueur du corps, sera $= \frac{m}{2}\int ce^2\sin\Delta(\frac{1}{2}e+k\sin\Delta)$: & la somme de tous ceux qui correspondent aux triangles tels que AEG , sera $= \frac{m}{2}\int ce^2\sin\Delta(\frac{1}{2}e - k\sin\Delta)$. Or la somme de tous ces moments étant jointe au moment $\pm HP\sin\Delta$, est le moment total qu'éprouve le corps **: donc ce moment sera $= \pm HP\sin\Delta + m\int \frac{1}{2}ce^2\sin\Delta(\frac{1}{2}e+k\sin\Delta) + m\int \frac{1}{2}ce^2\sin\Delta(\frac{1}{2}e - k\sin\Delta) = \dots$
 $(\pm HP + \frac{m}{12}\int e^3c)\sin\Delta^{***}$.

* Car la distance Eg du centre de gravité g du triangle LED au point E , est égale à $\frac{2}{3}EL$; mais, puisqu'on suppose l'inclinaison infiniment petite, $Eg = En$; donc la distance du centre de gravité g du triangle LED à la verticale CM qui passe par le centre de gravité, est égal à $En + EM = \frac{2}{3}EL + EM$, &c.

** Pour voir clairement la raison pour laquelle l'Auteur ajoute les moments des deux triangles LED , AEG , au moment $\pm HP\sin\Delta$ qu'éprouve la partie ABD , qui étoit submergée lorsque le corps étoit dans une situation droite, on décomposera le volume actuellement submergé GBL , de manière qu'il comprenne le volume ABD , ce qui donnera $GBL = ABD + LED - AEG$; d'où l'on voit que, pour avoir le moment qui agit sur GBL , il faut ajouter ensemble les moments qui agissent sur ABD & sur LED , & retrancher de leur somme le moment qui agit sur AEG . Mais on vient de voir que le moment de $ABD = \pm HP\sin\Delta$, le signe + ayant lieu lorsque le centre de volume est plus haut que celui de gravité, comme on le suppose dans la Figure, parce que la force verticale du Fluide, passant par le point F (362.), tend à redresser le corps (836.) avec une énergie, ou un moment représenté par $HP\sin\Delta$. Au contraire le signe - a lieu lorsque le centre de volume est plus bas que celui de gravité, parce qu'alors la quantité H_v est négative (840.), & que la force verticale de l'eau tend à renverser le corps; & elle le renverseroit en effet, s'il n'étoit retenu par l'action d'autres moments qui agissent pour le rétablir dans la situation droite, lesquels doivent être plus puissants que le moment $HP\sin\Delta$, pour que le corps ait de la stabilité. Le moment du triangle LED qui est submergé par l'inclinaison $= m(\frac{1}{2}e+k\sin\Delta)\frac{1}{2}e^2\sin\Delta$; & ce moment est toujours positif, parce que l'action verticale de l'eau agissant de bas en haut sur le centre de gravité g de ce triangle, tend à redresser le corps, ou à diminuer son inclinaison. Enfin le moment qui correspond au triangle AEG qui est sorti du Fluide, est $= m(\frac{1}{2}e - k\sin\Delta)\frac{1}{2}e^2\sin\Delta$. Ce moment est toujours négatif, puisque le centre de gravité de ce triangle est situé de l'autre côté de l'axe de rotation; mais, comme on vient de le voir, ce moment est à retrancher de la somme des deux moments qu'on vient de considérer, il s'ensuit qu'il agira encore positivement, c'est-à-dire, qu'il concourra avec celui du triangle LED , pour rétablir le corps dans la situation droite. Donc la somme des moments qui agissent sur $GBL = \pm HP\sin\Delta + m(\frac{1}{2}e+k\sin\Delta)\frac{1}{2}e^2\sin\Delta + m(\frac{1}{2}e - k\sin\Delta)\frac{1}{2}e^2\sin\Delta$. Donc, &c.

On voit, d'après ce que nous venons de dire, que le corps a toujours de la stabilité, lorsque le centre de gravité tombe au-dessous du centre de volume, c'est-à-dire, qu'il ne peut manquer de revenir dans une situation droite, lorsqu'ayant reçu une inclinaison infiniment petite, il est abandonné à lui-même. Mais lorsque le centre de gravité est au-dessus de celui de volume, ce qui ne peut gueres manquer d'avoir lieu dans les Vaisseaux, le corps peut manquer de stabilité, selon la valeur du moment $-HP\sin\Delta$.

*** La lettre c représente l'intervalle entre un triangle & le suivant, ou la hauteur des petites prismes triangulaires compris entre deux triangles consécutifs.

S C O L I E I.

(843.) On a supposé dans le calcul que les deux lignes AD , GL , se coupent sur la ligne BE , ce qui, pour l'ordinaire, n'arrivera pas; mais, en supposant que l'inclinaison soit infiniment petite, on pourra faire cette supposition sans erreur sensible; & il est nécessaire que l'inclinaison soit telle, pour qu'en général on puisse prendre AG & DL pour des lignes droites.

C O R O L L A I R E I.

(844.) Puisqu'on vient de voir que, dans des inclinaisons infiniment petites, le corps étant arrêté, le moment est $= (HP + \frac{m}{12} se^3 c) \sin \Delta$: & ayant vu pareillement (835.) que ce moment est dans le même cas $= mscx (ydy - YdY) = hP$; on aura, par conséquent, dans les inclinaisons infiniment petites, $(HP + \frac{m}{12} se^3 c) \sin \Delta = mscx (ydy - YdY) = hP = KP \sin \Delta$.

C O R O L L A I R E I I.

(845.) Substituant cette valeur de $mscx (ydy - YdY)$ dans l'expression du moment, lorsque le corps est en mouvement, ce moment sera encore exprimé dans le cas des inclinaisons infiniment petites, par $(PH + \frac{1}{12} se^3 c) \sin \Delta + \frac{1}{2} mufcx^{\frac{1}{2}} (ydy \sin \theta + YdY \sin \phi) + \frac{1}{6} mu^3 fc (ydy \sin \theta^2 - YdY \sin \phi^2) + \frac{1}{2} mufcx^{\frac{1}{2}} dx (k - x) (\sin \theta + \sin \phi) + \frac{1}{6} mu^3 fcdx (k - x) (\sin \theta^2 - \sin \phi^2)$.

C O R O L L A I R E I I I.

(846.) Comme on suppose le corps composé de deux moitiés égales & semblables, & que les inclinaisons sont infiniment petites; le troisième & le cinquième terme de l'équation ci-dessus peuvent être supposés égaux à zéro, sans qu'il en résulte aucuns erreur sensible*; ce qui réduira le moment à $(HP + \frac{1}{12} m se^3 c) \sin \Delta + \frac{1}{2} mufcx^{\frac{1}{2}} ydy \sin \theta + \frac{1}{2} mufcx^{\frac{1}{2}} dx (k - x) \sin \theta$; les moments qu'éprouve le corps étant exprimés par la quantité $\frac{1}{2} mufcx^{\frac{1}{2}} ydy \sin \theta$, & . . . $\frac{1}{2} mufcx^{\frac{1}{2}} dx (k - x) \sin \theta$, exprimant les moments horizontaux.

* Ceci seroit rigoureusement vrai, s'il n'y avoit point d'inclinaison, parce qu'alors $\sin \theta = \sin \phi$ (669.); mais on voit que ces sinus doivent différer très-peu, puisqu'on suppose l'inclinaison infiniment petite.

(847.) On doit ajouter à ces moments ceux qui résultent de la dénivellation, à moins qu'ils ne soient susceptibles d'être négligés. Il en est de même de ceux qui pourroient résulter de l'action des surfaces les unes sur les autres.

(848.) MM. Léonard Euler & Bouguer, qui sont les Auteurs qui ont traité ce sujet avec le plus d'étendue, n'ont cependant calculé que les moments qui ont lieu dans le cas où le corps est en repos, ou lorsque $u = 0$. Les formules ci-dessus manifestent la différence qu'il peut y avoir d'un cas à l'autre. Dans le cas où le corps est en repos, le moment est seulement $= (HP + \frac{1}{11} m f e c) \sin \Delta$, & dans celui où le corps est en mouvement, il est = ...
 $(PH + \frac{1}{11} m f e c) \sin \Delta + \frac{1}{11} m f e c^2 y d y \sin \theta + \frac{1}{11} m f e c^2 d x (k - x) \sin \theta$;
 u ayant une valeur un peu considérable, la différence entre ces deux expressions est très-grande.

P R O P O S I T I O N L X V I I I.

(849.) Trouver les moments qu'éprouve un parallépipède rectangle qui flotte sur un fluide, ayant deux de ses côtés parallèles à l'horizon, le parallépipède se mouvant horizontalement, dans une direction parallèle à deux de ses côtés verticaux.

Le moment vertical qu'éprouvent les côtés verticaux est zéro, à cause que pour eux $dy = 0$. Le moment horizontal
 $m f c d x (k - x) (\frac{1}{2} x^2 u (\sin \theta + \sin \phi) + \frac{1}{11} u^2 (\sin \theta^2 - \sin \phi^2))$ se réduit à $m f c d x (k - x) \frac{1}{11} x^2 u = m c u (\frac{1}{11} k x^2 - \frac{1}{11} x^3)$, à cause que $\sin \theta = \sin \phi = 1$. Les moments qu'éprouve la base sont zéro, parce que pour elle on a $dx = 0$, $\sin \theta = \sin \phi = 0$, $y = Y$, & $dy = dY$. Enfin ceux qui proviennent de la dénivellation, sont, à cause de $dy = 0$, & de $\sin \theta = \sin \phi = 1$, sont, dis-je, dans l'une & l'autre surface = $m f c d x (k \pm x) (\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{11} u^2)$, & pour toutes les deux réunies, = $2 m f c d x k (\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{11} u^2) = 2 m e k (\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{11} x^2 u + \frac{1}{11} u^2 x)$; expression qui se réduit à $\frac{m c k u^4}{3.64}$, en substituant $\frac{1}{11} u$ pour x^2 (524 & 831, Note); de sorte que tous les moments qu'éprouve le parallépipède, sont = $m c (\frac{1}{11} k x^2 u + \frac{u^4}{64}) - \frac{1}{11} x^2 u$, ou, en mettant a pour toute la hauteur

verticale submergée dans le Fluide, ces moments seront = ...
 $mc(\frac{1}{3}k(a^{\frac{1}{2}}u + \frac{u^3}{64}) - \frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}u)$.

COROLLAIRE I.

(850.) Puisque $mc(\frac{1}{3}k(a^{\frac{1}{2}}u + \frac{u^3}{64}) - \frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}u)$ exprime les moments horizontaux, en les divisant par les résistances horizontales (640.) $\frac{1}{2}mc(a^{\frac{1}{2}}u + \frac{u^3}{64})$, on aura la distance du centre de gravité à celui des résistances horizontales = $k - \frac{3a^{\frac{1}{2}}}{5(a^{\frac{1}{2}} + \frac{u^3}{64})}$, & par conséquent la distance de ce dernier centre à la superficie du Fluide = $\frac{3a^{\frac{1}{2}}}{5(a^{\frac{1}{2}} + \frac{u^3}{64})}$.

COROLLAIRE II.

(851.) Ces moments seront positifs, & obligeront le parallélépipède à tourner, en élevant son extrémité choquante, si l'on a $k > \frac{3a^{\frac{1}{2}}}{5(a^{\frac{1}{2}} + \frac{u^3}{64})}$; au contraire, ils seront négatifs, & obligeront le parallélépipède à tourner, en abaissant son extrémité choquante, si l'on a $k < \frac{3a^{\frac{1}{2}}}{5(a^{\frac{1}{2}} + \frac{u^3}{64})}$; enfin ces moments seront zéro, ou le parallélépipède demeurera dans la situation horizontale, si $k = \frac{3a^{\frac{1}{2}}}{5(a^{\frac{1}{2}} + \frac{u^3}{64})}$.

S C O L I E.

(852.) La dénivellation des deux côtés, choquant & choqué, altere les forces qui agissent sur la base du parallélépipède, & par conséquent la dénivellation produit des moments qui agissent sur cette base.

PROPOSITION LXIX.

(853.) Trouver les moments qu'éprouve la base du même parallélépipède rectangle, & qui résultent des forces que lui communiquent les deux dénivellations.

La force horizontale qui agit sur une différencielle de surface plane choquante, submergée dans le Fluide, cette force étant produite par la dénivellation d'une autre surface également choquante,

a été trouvée (700.) = $mcdx \left((D+x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(u \sin \Theta - \frac{x \cos \Theta}{\sin \Theta})^{\frac{1}{2}} \right)^2$.
 $D+x$ exprimant la distance verticale de la différencielle à la superficie du Fluide, laquelle est = a dans le cas présent ; $\sin \Theta$ étant le sinus de l'angle que forme la direction du mouvement avec la surface qui cause la dénivellation, lequel sinus est, dans notre cas, = 1 ; & $\frac{x \cos \Theta}{\sin \Theta}$ la distance horisontale de la différencielle à l'extrémité de la surface ; distance que nous pouvons appeller y , de sorte qu'on aura $y = \frac{x \cos \Theta}{\sin \Theta}$, & $dx = \frac{dy \sin \Theta}{\cos \Theta}$. Substituant donc toutes ces valeurs dans l'expression ci-dessus, on la réduit à $\frac{mcdy \sin \Theta}{\cos \Theta} (a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(u-y))^2$.

Multipliant ensuite cette force horisontale par $\frac{\cos \Theta}{\sin \Theta}$ (580 & 613.) *, elle se transforme dans la force verticale, qui est par conséquent = $mcdy (a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(u-y))^2$. Nommant maintenant e la longueur du parallélipède, on aura $\frac{1}{2}e - y$, pour la distance de son centre à la verticale qui passe par la différencielle ; & par conséquent le moment que la différencielle éprouve sera = $mc (\frac{1}{2}e - y) dy (a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(u-y))^2$. Par la même raison, le moment qu'éprouvera une autre différencielle également éloignée de l'autre extrémité de la base, à raison de la dénivellation sur la surface choquée, sera = ...
 $mc (\frac{1}{2}e - y) dy (a^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(u-y))^2$. Or ce moment étant soustractif, tandis que l'autre est additif, le moment qui résulte des deux sera par conséquent = $\frac{1}{2}mca^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2}e - y)(u-y) dy$; quantité dont l'intégrale est = $\frac{1}{2}mca^{\frac{1}{2}} y (\frac{1}{2}eu - \frac{1}{2}ey - \frac{1}{2}uy + \frac{1}{2}y^2)$; ou, en faisant $y = u$ (597.), l'espace jusqu'où atteint la dénivellation n'étant pas plus grand que e , les moments qu'éprouve la base entière, seront = $\frac{1}{2}mca^{\frac{1}{2}} u^2 (\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}u)$.

COROLLAIRE I.

(854.) Ayant $u > e$, on doit faire, dans l'intégrale, $y = e$, & les moments qu'éprouve la base, deviendront = $\frac{1}{2}mca^{\frac{1}{2}} e^3$.

COROLLAIRE II.

(855.) Comme la vitesse u n'entre pas dans l'expression de ces

* L'application des Art. cités au cas présent, paroîtra évidente, si l'on remarque, pour l'Art. 580, que $\sin \Theta = 1$ dans le cas dont il s'agit ici ; & pour l'Art. 613, que $dc = db$, & par conséquent $c = b$.

moments, il s'ensuit que u étant $=e$, les moments qu'éprouve la base ne peuvent pas augmenter, quelque augmentation qui survienne dans la vitesse du parallépipède.

COROLLAIRE III.

(856.) La quantité e étant positive, aussi bien que $\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}u$, il s'ensuit que les moments qu'éprouve la base, dans un temps quelconque, seront positifs.

COROLLAIRE IV.

(857.) Les moments qu'éprouve tout le parallépipède seront donc exprimés par $mc(\frac{1}{2}k(a^2u + \frac{1}{64}u^2) - \frac{1}{2}a^2u + \frac{1}{2}a^2(\frac{1}{2}eu - \frac{1}{2}u^2))$.

COROLLAIRE V.

(858.) Ces moments seront positifs, & obligeront le parallépipède à tourner, en élevant son extrémité choquante, si l'on a $k > \frac{12a^2 - 15a^2(\frac{1}{2}eu - \frac{1}{2}u^2)}{20(a^2 + \frac{1}{64}u^2)}$; & au contraire, ils seront négatifs, & obligeront le parallépipède à tourner en abaissant son extrémité choquante, si l'on a $k < \frac{12a^2 - 15a^2(\frac{1}{2}eu - \frac{1}{2}u^2)}{20(a^2 + \frac{1}{64}u^2)}$ *.

COROLLAIRE VI.

(859.) On voit que la quantité u venant à varier, les moments varient aussi, que le parallépipède doit tourner, & que par conséquent les résistances varieront. Ainsi les résistances ne dépendront pas seulement de la vitesse, mais encore de la disposition, ou de l'inclinaison que prend le parallépipède.

SCOLIE I.

(860.) Tout ce qui précède suffit pour faire voir combien il est différent de considérer le corps sans mouvement horizontal, ou de le considérer quand ce mouvement existe. Dans le premier cas, le parallépipède n'éprouve aucun moment, ou, pour en éprouver, il est nécessaire qu'il s'incline, en abaissant sa surface cho-

* On trouve ces expressions en divisant la somme des moments donnés dans l'Art. 857, par la somme des résistances, laquelle est toujours la même que celle qu'on a employée dans l'Art. 850, ainsi qu'on l'a démontré Art. 727; & on raisonnera d'ailleurs, comme on l'a fait dans l'Art. 851, pour distinguer le cas où ces moments sont positifs, ou négatifs.

Ch. X. DES MOMENTS DES CORPS MUS HORIZONTAL. 339
 quante. Dans le second cas, au contraire, non seulement le corps éprouve des moments, sans qu'il soit nécessaire qu'il s'incline, mais ces moments peuvent le faire tourner, en l'obligeant d'élever sa surface choquante, principalement lorsque k est $> \frac{1}{2}a$.

PLANC. II.

SCOLIE I I.

(861.) Par ce que nous venons de dire, on voit encore clairement la vérité de la remarque que nous avons faite, en passant, dans l'Art. 807. Le corps varie sa disposition, ses résistances variant pendant le mouvement; & par conséquent les résistances ne demeurent pas constamment les mêmes que celles sur lesquelles nous avons fondé notre calcul, pour démontrer qu'il falloit au corps un temps infini pour acquérir sa plus grande vitesse: ainsi cette démonstration ne peut point subsister en rigueur; & ce que nous avons établi à ce sujet n'est vrai qu'à peu près dans les petites vitesses.

LEMME I I I.

(862.) Si l'on élève une perpendiculaire sur un petit quadrilatère parallèle à l'axe horizontal de rotation, & si l'on prolonge cette perpendiculaire jusqu'à ce qu'elle rencontre le plan vertical qui coïncide avec l'axe, l'expression $\frac{r \sin \alpha}{\sin \alpha}$ sera égale à la verticale comprise entre la perpendiculaire & l'axe.

Que C soit un petit quadrilatère sur lequel on élève la perpendiculaire CK , laquelle rencontre en K le plan vertical KO , qui coïncide avec l'axe O . Cela posé, il est clair que l'angle CKO est égal à celui que forme le petit quadrilatère avec l'horison, angle dont le sinus est $\sin \alpha$, (569.). Pareillement $\sin \alpha$ est le sinus de l'angle OCK , complément de celui que forme CO avec le petit quadrilatère (822, Note). Ainsi nous aurons le sinus de $CKO = \sin \alpha$, est au sinus de $OCK = \sin \alpha$, comme $r = CO$, est à $KO = \frac{r \sin \alpha}{\sin \alpha}$.

Fig. 62.

PROPOSITION LXX.

(863.) Trouver les moments qu'éprouve le même parallépipède rectangle, flottant comme on l'a dit ci-dessus, mais ayant sa base inclinée à l'horison, & les deux côtés de cette base qui sont perpendiculaires à la direction du mouvement, étant parallèles au même horison.

Soit $AKBF$ le parallépipède, O son centre de gravité, & ED la superficie du fluide. Soit mené LOM parallèle aux côtés KA ,

Fig. 63.

BF, l'horizontale AJ, & les verticales FQ, EG, & RON. Soit enfin $AF = e$, $AM = g$, $OM = n$, $EG = a$, l'angle de l'inclinaison $JAF = \Delta$, & $FQ = a + e \sin \Delta$.

Le moment qu'éprouve une différencielle de la surface choquante est $= \frac{mbdx \sin \pi}{\sin \pi} (x + \frac{1}{2}ux^{\frac{1}{2}} \cos \Delta + \frac{1}{6}u^2 \cos^2 \Delta)^*$. Or puisque $HC = x$, & que CS est perpendiculaire à DF, on aura (862.) $OS = \frac{r \sin \pi}{\sin \pi}$; $DC = \frac{x}{\cos \Delta}$; $FD = \frac{a + e \sin \Delta}{\cos \Delta}$; $FC = \frac{a + e \sin \Delta - x}{\cos \Delta}$; $FC - OM = OV = \frac{a + e \sin \Delta - x}{\cos \Delta} - n$; & $OS = \frac{r \sin \pi}{\sin \pi} = \frac{a + e \sin \Delta - x}{\cos \Delta^2} - \frac{n}{\cos \Delta}$. Substituant cette dernière valeur de OS dans l'expression du moment, elle devient $mbdx (\frac{a + e \sin \Delta - x}{\cos \Delta^2} - \frac{n}{\cos \Delta})(x + \frac{1}{2}ux^{\frac{1}{2}} \cos \Delta + \frac{1}{6}u^2 \cos^2 \Delta)$; d'où l'on tire, en intégrant, & substituant, après l'intégration, $a + e \sin \Delta$ à la place de x , $\frac{mb(a + e \sin \Delta)^2}{\cos \Delta^2} (\frac{1}{2}(a + e \sin \Delta) + \frac{1}{11}u(a + e \sin \Delta) \cos \Delta + \frac{1}{2.64}u^2 \cos^2 \Delta) - \frac{mbn(a + e \sin \Delta)}{\cos \Delta} (\frac{1}{2}(a + e \sin \Delta) + \frac{1}{11}u(a + e \sin \Delta) \cos \Delta + \frac{1}{2.64}u^2 \cos^2 \Delta)$: c'est l'expression des moments qu'éprouve toute la surface choquante.

Les moments qu'éprouve la surface choquée, sont les mêmes en changeant le signe de u , & supposant $e \sin \Delta = 0$: ces moments seront donc $= \frac{mba^2}{\cos \Delta^2} (\frac{1}{2}a - \frac{1}{11}a^2 u \cos \Delta + \frac{1}{2.64}u^2 \cos^2 \Delta) - \dots$
 $\frac{mbn}{\cos \Delta} (\frac{1}{2}a - \frac{1}{11}ua^{\frac{1}{2}} \cos \Delta + \frac{1}{6}u^2 \cos^2 \Delta)$.

Le moment qu'éprouve une différencielle de la base est $= \dots$
 $\frac{mbr \sin \pi dx}{\sin \pi} (a + x - \frac{1}{2}u \sin \Delta (a + x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}u^2 \sin^2 \Delta)$ (Voyez la Note de l'Art. 659.). Or, puisque $ZY = x$, & que YW est perpendiculaire à AF, on aura (862.) $OW = \frac{r \sin \pi}{\sin \pi}$; $AY = \frac{x}{\sin \Delta}$; $\dots$
 $MY = g - \frac{x}{\sin \Delta}$; & $OW = \frac{r \sin \pi}{\sin \pi} = \frac{g}{\sin \Delta} - \frac{x}{\sin \Delta^2}$; ce qui réduit le moment à $mbdx (\frac{g}{\sin \Delta} - \frac{x}{\sin \Delta^2})(a + x - \frac{1}{2}u \sin \Delta (a + x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}u^2 \sin^2 \Delta)$; quantité dont l'intégrale, après avoir substitué $e \sin \Delta$ pour x , est $= \frac{mb}{\sin \Delta} (ae \sin \Delta + \frac{1}{2}e^2 \sin^2 \Delta - \frac{1}{2}u \sin \Delta ((a + e \sin \Delta)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}) + \frac{1}{6}u^2 e \sin^3 \Delta) - \frac{mb}{\sin \Delta^2} (\frac{1}{2}ae^2 \sin \Delta^2 + \frac{1}{2}e^3 \sin \Delta^3 - \frac{1}{2}u \sin \Delta (a + e \sin \Delta)^{\frac{3}{2}} (\frac{1}{2}(a + e \sin \Delta) - \frac{1}{2}a)) + \frac{mb}{\sin \Delta^2} (\frac{1}{2}ua^{\frac{1}{2}} \sin \Delta - \frac{1}{2.64}u^2 e^2 \sin \Delta^2)$.

* Car $\sin \pi = \cos \Delta$.

Les moments qu'éprouve une différencielle de la surface choquante, en vertu de la dénivellation, sont

$$mbdx \left(\frac{a+e \sin \Delta - x}{\cos \Delta} - \frac{n}{\cos \Delta} \right) \left(x - \frac{1}{2} u x^{\frac{1}{2}} \cos \Delta + \frac{1}{6} u^2 \cos \Delta^2 \right); \text{ \& ceux}$$

qu'éprouve une différencielle de la surface choquée, sont = . . .

$$mbdx \left(\frac{a-x}{\cos \Delta} - \frac{n}{\cos \Delta} \right) \left(x - \frac{1}{2} u x^{\frac{1}{2}} \cos \Delta + \frac{1}{6} u^2 \cos \Delta^2 \right): \text{ ces deux mo-}$$

ments réunis seront donc = ...

$$mbdx \left(\frac{2a+e \sin \Delta}{\cos \Delta} - \frac{2n}{\cos \Delta} \right) \left(x - \frac{1}{2} u x^{\frac{1}{2}} \cos \Delta + \frac{1}{6} u^2 \cos \Delta^2 \right)^*: \text{ quantité dont}$$

l'intégrale, après avoir substitué $\frac{1}{6} u^2 \cos \Delta^2$ pour x , est = ...

$$\frac{mbu^2 \cos \Delta^4}{6.64^3} \left(\frac{2a+e \sin \Delta}{\cos \Delta} - \frac{2n}{\cos \Delta} \right); \text{ c'est l'expression des moments prové-}$$

nants des deux dénivellations.

Si l'on ajoute maintenant ces moments avec ceux qu'éprouve la surface choquante, & si l'on soustrait de la somme ceux qu'éprouve la surface choquée, & ceux de la base, les moments qu'éprouvera tout le parallépipède, seront exprimés par

$$mb \left\{ \begin{aligned} & \frac{(a+e \sin \Delta)^3 - a^3}{6. \cos \Delta^2} + \frac{u(a+e \sin \Delta)^{\frac{1}{2}} + u^{\frac{1}{2}}}{15 \cos \Delta} + \frac{u^2((a+e \sin \Delta)^2 - a^2)}{2.64} + \frac{u^4(2a+e \sin \Delta) \cos \Delta^2}{6.64^2} \\ & - \frac{n((a+e \sin \Delta)^2 - a^2)}{2 \cos \Delta} - \frac{1}{2} nu((a+e \sin \Delta)^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{6} nu^2 e \sin \Delta \cdot \cos \Delta - \frac{2nu^4 \cos \Delta^2}{6.64^2} \\ & - ge(a + \frac{1}{2} e \sin \Delta) + \frac{1}{6} gu((a+e \sin \Delta)^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{6} gu^2 e \sin \Delta^2 \\ & + \frac{1}{2} e^2(a + \frac{1}{2} e \sin \Delta) - \frac{u(a+e \sin \Delta)^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}(a+e \sin \Delta) - \frac{1}{2}a)}{2 \sin \Delta} - \frac{u^{\frac{1}{2}}}{15 \sin \Delta} + \frac{u^2 e^2 \sin \Delta^2}{2.64} ** \end{aligned} \right.$$

COROLLAIRE I.

(864.) Comme tous les termes qui sont affectés de n sont négatifs, il s'en suit que moins cette quantité sera grande, ou plus le centre de gravité sera bas, plus les moments seront positifs, & par conséquent plus le parallépipède élèvera avec force son extrémité choquante.

COROLLAIRE II.

(865.) Les moments seront positifs, ou négatifs, suivant la

* Il faut observer que dans l'expression des moments causés par la dénivellation, si l'on prend x positivement pour la surface choquante, il faut la prendre négativement pour la surface choquée, & réciproquement.

** Nous n'avons point développé les intégrations & les autres calculs que renferme cette Proposition, parce que nous sommes déjà entrés dans ces détails pour des calculs analogues. Les Commencemens pourrout s'exercer sur ceux-ci, qui n'ont d'autres difficultés que leur longueur. Nous nous contentons d'avoir corrigé quelques négligences typographiques qui se trouvent en cet endroit dans l'original.

relation qui aura lieu entre les trois quantités, a , $\sin \Delta$, & u , lesquelles sont variables, & dépendent les unes des autres.

COROLLAIRE III.

(866.) Comme la quantité n ne se trouve dans aucun des moments qui proviennent de la base, il s'ensuit que, quoique le centre de gravité soit plus ou moins élevé, cela ne peut altérer aucunement ces moments.

COROLLAIRE IV.

(867.) Dans le premier instant de l'action ; ou du mouvement du parallépipède, $u = 0$, & les moments deviennent par conséquent =

$$mb \left(\frac{(a + \epsilon \sin \Delta)^2 - a^2}{6 \cos \Delta^2} - \frac{n((a + \epsilon \sin \Delta)^2 - a^2)}{2 \cos \Delta} - g \epsilon (a + \frac{1}{2} \epsilon \sin \Delta) + \frac{1}{2} \epsilon^2 (a + \frac{1}{2} \epsilon \sin \Delta) \right)$$
 Donc, pour que, dès ce premier instant, les moments soient positifs, il est nécessaire qu'on ait $n < \frac{(a + \epsilon \sin \Delta)^2 - a^2 + \epsilon a (3 \epsilon - 6g) \cos \Delta^2 + \epsilon^2 (2 \epsilon - 3g) \sin \Delta \cos \Delta^2}{3((a + \epsilon \sin \Delta)^2 - a^2) \cos \Delta}$.

S C O L I E.

(868.) De même qu'on a calculé les effets que les dénivellations produisent dans la base du parallépipède, dans le cas où on le supposoit horizontal, on peut pareillement les calculer, dans le cas où le corps seroit incliné ; mais comme le calcul est long & pénible, & que d'ailleurs il n'est pas nécessaire pour remplir notre objet, nous avons cru pouvoir nous dispenser de le donner ici.

PROPOSITION LXXI.

(869.) Trouver les moments qu'éprouve un cylindre qui flotte, & qui se meut horizontalement suivant une direction perpendiculaire à son axe.

Soit $BQDE$ le cylindre, H son axe, & O son centre de gravité. Soit GI la superficie du Fluide, BE un diamètre horizontal, & les lignes CL , HQ & OK , des droites verticales. Soit tiré la ligne HOD , & faisant $CH = R$, $OH = K$, $CA = x$, $AL = f$, & l'angle $HOK = \Delta$, on aura $CL = x + f$; $HL = \sqrt{R^2 - (x + f)^2}$; $FO = K \cos \Delta$; $NO = k = K \cos \Delta - f$; $HF = K \sin \Delta$;
 $KF = \frac{K \sin \Delta (x + f)}{\sqrt{K^2 - (x + f)^2}}$; $\frac{dv}{dx} = \frac{KF}{HF} = \frac{x + f}{\sqrt{R^2 - (x + f)^2}}$; $\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{\sqrt{R^2 - (x + f)^2}}{R}$;
 & $LH + HF = \gamma = \sqrt{R^2 - (x + f)^2} + K \sin \Delta$: ce qui donne
 $\frac{\gamma dy}{dx} = x + f + \frac{K \sin \Delta (x + f)}{\sqrt{R^2 - (x + f)^2}}$. Ces valeurs étant substituées dans la for-

mule des moments qui (830.) est $mc(\frac{ydy}{x} + k - x)(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{ux}{8\sqrt{dx^2 + dy^2}})^2 dx$,

elle deviendra $mcK(\cos \Delta \pm \frac{(x+f) \sin \Delta}{\sqrt{R^2 - (x+f)^2}})(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u\sqrt{R^2 - (x+f)^2}}{8K})^2 dx$;

le signe — ayant lieu pour la partie choquée, puisque, pour cette partie, la quantité $KF = \frac{K(x+f) \sin \Delta}{\sqrt{R^2 - (x+f)^2}}$ est négative. Soustrayant main-

tenant le moment de la partie choquée, de celui de la partie choquante, & intégrant, on trouvera, pour l'expression des moments qu'éprouve tout le cylindre, la quantité $\frac{mcKu \cos \Delta}{2R} \int x^{\frac{1}{2}} dx \sqrt{R^2 - (x+f)^2} + \dots$

$2mcK \sin \Delta (\int \frac{(x+f) x dx}{\sqrt{R^2 - (x+f)^2}} + \frac{u^2}{64 R^2} \int (x+f) dx \sqrt{R^2 - (x+f)^2})$.

COROLLAIRE I.

(870.) La quantité $\frac{mcu}{2R} \int x^{\frac{1}{2}} dx \sqrt{R^2 - (x+f)^2}$ est (663.) l'expression de la résistance horizontale qu'éprouve le cylindre; &

$2mc (\int \frac{(x+f) x dx}{\sqrt{R^2 - (x+f)^2}} + \frac{u^2}{64 R^2} \int (x \pm f) dx \sqrt{R^2 - (x \pm f)^2})$, (637.), est l'expression de la force, ou résistance verticale: si nous appelons N la première de ces résistances, & Q la seconde, les moments qu'éprouve le cylindre deviendront $= NK \cos \Delta + QK \sin \Delta = K(N \cos \Delta + Q \sin \Delta)$.

COROLLAIRE II.

(871.) Si l'on avoit $u = 0$, le moment qu'éprouveroit tout le cylindre, seroit $= 2mcK \sin \Delta \int \frac{(x+f) x dx}{\sqrt{R^2 - (x+f)^2}}$, ou, parce que . .

$2mc \int \frac{(x \pm f) x dx}{\sqrt{R^2 - (x \pm f)^2}}$ exprime, dans ce cas, la force verticale qu'éprouve le même cylindre, laquelle force est égale à son poids (561 & 562.), si nous appelons P le poids du cylindre, le moment que ce corps éprouvera, lorsque $u = 0$, sera $= PK \sin \Delta$, comme on l'a dit ci-dessus, Art. 838.

S C O L I E.

(872.) Quoique dans le calcul qu'on vient de faire des moments qu'éprouve le cylindre, on n'ait pas fait mention de ceux qui proviennent de la dénivellation, ils ne laissent pas pour cela d'être compris dans l'expression $K(N \cos \Delta + Q \sin \Delta)$. La formule de ces moments est $mc \int \frac{r \sin x}{\sin n} dx (x - \frac{1}{2} u x^{\frac{1}{2}} \sin n + \frac{1}{2} u^2 \sin n^2)^*$, tant pour

Car $\sin n = \sin n$ dans le cas dont il est ici question (584 & 586.).

ceux de la surface choquante que pour ceux de la surface choquée, parce qu'ils sont positifs dans les deux surfaces (823, *Note.*). Substituant dans cette formule, à la place de $\frac{f \sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = KO$ (862.) = $FO \pm FK$, la valeur $K \cos \Delta \pm \frac{K \sin \Delta (x \pm f)}{\sqrt{R^2 - (x \pm f)^2}}$; & prenant la somme des moments pour les deux surfaces, les moments effectifs seront = ...
 $2mcK \cos \Delta \int dx (x - \frac{1}{2}ux^{\frac{1}{2}} \sin \alpha + \frac{1}{6}u^2 \sin^2 \alpha)$: mais la résistance horizontale que produit la dénivellation, est aussi = ...
 $2mc \int dx (x - \frac{1}{2}ux^{\frac{1}{2}} \sin \alpha + \frac{1}{6}u^2 \sin^2 \alpha)$: donc la résistance horizontale N n'est pas seulement égale à la première quantité $\frac{mcu}{2R} \int x^{\frac{1}{2}} dx \sqrt{R^2 - (x \pm f)^2}$; mais à cette quantité plus $2mc \int dx (x - \frac{1}{2}ux^{\frac{1}{2}} \sin \alpha + \frac{1}{6}u^2 \sin^2 \alpha)$. Par conséquent, N exprimant la résistance horizontale totale qu'éprouve le cylindre, les moments qui résultent de la dénivellation seront compris dans l'expression $K(N \cos \Delta + Q \sin \Delta)$.

CHAPITRE XI.

De l'inclinaison que prennent les corps flottants sur des Fluides, lorsqu'ils sont poussés par une, ou par plusieurs puissances.

PROPOSITION LXXII.

(873.) **T**ROUVER l'inclinaison que prennent les corps flottants sur des Fluides, lorsqu'ils sont poussés par une, ou par plusieurs puissances.

L'inclinaison n'est autre chose que la situation dans laquelle se trouve le corps à l'égard de la verticale, lorsqu'il cesse déjà de tourner sur un axe horizontal, étant poussé par une, ou par plusieurs puissances, à cause que, dans cette situation, les moments des puissances sont équilibre à ceux des résistances du Fluide. Il n'est donc question que de trouver les uns & les autres moments, par ce qu'on a dit dans les *Chapitres* précédents, ou par les *Propositions* qui suivent; égalant ensuite leur somme à zéro, on déduira, de l'équation qui en résultera, l'inclinaison que prendra le corps.

PROPOSITION LXXIII.

(874.) Trouver le moment avec lequel agit un poids qu'on ajoute à

Chap. XI. DE L'INCLINAISON DES CORPS FLOTTANTS. 345
à un corps flottant, ce poids étant placé dans un point déterminé du plan vertical perpendiculaire à l'axe de rotation qui passe par le centre de gravité.

PLANC. III.

Que π soit le poids qu'on suppose placé dans le plan vertical perpendiculaire à l'axe de rotation qui passe par le centre de gravité O . Que p soit la perpendiculaire πX au plan qui coïncide avec l'axe, & avec les centres de gravité & de volume; & soit enfin $OX = q$. Cela posé, πR , perpendiculaire au plan vertical qui coïncide avec l'axe, sera $= q \sin \Delta + p \cos \Delta$, Δ exprimant l'angle de l'inclinaison ROX que prend le corps, & le moment du poids sera par conséquent $= \pi (q \sin \Delta + p \cos \Delta)^*$.

FIG. 69.

SCOLIE.

(875.) On suppose que l'axe de rotation est horizontal, & que le corps a toute la régularité nécessaire, pour qu'après s'être incliné, l'axe se conserve de la même manière, c'est-à-dire, dans sa situation horizontale; sans cela, il faut avoir égard à une nouvelle inclinaison perpendiculaire à la première.

COROLLAIRE I.

(876.) Si l'on ajoutoit au corps différents poids π , chacun d'eux en particulier produiroit le moment $\pi(q \sin \Delta + p \cos \Delta)$; & la somme de tous ces moments seroit le moment total qui agit sur le corps.

COROLLAIRE II.

(877.) Si, au lieu d'ajouter un poids π , on le retranchoit, alors π seroit négatif, & son moment seroit $= -\pi (q \sin \Delta + p \cos \Delta)$.

COROLLAIRE III.

(878.) Si en même temps on retranchoit un poids π de la partie opposée à l'axe de rotation, p seroit négatif, & le moment seroit $= -\pi (q \sin \Delta - p \cos \Delta) = \pi (p \cos \Delta - q \sin \Delta)$, moment qui est positif dans le cas où $p \cos \Delta > q \sin \Delta$.

* Car l'angle $X\pi r$ est le complément de l'angle d'inclinaison ROX : ainsi la ligne $\pi n = \frac{p}{\cos \Delta}$, & $Xn = \frac{p \sin \Delta}{\cos \Delta}$. Retranchant Xn de OX , il reste $On = q - \frac{p \sin \Delta}{\cos \Delta}$, & par conséquent $Rn = q \sin \Delta - \frac{p \sin^2 \Delta}{\cos \Delta}$. Donc $\pi R = Rn + \pi n = q \sin \Delta - \frac{p \sin^2 \Delta}{\cos \Delta} + \frac{p}{\cos \Delta} = q \sin \Delta \cos \Delta + \frac{p(1 - \sin^2 \Delta)}{\cos \Delta}$; mais $1 - \sin^2 \Delta = \cos^2 \Delta$; substituant donc cette valeur, on aura $\pi R = q \sin \Delta + p \cos \Delta$.

TOME I. X X

COROLLAIRE IV.

(879.) Si le poids qu'on retranche d'un côté, étoit transporté au côté opposé, & placé à une même distance q de l'axe, les moments seroient $\pi (q \sin \Delta + p \cos \Delta) - \pi (q \sin \Delta - \Pi \cos \Delta) = (p + \Pi) \pi \cos \Delta$; c'est-à-dire que le moment seroit égal au produit du poids π par le cosinus de l'inclinaison, & par la distance horizontale $p + \Pi$, du point d'où l'on a ôté le poids jusqu'à celui où on l'a placé.

COROLLAIRE V.

(880.) Si l'inclinaison étoit très-petite, le même moment seroit $= \pi (p + \Pi)$; c'est-à-dire qu'il seroit égal au produit du poids π , par la distance $p + \Pi$ à laquelle on l'auroit transporté.

COROLLAIRE VI.

(881.) Si p & π demeurant positifs, on avoit q négatif; c'est-à-dire, si on plaçoit le poids π au-dessous du plan horizontal qui coïncide avec l'axe, le moment seroit $= \pi (p \cos \Delta - q \sin \Delta)$.

COROLLAIRE VII.

(882.) Si, de plus, on avoit $p = 0$, le moment se réduiroit à $-\pi q \sin \Delta$: donc tout poids placé au-dessous du centre de gravité, dans le plan qui passe par l'axe & par les centres de gravité & de grandeur, résiste à l'inclinaison dans la raison de $\pi q \sin \Delta$.

COROLLAIRE VIII.

(883.) Si au contraire on ôtoit le poids, le moment seroit $= \pi q \sin \Delta$, & il contribueroit à l'accroissement de l'inclinaison dans la raison de $\pi q \sin \Delta$.

PROPOSITION LXXIV.

(884.) Trouver l'inclinaison que prendra un parallépipède rectangulaire, flottant sur un fluide avec sa base parallèle à l'horizon, auquel on ajoute un nouveau poids dans un point déterminé du plan vertical perpendiculaire à deux de ses côtés; & qui passe par le centre de gravité.

Puisqu'on suppose, dans ce cas, que le parallépipède est sans mouvement, on a $\dot{u} = 0$. Les moments se réduisent donc (867.) à

$$mb \left(\frac{(a + e \sin \Delta)^2 - a^2}{6 \cos \Delta^2} - \frac{\pi ((\dot{x} + e \sin \Delta)^2 - \dot{x}^2)}{2 \cos \Delta} - g e (a + \frac{1}{2} e \sin \Delta) + \frac{1}{2} e (a + \frac{1}{2} e \sin \Delta) \right),$$

& l'on aura $\pi (q \sin \Delta + p \cos \Delta) = \dots$

$$mb \left(\frac{(a + e \sin \Delta)^2 - a^2}{6 \cos \Delta} - \frac{n((a + e \sin \Delta)^2 - a^2)}{2 \cos \Delta} - g e (a + \frac{1}{2} e \sin \Delta) + \frac{1}{2} e^2 (a + \frac{1}{2} e \sin \Delta) \right);$$

ou, parce que, dans ce cas, $g = \frac{1}{2} e$, $\pi (q \sin \Delta + p \cos \Delta) =$

$$mb \left(\frac{(a + e \sin \Delta)^2 - a^2}{6 \cos \Delta} - \frac{n((a + e \sin \Delta)^2 - a^2)}{2 \cos \Delta} + \frac{1}{2} e^2 \sin \Delta \right). \text{ La force ver-}$$

ticale qui agit sur le parallépipède est (561.) $= mbe \left(\frac{a + \frac{1}{2} e \sin \Delta}{\cos \Delta} \right)^*$;

qui, en supposant que P exprime le poids total du parallépipède;

fera $P + \pi = mbe \left(\frac{a + \frac{1}{2} e \sin \Delta}{\cos \Delta} \right)$, qui donne $a = \frac{(P + \pi) \cos \Delta}{mbe} - \frac{1}{2} e \sin \Delta$.

Substituant cette valeur dans l'équation précédente, elle se réduit

$$\text{à } \pi (q \sin \Delta + p \cos \Delta) = mbe \sin \Delta \left(\frac{P^2}{2 m^2 b^2 e^2} - \frac{n P}{mbe} + \frac{1}{2} e^2 + \frac{e^2 \sin \Delta^2}{24 \cos \Delta^2} \right)^{**}.$$

Si l'on suppose que a soit la hauteur verticale dont le parallépipède étoit enfoncé dans le Fluide, avant qu'on y ajoutât le poids π ***, ou lorsque sa base étoit dans une situation horizontale; comme, dans ce cas, $P = mbea$, on aura

$$\pi (q \sin \Delta + p \cos \Delta) = mbe \sin \Delta \left(\frac{1}{2} a^2 - na + \frac{1}{2} e^2 + \frac{e^2 \sin \Delta^2}{24 \cos \Delta^2} \right), \text{ ou}$$

$$\frac{\pi p \cos \Delta}{mbe \sin \Delta} - \frac{e^2 \sin \Delta^2}{24 \cos \Delta^2} = \frac{1}{2} a^2 - na + \frac{1}{2} e^2 - \frac{\pi q}{mbe}. \text{ Si l'on fait maintenant}$$

$$\frac{1}{2} a^2 - na + \frac{1}{2} e^2 - \frac{\pi q}{mbe} = \pm A^2, \text{ \& } x = \frac{e \sin \Delta}{\cos \Delta} = FJ, \text{ on aura } \frac{\pi p}{mbx} -$$

$$\frac{1}{2} x^2 = \pm A^2; \text{ ce qui donne } x^2 \pm 24 A^2 x - \frac{24 \pi p}{mb} = 0. \text{ Cette équation étant}$$

résolue par les règles de l'algèbre commune, donnera la valeur de x , & par conséquent de l'inclinaison que prendra le parallépipède****.

* Car le poids du volume de Fluide que déplace le parallépipède est $= mb \cdot \left(\frac{AE + FD}{2} \right) AF$; quantité qui devient celle de l'Auteur, en substituant pour AE , FD & AF leur valeur (263).

** On remarquera que l'Auteur n'a pas substitué la valeur entière de a ; mais seulement $a = \frac{P \cos \Delta}{mbe} - \frac{1}{2} e \sin \Delta$, en négligeant le terme $\frac{e^2 \cos \Delta}{mbe}$, qui contient le poids additionnel π multiplié par le cosinus de l'inclinaison, & divisé par mbe , comme étant très-petit par rapport aux autres. Au reste, toute difficulté disparaîtra, si l'on conçoit que P représente non seulement le poids total primitif du parallépipède, mais ce poids augmenté de π : car alors $a = \frac{P \cos \Delta}{mbe} - \frac{1}{2} e \sin \Delta$, comme l'Auteur l'a fait dans la substitution. Il nous paroît que c'est ainsi qu'on doit considérer P .

*** Conformément à la Note précédente, a doit représenter la hauteur verticale dont le parallépipède seroit submergé; même après l'addition du poids π , en supposant la base du parallépipède horizontale, & par conséquent π placé au centre de gravité, ou dans la verticale qui pèse par ce centre. Cette distance a ne peut être supposée égale à celle qui auroit lieu avant l'addition de π , qu'en considérant a comme une différentielle du poids total du parallépipède.

**** Car $x = \frac{e \sin \Delta}{\cos \Delta} = e \tan \Delta$: donc $\tan \Delta = \frac{x}{e}$.

COROLLAIRE I.

(885.) Si A^2 étoit positif, ou si, étant négatif, on avoit $(8A^2)^3$ moindre que $(\frac{12 \mp p}{mb})^2$, l'équation auroit deux racines imaginaires, & par conséquent une seule réelle, qui seroit = ...

$$\left(\frac{12 \mp p}{mb} + \left(\left(\frac{12 \mp p}{mb} \right)^2 \pm (8A^2)^3 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} \mp \frac{8A^2}{\left(\frac{12 \mp p}{mb} + \left(\left(\frac{12 \mp p}{mb} \right)^2 \pm (8A^2)^3 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}}} *$$
 racine qui indique la disposition unique du parallépipède, ou l'inclinaison qu'il doit prendre; le signe supérieur ayant lieu lorsque A^2 est positif, & l'inférieur lorsqu'il est négatif.

COROLLAIRE II.

(886.) Lorsque A^2 est négatif, si l'on avoit en même temps $(8A^2)^3$ plus grand que $(\frac{12 \mp p}{mb})^2$, l'équation auroit ses trois racines réelles **; & par conséquent le parallépipède pourroit prendre trois dispositions, ou inclinaisons différentes.

S C O L I E I.

(887.) Comme la formule $x^3 \pm 24A^2x - \frac{24 \mp p}{mb}$, est l'expression de la somme des moments, toutes les fois que ces moments sont positifs, leur effet se dirige pour soutenir, pour redresser, ou pour s'opposer à l'inclinaison du parallépipède; en un mot, leur effet est alors de le rendre plus stable. Au contraire, lorsque ces moments sont négatifs, ils tendent à le faire tomber davantage, ou à l'incliner de plus en plus. Les racines de l'équation sont donc les limites de ces moments positifs ou négatifs; & par conséquent toutes les fois que le parallépipède ira en s'inclinant, & qu'on passera d'une racine à une autre, on passera également des moments positifs aux négatifs, ou, au contraire, des négatifs aux positifs. Si les moments sont négatifs, lorsque le parallépipède va en s'inclinant, pour prendre la situation correspondante à la première racine; ils deviendront positifs, lorsque le parallépipède passera à la situation correspondante à la seconde racine, & ainsi de suite.

* Voyez, pour la démonstration, la Troisième Partie du Cours de Mathématiques de M. Bezout, Art. 195 & 197. Avec une légère habitude du calcul, on verra facilement l'identité de la seconde partie de cette racine, avec celle qu'on trouve à l'Art. 195 de l'Ouvrage cité.

** Voyez la Troisième Partie du Cours de Mathématiques de M. Bezout, Art. 198.

COROLLAIRE III.

(888.) Avant que le parallélipède s'établisse dans la situation correspondante à la première racine, les moments sont négatifs; car, en faisant $x=0$ dans la formule qui exprime ces moments, elle se trouve réduite à $-\frac{24\gamma p}{mb}$.

COROLLAIRE IV.

(889.) Le parallélipède doit donc s'incliner jusqu'à ce qu'il ait pris la situation correspondante à la première racine; & il ne peut passer à la situation qui correspond à la seconde, sans qu'une autre force étrangère, quelle qu'elle soit, ne détruise & surmonte l'effet des moments positifs qui s'y opposent, & ne les rende par conséquent négatifs.

SCOLIE II.

(890.) Le parallélipède ne peut se rétablir dans la situation correspondante à la seconde racine, s'il en est tiré par l'action de quelque force étrangère. Car si cette force l'oblige à se mettre plus vertical, les moments deviendront positifs, & par conséquent il continuera à se mettre de plus en plus vertical jusqu'à ce qu'il ait atteint la situation qui correspond à la première racine: & si elle l'oblige, au contraire, à se mettre moins vertical, les moments deviendront négatifs, & conséquemment le parallélipède continuera de s'incliner de plus en plus.

COROLLAIRE V.

(891.) La stabilité, ou la conservation des forces du parallélipède pour se maintenir sans tomber entièrement, consiste en ce qu'aucune force étrangère ne soit capable de l'incliner jusqu'à le faire passer au-delà de la situation correspondante à la seconde racine.

COROLLAIRE VI.

(892.) Si l'on avoit π , ou $p=0$, l'équation deviendrait $x^3 \pm 24A^2x=0$, dont la première racine est $x=0$: donc le parallélipède doit se maintenir droit, ou vertical, sur le fluide, à moins que quelque force étrangère ne surmonte les moments positifs dont l'effet se manifesterait dans l'inclinaison.

COROLLAIRE VII.

(893.) Les deux autres racines de l'équation $x^3 \pm 24A^2x=0$,

sont $x = 2A\sqrt{\mp\delta}$, qui sont imaginaires, lorsque A est positif : d'où il paroît qu'on devoit inférer que, dans ce cas, les moments qu'éprouvera le parallépipède dans son inclinaison, à quelque degré qu'elle parvienne, seront toujours positifs.

S C O L I E III.

(894.) Ce Corollaire seroit généralement vrai, si le cas où l'angle A de la base sort du Fluide, ne pouvoit pas arriver : dans ce cas, les moments, ainsi que la force verticale qui agit sur le parallépipède, ne sont plus les mêmes ; & par conséquent il en résulte une équation différente, & particulière à ce cas ; équation qui, comme on le verra, produit plus de racines que celle que nous avons premièrement trouvée. Comme M. Bouguer, dans son *Traité du Navire*, n'examine la stabilité que dans les inclinaisons infiniment petites, il pourroit paroître qu'il admet la généralité du Corollaire, puisqu'il recommande qu'on ait soin que le signe du second terme ne soit pas négatif, afin que les moments soient toujours positifs, & qu'à leur moyen, le parallépipède se redresse, ou soit stable. Nous n'insisterons pas sur ce que ces moments ne peuvent être négatifs que lorsque la totalité de la formule $x^3 \pm 24A^2x$ est négative, & non pas seulement lorsque son second terme est négatif ; parce que l'Auteur se bornant à la considération des inclinaisons infiniment petites, regarde comme négligeable le premier terme x^3 . Or, pour que le second terme $24A^2x$ ne soit pas négatif, il suffit que A^2 , ou sa valeur $\frac{1}{2}a^2 - na + \frac{1}{12}e^2 - \frac{\pi g}{mbc}$ ne le soit pas, ou à cause que M. Bouguer suppose $\pi = 0$, il suffit que la quantité $\frac{1}{2}a^2 - na + \frac{1}{12}e^2$ ne soit pas négative. De là il déduit que toutes les fois qu'on n'aura pas $n > \frac{1}{2}a + \frac{e^2}{12a}$, ou qu'on aura soin que le centre de gravité ne soit pas plus haut que $\frac{1}{2}a + \frac{e^2}{12a}$, on pourra être assuré de la stabilité du parallépipède. Il ajoute, en même temps, que cette quantité exprimant la hauteur à laquelle le centre de gravité peut être placé sans risque, on peut, avec raison, donner le nom de *Métacentre* au point qui la termine.

L'erreur à laquelle peut conduire cette conclusion de M. Bouguer, en ne considérant pas les choses avec le soin qu'il recommande, est palpable ; car l'expression $\frac{e^2}{12a}$ fait voir clairement que plus a sera petit, plus la hauteur du Métacentre sera grande, & par conséquent

la stabilité du parallépipède : de sorte que si *a* devenoit infiniment petite, on pourroit placer le centre de gravité à une hauteur infinie, sans que le parallépipède perdît rien de sa stabilité ; conséquence dont chacun peut appercevoir l'absurdité à la première vue. Cependant la conséquence dont il s'agit ici est certaine, lorsque les angles de la base ne sortent pas du Fluide , & c'est sur cette supposition que l'Auteur a fondé son raisonnement. Mais lorsque *a* est fort petite, il est si facile que les angles de la base sortent du Fluide , quoiqu'on suppose l'inclinaison infiniment petite , qu'on reconnoît clairement l'erreur dans laquelle on peut tomber.

Cette erreur n'a pas seulement lieu dans le cas du parallépipède, elle s'étend aux autres corps, parce que le défaut vient de la supposition qu'on fait en se bornant à l'examen des seules inclinaisons infiniment petites, qui est que la section de la superficie du Fluide, ainsi que le plan qui coïncide avec l'axe, & divise le corps en deux parties égales, sont toujours les mêmes ; ce qui est très-éloigné d'être certain, lorsque le corps occupe peu d'espace dans le Fluide , & que la puissance π qui agit sur lui, est très-considérable ; car la même puissance qui ne produit qu'une inclinaison infiniment petite, quand le corps occupe beaucoup d'espace dans le Fluide, en produira une très-sensible, lorsqu'il en occupe peu ; & dans ce cas, la supposition qu'on fait, que l'inclinaison est infiniment petite, est fautive, quelque petite qu'on suppose la puissance. A tout cela on doit ajouter que le poids du corps varie de la quantité π , & cette différence, à laquelle on n'a jamais fait attention, est d'autant plus considérable, que le poids du corps est plus petit.

PROPOSITION LXXV.

(895.) Trouver l'inclinaison que prendra le même parallépipède rectangle, lorsque quelqu'un de ses angles de la base sortira du Fluide.

Les moments qu'éprouve le parallépipède sont, (867.)

$$mb \left(\frac{(a+e \sin \Delta)^2 - a^2}{6 \cos \Delta} - \frac{a(a+e \sin \Delta)^2 - a^3}{2 \cos \Delta} \right) + \dots + mb \left(e(g-e) \left(a + \frac{1}{2} e \sin \Delta \right) + \frac{1}{2} e^2 \left(a + \frac{1}{2} e \sin \Delta \right) \right)^* ; \text{ mais, à cause que, dans ce cas, } e = EF, g = FM, \text{ \& } a = 0, \text{ ces moments se réduisent à } mb \left(\frac{e^2 \sin^2 \Delta}{6 \cos \Delta} - \frac{ne^2 \sin \Delta^2}{2 \cos \Delta} + \frac{1}{2} ge^2 \sin \Delta - \frac{1}{2} e^3 \sin \Delta \right). \text{ La}$$

* Voyez le *Scolie* suivant, Art. 896, & la Note qui l'accompagne.

force verticale qui agit sur le parallépipède, est (561.) = . .
 $\frac{1}{2} m b c . D F = P + \pi$, ou, en nommant ζ la ligne $D F$, $\frac{1}{2} m b c \zeta = P + \pi$;
 ce qui donne $c = \frac{P + \pi}{\frac{1}{2} m b \zeta}$, & $\frac{\sin \Delta}{\cos \Delta} = \frac{\zeta}{c} = \frac{\frac{1}{2} m b \zeta^2}{P + \pi}$. Nous aurons donc
 $\pi (q \sin \Delta + p \cos \Delta) = m b \left(\frac{e^3 \sin \Delta^3}{6 \cos \Delta^2} - \frac{n e^2 \sin \Delta^2}{2 \cos \Delta} + \frac{1}{2} g e^2 \sin \Delta + \frac{1}{2} e^3 \sin \Delta \right)$,
 ou, en divisant par $\sin \Delta$, & substituant les valeurs de c & de $\frac{\sin \Delta}{\cos \Delta}$,
 $\pi \left(q + \frac{p(P + \pi)}{\frac{1}{2} m b \zeta^2} \right) = m b \left(\frac{(P + \pi) \zeta}{3 m b} - \frac{n(P + \pi)}{m b} + \frac{g(P + \pi)^2}{\frac{1}{2} m^2 b^2 \zeta^2} - \frac{(P + \pi)^3}{\frac{1}{2} m^3 b^3 \zeta^3} \right)$: équation
 tion qui donne en réduisant $\zeta^4 - 3 n \zeta^3 + \frac{6 g (P + \pi) \zeta}{m b} - \frac{4 (P + \pi)^2}{m^2 b^2} \left. \begin{array}{l} \\ - \frac{3 p q \zeta^5}{P + \pi} - \frac{6 p^2 \zeta}{m b} \end{array} \right\} = 0$.

Ayant trouvé la valeur de ζ par cette équation, on aura celle
 de $c = \frac{P + \pi}{\frac{1}{2} m b \zeta}$, & par conséquent les deux points D & E , qui
 donnent la position de la superficie du Fluide, & par conséquent
 l'inclinaison du parallépipède.

S C O L E M.

(866.) Les moments que la base éprouve dans le cas présent, ne
 sont pas les mêmes que ceux qu'elle éprouve dans le précédent.
 Pour les moments du cas précédent, on a (863.) $r \sin x = g - \frac{x}{\sin \Delta}$ &
 pour ceux dont il est ici question, à cause de $c < 2g$, on a
 $r \sin x = g - \frac{x}{\sin \Delta} - (2g - c) = c - g - \frac{x}{\sin \Delta}$. Mettant donc
 dans la formule $m b (g c (a + \frac{1}{2} c \sin \Delta) - \frac{1}{2} c^2 (a + \frac{1}{2} c \sin \Delta))$, qui ex-
 prime les moments du cas précédent, $c - g$ pour g seul, nous
 aurons l'expression des moments pour le cas présent = ...
 $m ((c - g) (a + \frac{1}{2} c \sin \Delta) - \frac{1}{2} c^2 (a + \frac{1}{2} c \sin \Delta))$; ou, à cause qu'ils sont
 négatifs, $m l (c (g - c) (a + \frac{1}{2} c \sin \Delta) + \frac{1}{2} c^2 (a + \frac{1}{2} c \sin \Delta))$, comme nous
 l'avons supposé (865)

* Car $EY = \frac{x}{\sin \Delta}$, & par conséquent $YM = AM - EY - AE = g - \frac{x}{\sin \Delta} - AE$: or $AE =$
 $AF - EF = g - c$, donc $YM = g - \frac{x}{\sin \Delta} - (g - c) = c - g - \frac{x}{\sin \Delta}$: donc enfin OW , ou
 $r \sin x = \frac{c - g}{\sin \Delta} - \frac{x}{\sin \Delta}$; d'où l'on tire $r \sin x = c - g - \frac{x}{\sin \Delta}$, à cause que $\sin x = \sin \Delta$.

COROLLAIRE.

COROLLAIRE.

(897.) Si l'on avoit $\pi = 0$, l'équation se réduiroit à $z^4 - 3nz^3 + \frac{6gPz}{m\delta} - \frac{4P^2}{m^2\delta^2} = 0$; ou en substituant pour P sa valeur $2mbga$, & mettant, comme ci-dessus, e pour toute la longueur $2g$ de la base, on aura $z^4 - 3nz^3 + 3e^2az - 4e^2a^2 = 0$ *.

S C O L I E II.

(898.) Supposant que la stabilité du parallélipède doive se conserver lorsqu'on a $n < \frac{1}{12}a + \frac{e^2}{12a}$, faisons $n = \frac{e^2}{12a}$; & , pour simplifier l'équation, faisons $e = 12a$, elle se réduira à $z^4 - 36az^3 + 432a^2z - 576a^4 = 0$. La plus petite racine de cette équation est moindre que $2a$ **; & comme il faut que z devienne $= 2a$, pour que l'angle de la base commence à sortir du Fluide, il est clair que cette plus petite racine ne peut être d'aucune utilité pour notre objet ***. La seconde racine est à très-peu-près, $z = \frac{11}{12}a$, & encore cette quantité $\frac{11}{12}a$ est un peu moindre que la vraie racine; de sorte qu'en la substituant dans l'équation à la place de z , l'expression qui en résulte est négative. Ceci prouve que si quelque force étrangère oblige le parallélipède à s'incliner de façon qu'un de ses côtés soit submergé de $\frac{11}{12}a$, ou, ce qui est équivalent, de façon qu'elle l'oblige à s'incliner de $13^{\circ}\frac{1}{2}$ ****, le parallélipède tombera tout-à-coup, en continuant de s'incliner jusqu'à ce qu'il ait atteint la position qui correspond à la quatrième racine, parce que la troisième étant négative, elle ne peut nullement servir pour ce cas. Cette quatrième racine est à peu près $z = 35a$, & équivalait à une

* En suivant toujours l'esprit de la deuxième & troisième note de l'Art. 884, il ne seroit pas nécessaire d'anéantir le poids π pour parvenir à la même équation, il suffiroit de le supposer placé au centre de gravité; car alors les quantités p & q sont chacune $= 0$, & $P + \pi = 2m'g$, ou $= mbe$.

On voit, sans peine, que a exprime ici la profondeur verticale dont le parallélipède est submergé dans le Fluide, lorsqu'il est dans une situation horizontale (884.).

** Les plus légères notions de l'Algebre commune suffisent pour trouver ces racines. On suivra la méthode d'approximation qui est exposée à l'Art. 226 de la troisième partie du *Cours de Mathématiques* de M. *Bequet*.

*** Car, lorsque l'angle de la base commence à sortir du Fluide, on a, dans la supposition présente de $e = 12a$, $z = 12a \frac{\sin \Delta}{\cos \Delta}$; mais $\cos \Delta : \sin \Delta :: 6 : 1$, donc $\frac{\sin \Delta}{\cos \Delta} = \frac{1}{6}$, & par conséquent $z = 2a$.

**** Pour trouver cette inclinaison, il faut se rappeler que l'angle de la base étant hors du Fluide, la quantité $e = EF$, n'est plus $= 2g = 12a$. Pour en trouver la valeur, il faut avoir

inclinaison de plus de 88° à peu près : donc, quand une puissance étrangère fera incliner le parallépipède de $13^\circ\frac{1}{2}$, il tombera tout-à-coup jusqu'à l'inclinaison de 88° . On voit donc par-là combien ce corps est éloigné de conserver sa stabilité. On trouveroit encore de plus grandes différences, en supposant a plus petite ; mais il suffit, pour notre objet, de comprendre que la sûreté, ou la conservation de la stabilité ne peut être fondée que sur la supposition que les puissances étrangères ne puissent donner au corps une inclinaison plus grande que celle qui correspond à la seconde racine : cette limite étant passée, la stabilité se perd entièrement, & le corps prend une inclinaison presque totale.

PROPOSITION LXXVI.

(899.) *Trouver l'inclinaison que prendra un corps quelconque, flottant sur un Fluide, si on lui ajoute un nouveau poid dans un point déterminé du plan vertical, perpendiculaire à l'axe de rotation, qui passe par le centre de gravité.*

Comme dans ce cas, on a encore $u = 0$, le moment qui agit sur le corps est (830.) $= m\bar{f}cxdx (\frac{ydy}{dx} + k - x) = m\bar{f}cxydy - m\bar{f}cxdx (k - x)$. Mais le second terme de cette expression s'évanouit, à cause que les moments négatifs de la partie choquée sont égaux aux moments positifs de la partie choquante ; ainsi cette expression se réduit à $m\bar{f}cxydy$. Or le moment du poids est $= \pi (q \sin \Delta + p \cos \Delta)$, on aura donc également $\pi (q \sin \Delta + p \cos \Delta) = m\bar{f}cxydy$. Substituant dans le second membre de cette question, la valeur de y & celle de dy , en x

recours à l'équation $e = \frac{P + \pi}{\frac{1}{2}mb^2}$, (895.), laquelle devient $e = \frac{24a^3}{\zeta}$, en y substituant pour $P + \pi$, la valeur $2mbga$, & ensuite pour g sa valeur $6a$. Cette équation donnera $e = 10a$, en mettant pour ζ sa valeur $\frac{24}{10}a$. Ayant donc les valeurs de ζ & de e , on aura facilement celle de Δ , par l'équation $\frac{\sin \Delta}{\cos \Delta} = \frac{\zeta}{e}$, ou, ce qui est la même chose, en considérant le triangle DEF , qui donne $EF : DF :: 1 : \text{Tang } FED$, ou $e : \zeta :: 1 : \text{Tang } \Delta$, ou enfin, $10 : \frac{24}{10} :: 1 : \text{Tang } \Delta = \frac{6}{25}$. L'angle d'inclinaison est donc celui dont la tangente est les $\frac{6}{25}$ du rayon ; c'est à-dire, $= 24000$ (le rayon des tables ordinaires étant $= 100000$). & cette tangente répond à $13^\circ 30'$ à peu près. En procédant ainsi pour la quatrième racine $\zeta = 35a$, on trouvera $e = \frac{24}{35}a$, $\text{Tang } \Delta = \frac{1225}{24}$ du rayon, c'est-à-dire $= 5104166$, ce qui répond à $88^\circ 53'$.

& dx ; qu'on tirera de l'équation qui résulte de la figure & de la disposition du corps; intégrant ensuite, & substituant la plus grande valeur de x , déduite de l'équation $P + \pi = mscxdy$ qui a lieu entre le poids $P + \pi$ & la force verticale $mscxdy$, qui agit sur le corps, on aura une nouvelle équation, de laquelle on tirera la valeur de $\sin \Delta$.

COROLLAIRE I.

(900.) Si l'inclinaison étoit infiniment petite, on pourroit substituer à la place de $mscxdy$, la quantité $(\pm HP + \frac{m}{12} sce^3) \sin \Delta$, qui alors lui est égale (844.); & l'on auroit $\pi (q \sin \Delta + p) = (\pm HP + \frac{m}{12} sce^3) \sin \Delta$; ce qui donne $\sin \Delta = \frac{P^*}{\pm HP + \frac{m}{12} sce^3 - q^*}$ *.

COROLLAIRE II.

(901.) Dans les corps formés par la révolution d'une ligne quelconque autour de l'axe horizontal de rotation, le moment est (838.) $PK \sin \Delta$, P exprimant le poids total du corps, qui, dans le cas présent, est $P + \pi$. Substituant donc dans cette formule le poids $P + \pi$, à la place de P seul, on aura le moment $K(P + \pi) \sin \Delta$, & par conséquent $\pi (q \sin \Delta + p \cos \Delta) = K(P + \pi) \sin \Delta$, équation qui donne le sinus de l'inclinaison, ou $\sin \Delta = \frac{\pm P^*}{((K(P + \pi) - q^*)^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}}$ **.

COROLLAIRE III.

(902.) Ayant exprimé par q la distance du centre de gravité O , au plan qui, passant par le poids additionnel π , est perpendiculaire à DOH . Si nous supposons maintenant que q n'exprime plus que la distance de l'axe H au même plan, nous n'aurons qu'à substituer $K \pm q$, en place de q seul, & l'on aura le sinus de l'inclinaison, ou $\sin \Delta = \frac{\pm P^*}{((KP \pm q^*)^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}}$, ce sinus étant celui d'un angle plus grand que 90 degrés, si $KP - q^* \pi$ est négatif.

FIG. 62.

COROLLAIRE IV.

(903.) L'expression $\sin \Delta = \frac{\pm P^*}{((KP \pm q^*)^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}}$ ne donnant qu'une

* On suppose $\cos \Delta = 1$, comme il convient, puisque l'inclinaison est infiniment petite.

** Pour avoir $\sin \Delta$, il faut substituer, en place de $\cos \Delta$, la valeur $(1 - \sin^2 \Delta)^{\frac{1}{2}}$, faire évanouir le radical, & dégager ensuite $\sin \Delta$.

seule racine, ou valeur de $\sin \Delta$, attendu que la valeur négative ne sert que pour le côté opposé, lorsque p est négatif; il s'ensuit que les moments seront toujours positifs depuis l'inclinaison correspondante à cette première racine, ou valeur de $\sin \Delta$, qu'on incline comme on voudra un corps formé par la révolution d'une ligne quelconque autour d'une axe horizontal.

COROLLAIRE V.

(904.) Comme KP ne se trouve que dans le dénominateur, plus cette quantité sera grande, plus la valeur de $\sin \Delta$ sera petite.

PROPOSITION LXXVII.

(905.) *Trouver l'inclinaison que prendra un corps quelconque, qui, flottant sur un fluide, est poussé par une Puissance constante horizontale, & perpendiculaire à l'axe de rotation; qu'on suppose également horizontal; cette puissance étant placée dans la verticale qui passe par le centre de gravité.*

FIG. 76.

Les moments qui agissent sur le corps sont (830.) = ...
 $mfcydy(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2 + mfc dx(k-x)(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2$. Supposant maintenant que O est son centre de gravité, & que l'angle $AOB = \Delta$ est l'inclinaison qu'il auroit prise à l'égard de la verticale BO , si la puissance π , dont la direction est l'horizontale CA , agissoit au point A ; & si l'on fait de plus $AO = q$, il est clair qu'on aura le moment avec lequel la puissance π agit suivant $CD = q\pi \cos \Delta$. Cela posé, nous aurons les trois équations suivantes
 $q\pi \cos \Delta = mfcydy(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2 + mfc dx(k-x)(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2$,
 $P + \pi \sin \Delta \cdot \cos \Delta = mfc dy(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2$
 $\pi \cos \Delta^2 = mfc dx(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2$ *.

Substituant, dans ces équations, les valeurs de $\sin \theta$, de y &

* Car la force π qui agit suivant l'horizontale CA , peut être décomposée en deux autres, l'une perpendiculaire à AO , représentée par CD , & l'autre dirigée suivant OA , qui est exprimée par AD . La considération de cette dernière force est inutile, puisque sa direction passant par le centre de gravité, elle ne peut produire aucune rotation (*38.). Quant à la force CD , elle est $= \pi \cos \Delta$, & par conséquent son moment $= q\pi \cos \Delta$; or ce moment est égal à la somme des moments qu'éprouve le corps de la part du fluide, puisqu'il doit leur faire équilibre dans l'inclinaison; c'est ce qui donne la première équation. La force perpendiculaire CD peut également être décomposée en deux autres, l'une verticale, représentée par $DE = \pi \cos \Delta \cdot \sin \Delta$, & l'autre horizontale, représentée par $CE = \pi \cos \Delta^2$. La première étant ajoutée au poids P , équivaut à la somme des forces verticales qui agissent sur le corps (*61.); & la force horizontale $\pi \cos \Delta^2$, est égale la somme des forces horizontales, c'est ce qui fournit la seconde & la troisième équation.

Chap. XI. DE L'INCLINAISON DES CORPS FLOTTANTS. 357
 de dy , exprimées en x & dx , déduites de l'équation que donnera la figure & la disposition du corps, & intégrant réellement, on aura trois autres équations, par lesquelles on trouvera les valeurs de x , de u , & de Δ .

PROPOSITION LXXVIII.

(906.) *Trouver l'inclinaison que prendra un cylindre qui flotte horizontalement, ce cylindre étant poussé par une puissance constante π , horizontale, & perpendiculaire à l'axe; & cette puissance étant placée dans le plan vertical qui passe par le centre de gravité.*

Les moments qui agissent sur le cylindre, lorsqu'il n'est soumis à l'action d'aucune puissance, sont (870.) $= K(N \cos \Delta + Q \sin \Delta)$, N exprimant la résistance horizontale, & Q les forces verticales. Or lorsque ce cylindre a acquis sa plus grande vitesse, on a $N = \pi \cos \Delta$, & $Q = P + \pi \sin \Delta \cdot \cos \Delta$ (Voyez la Note de l'Art. précédent): donc, en substituant ces valeurs, nous aurons
 $K(\pi \cos \Delta^3 + P \sin \Delta + \pi \sin \Delta^3 \cdot \cos \Delta) = q \pi \cos \Delta$, ou en divisant par $K \cos \Delta$, & mettant l'unité en place de $\cos \Delta^3 + \sin \Delta^3$, $\pi + \frac{P \sin \Delta}{\cos \Delta} = \frac{q \pi}{K}$: ou enfin $\frac{P \sin \Delta}{\cos \Delta} = \frac{q \pi - K \pi}{K} = \frac{\pi(q - K)}{K}$: mais $\frac{\sin \Delta}{\cos \Delta}$ est l'expression de la tangente de l'angle de l'inclinaison que prendra le cylindre, ou $Tang \Delta$: donc on aura $Tang \Delta = \frac{\pi(q - K)}{KP}$.

COROLLAIRE I.

(907.) Si l'on vouloit une solution pour le cas particulier dans lequel la vitesse du cylindre est zéro, ou dans lequel un axe horizontal fixe, qui passe par le centre de gravité, assujettit le cylindre, de façon à empêcher son mouvement horizontal & vertical, & à lui laisser seulement le mouvement de rotation autour de cet axe; il n'y auroit qu'à retrancher les quantités qui dépendent de ces mouvements empêchés, laissant seulement le moment $KP \sin \Delta$ (871.), & l'on auroit $KP \sin \Delta = q \pi \cos \Delta$, ce qui donne $Tang \Delta = \frac{q \pi}{KP}$.

COROLLAIRE II.

(908.) La tangente de l'inclinaison, le cylindre étant libre, est à la même tangente, le cylindre tournant sur un axe fixe, comme $q - K$ est à q , ou comme la distance de la puissance à l'axe du

cylindre, est à la distance de la même puissance, au centre de gravité.

COROLLAIRE III.

(909.) Ces mêmes moments $KP \sin \Delta$, qui ont été trouvés pour le cylindre, ont également lieu pour tout corps formé par la révolution d'une ligne quelconque, autour d'un axe horizontal. On aura donc pour tous ces corps, dans le cas où l'on suppose l'axe fixe, la stabilité, ou la tangente de l'inclinaison $= \text{Tang } \Delta = \frac{q^2}{KP}$, cette Tangente étant plus grande que celle qui a lieu lorsque ces corps sont libres, ou avec leur mouvement horizontal.

COROLLAIRE IV.

(910.) La même chose arrive dans un corps quelconque, quoiqu'il ne soit pas formé par la révolution d'une ligne autour d'un axe horizontal, avec cette seule différence que la quantité K est variable, selon les différentes inclinaisons.

COROLLAIRE V.

(911.) Nous avons trouvé (838.) $K \sin \Delta = h$, h exprimant la distance horizontale du centre de gravité à la verticale, qui passe par le centre de volume. Donc on aura $K = \frac{h}{\sin \Delta}$; & cette valeur étant substituée dans l'équation $\text{Tang } \Delta = \frac{q^2}{KP}$, donne $\text{Tang } \Delta = \frac{q^2 \sin \Delta}{hP} = \frac{\sin \Delta}{\cos \Delta}$. Donc $\cos \Delta = \frac{hP}{q^2}$; & par conséquent $\sin \Delta = \frac{q^2 - h^2 P^2}{q^2}$.

CHAPITRE XII.

Des Moments qui agissent sur les corps, lorsqu'ils tournent librement dans des Fluides, sur un axe quelconque qui passe par leur centre de gravité.

PROPOSITION LXXIX.

(912.) **T**ROUVER les moments qui agissent sur un corps quelconque, tournant sur un axe qui passe par son centre de gravité.

Soit divisé la surface du corps en petits quadrilatères, sensible-

ment plans, par des plans horifontaux & verticaux, & cherchant la force positive ou négative qui agit fur chacun de ces petits quadrilateres, fuivant la direction de fon mouvement, on la multipliera par la diftance perpendiculaire du petit quadrilatre à l'axe de rotation. Prenant enfuite la fomme de tous les produits, on aura les moments totaux qu'on cherche.

La force horifontale, qui agit fur un petit quadrilatre, choquant, ou choqué, eft (624.) = ...

$$mc \left(Da \pm \frac{1}{2} u \sin \theta \left((D + \frac{1}{2} a)^{\frac{1}{2}} - (D - \frac{1}{2} a)^{\frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{6} u^2 a \sin \theta^2 \right), \text{ laquelle}$$

étant réduite à une direction quelconque devient = ...

$$\frac{mb \sin \pi}{\sin \alpha} \left(Da \pm \frac{1}{2} u \sin \theta \left((D + \frac{1}{2} a)^{\frac{1}{2}} - (D - \frac{1}{2} a)^{\frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{6} u^2 a \sin \theta^2 \right).$$

Supposons maintenant que r exprime la diftance perpendiculaire du petit quadrilatre à l'axe, le moment qui agit fur cette petite furface fera = $\frac{mb r \sin \pi}{\sin \alpha} \left(Da \pm \frac{1}{2} u \sin \theta \left((D + \frac{1}{2} a)^{\frac{1}{2}} - (D - \frac{1}{2} a)^{\frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{6} u^2 a \sin \theta^2 \right)$; & le moment total, c'est-à-dire, celui qui agit fur tout le corps fera = $m \int \frac{b r \sin \pi}{\sin \alpha} \left(Da \pm \frac{1}{2} u \sin \theta \left((D + \frac{1}{2} a)^{\frac{1}{2}} - (D - \frac{1}{2} a)^{\frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{6} u^2 a \sin \theta^2 \right).$

COROLLAIRE I.

(913.) Les moments de l'une & de l'autre dénivelation feront par conféquent = ...

$$m \int \frac{b r \sin \pi}{\sin \alpha} \left(Da - \frac{1}{2} u \sin \theta \left((D + \frac{1}{2} a)^{\frac{1}{2}} - (D - \frac{1}{2} a)^{\frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{6} u^2 a \sin \theta^2 \right).$$

COROLLAIRE II.

(914.) Si, une des moitiés du corps eft égale & femblable à l'autre moitié, de forte que les quantités r , $\sin \theta$, $\sin \pi$, D & a , de l'une des moitiés, foient égales aux mêmes quantités correfpondantes de l'autre moitié, en fommant les moments qui agiffent fur chaque paire de petits quadrilateres correfpondants dans l'une & dans l'autre moitié, on trouvera le moment qui agit fur tout le corps = $\frac{1}{2} m \int \frac{b r u \sin \pi \sin \theta}{\sin \alpha} \left((D + \frac{1}{2} a)^{\frac{1}{2}} - (D - \frac{1}{2} a)^{\frac{1}{2}} \right) = ...$

$\frac{1}{2} m \int \frac{b r u D^{\frac{1}{2}} a \sin \pi \sin \theta}{\sin \alpha} \left(1 - \frac{a^2}{96 D^2} - \frac{a^4}{2048 D^4} - \&c. \right)$; ou fi l'on néglige tous les termes de la férie excepté le premier, = ...

$$\frac{1}{2} m \int \frac{b r u D^{\frac{1}{2}} a \sin \pi \sin \theta}{\sin \alpha}.$$

COROLLAIRE III.

(915.) Si l'on appelle V la vitesse angulaire avec laquelle tourne le corps, on aura (131.) $V = \frac{u dt}{r}$, & $u = \frac{rV}{dt}$, substituant cette valeur de u dans l'expression des moments; ils seront encore exprimés par

$$m \int \frac{br \sin x}{\sin n} \left(Da \pm \frac{rV \sin \theta}{6 dt} \left((D + \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}} - (D - \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}} \right) + \frac{r^2 V^2 a \sin \theta^2}{64 dt^2} \right).$$

COROLLAIRE IV.

(916.) Les moments de l'une & de l'autre dénivellation seront par conséquent = ...

$$m \int \frac{br \sin x}{\sin n} \left(Da - \frac{rV \sin \theta}{6 dt} \left((D + \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}} - (D - \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}} \right) + \frac{r^2 V^2 a \sin \theta^2}{64 dt^2} \right).$$

COROLLAIRE V.

(917.) Si l'une des moitiés du corps étoit égale & semblable à l'autre moitié, de sorte que les quantités r , $\sin \theta$, $\sin x$, $\sin n$, D & a d'une moitié, fussent égales aux mêmes quantités correspondantes de l'autre moitié, en sommant les moments qui agissent sur deux petits quadrilatères correspondants dans l'une & dans l'autre moitié; on trouvera que le moment total, ou celui qui agit sur tout le corps sera $= \frac{1}{2} m \int \frac{br^2 V \sin x \cdot \sin \theta}{dt \sin n} \left((D + \frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D - \frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{2} m \int \frac{br^2 V \sin x \cdot \sin \theta D^{\frac{1}{2}} a}{dt \sin n} \left(1 - \frac{a^2}{95 D^2} - \frac{a^4}{2048 D^4} - \&c. \right).$

COROLLAIRE VI.

(918.) Si l'on exprimait les surfaces du corps par une équation algébrique, on pourroit substituer $D+x$ à la place de D , & dx à la place de a : par cette substitution les moments deviendroient $= m \int \frac{br \sin x}{\sin n} dx \left(D+x \pm \frac{rV \sin \theta}{4 dt} (D+x)^{\frac{1}{2}} + \frac{r^2 V^2 \sin \theta^2}{64 dt^2} \right)$; ou si le corps flotte, ils seroient $= m \int \frac{br \sin x dx}{\sin n} \left(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{rV \sin \theta}{8 dt} \right)^2$ *.

COROLLAIRE VII.

(919.) Si l'une des moitiés du corps étoit égale & semblable à l'autre moitié, de sorte que les quantités r , $\sin \theta$, $\sin x$, $\sin n$,

* Car alors $D=0$ (587.).

D & a d'une des moitiés, fussent égales aux mêmes quantités, correspondantes de l'autre moitié, l'expression des moments seroit =

$$\frac{1}{2} m V \int \frac{b r^2 (D+x)^{\frac{1}{2}} dx \sin x \cdot \sin \theta}{d \sin x}; \text{ \& si le corps étoit flottant, cette expression deviendrait } = \frac{1}{2} m V \int \frac{b r^2 x^{\frac{1}{2}} dx \sin x \sin \theta}{d \sin x}.$$

COROLLAIRE VIII.

(920.) Les moments qui agissent sur le corps seront donc, proportionnels à $\frac{V}{dt}$, ou seront égaux à une quantité constante quelconque, multipliée par $\frac{V}{dt}$.*.

COROLLAIRE IX.

(921.) Si le corps étoit formé par la révolution d'une ligne quelconque, autour de l'axe même qui passe par son centre de gravité, & sur lequel tourneroit le corps, on auroit $\sin x = 0$, & par conséquent les moments seront aussi égaux à zero.

PROPOSITION LXXX.

(922.) Décomposer les moments qui agissent sur un corps, dont les moitiés sont égales & semblables, & qui tourne sur un axe horizontal, en moments horizontaux & verticaux.

Si l'on divise par r le moment $\frac{m b r u D^{\frac{1}{2}} a \sin x \cdot \sin \theta}{2 \sin x} = \frac{m b r u x^{\frac{1}{2}} dx \sin x \cdot \sin \theta}{2 \sin x}$, qui agit sur deux petits quadrilatères quelconques correspondants, la force que ces deux petites surfaces exerceront, sera = $\frac{m b u x^{\frac{1}{2}} dx \sin x \cdot \sin \theta}{2 \sin x}$.

Or la vitesse u peut être décomposée dans la vitesse horizontale $\frac{u(k-x)}{r}$, & dans la verticale $\frac{u y}{r}$; k exprimant la distance du centre de gravité à la superficie du Fluide; x la distance verticale du petit quadrilatère à la même superficie; & y la distance horizontale du même petit quadrilatère au plan vertical qui coïncide avec l'axe. Substituant donc successivement ces valeurs à la place de u seul dans l'expression de la force, cette dernière se trouvera composée de deux autres, comme il suit : $\frac{m b u x^{\frac{1}{2}} dx (k-x) \sin x \cdot \sin \theta}{2 r \sin x} + \frac{m b u y x^{\frac{1}{2}} dx \sin x \cdot \sin \theta}{2 r \sin x}$. Mais

* Cela est évident; car, après l'intégration faite, la quantité qui multiplie $\frac{V}{dt}$ dans l'expression des moments, est constante pour le même corps.

la premiere de ces forces provenant d'un mouvement horifontal, on a, pour ce cas (584.), $\sin \theta = \sin \lambda \cdot \sin n$; & la seconde provenant d'un mouvement vertical, on aura (585.), $\sin \theta = \cos n$; la force dont il s'agit fera donc composée de ces deux

$\frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx}{2r\sin n} (\sin \lambda \cdot \sin \lambda \cdot \sin n (k-x) + y \sin \lambda \cdot \cos n)$. Chacune de ces parties peut encore être décomposée en deux autres, l'une horifontale, & l'autre verticale, en faisant, dans le premier cas (572, 573, 577 & 580.) $\sin \lambda = \sin \lambda \cdot \sin n$; & dans le second, $\sin \lambda = \cos n$; ainsi les quatre parties dans lesquelles la force sera divisée, seront =

$$\frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx}{2r\sin n} (\sin \lambda^2 \cdot \sin n^2 (k-x) + \sin \lambda \cdot \sin n \cdot \cos n (k-x) + y \sin \lambda \cdot \sin n \cdot \cos n + y \cos n^2)$$

Pour avoir maintenant les moments horifontaux & verticaux de cette force, on doit multiplier les parties $\sin \lambda^2 \cdot \sin n^2 (k-x) + y \sin \lambda \cdot \sin n \cdot \cos n$, par $k-x$, distance verticale du petit quadrilatre au plan horifontal qui passe par le centre de gravité; & les parties $\sin \lambda \cdot \sin n \cdot \cos n (k-x) + y \cos n^2$, par y , distance horifontale du même petit quadrilatre au plan vertical qui coïncide avec l'axe. Les moments qui agissent sur les deux petits quadrilateres correspondants seront donc = ...

$$\frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx}{2r\sin n} (\sin \lambda^2 \cdot \sin n^2 (k-x)^2 + 2 \sin \lambda \cdot \sin n \cdot \cos n (k-x) y + y^2 \cos n^2) =$$

$$\frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx}{2r\sin n} (\sin \lambda \cdot \sin n (k-x) + y \cos n)^2, \text{ ou, en faisant } \frac{udt}{r} = V, \text{ ce}$$

qui donne $u = \frac{Vr}{dt}$, ces moments seront = ...

$\frac{mbVx^{\frac{1}{2}}dx}{2dt\sin n} (\sin \lambda \cdot \sin n (k-x) + y \cos n)^2$. Enfin la somme de tous les moments qui agissent sur le corps entier sera = ...

$$\frac{\frac{1}{2}mV}{dt} \int \frac{bx^{\frac{1}{2}}dx}{\sin n} (\sin \lambda \cdot \sin n (k-x) + y \cos n)^2 = ...$$

$$\frac{\frac{1}{2}mV}{dt} \int cx^{\frac{1}{2}}dx (\sin \lambda \cdot \sin n (k-x)^2 + 2y(k-x) \cos n + \frac{y^2 \cos n^2}{\sin \lambda \cdot \sin n})^*.$$

PROPOSITION LXXXI.

(923.) Réduire les moments qui agissent sur un corps dont les moitiés sont égales & semblables, & qui tourne, sur un axe vertical, à deux moments horifontaux perpendiculaires entre eux.

* Car $b = \frac{c}{\sin \lambda}$, Art. 575,

Soit supposé deux plans verticaux perpendiculaires entre eux, & coïncidant avec l'axe; supposant ensuite que la distance horizontale d'un petit quadrilatère à l'un de ces plans soit nommée z , & que la distance à l'autre soit nommée y ; on décomposera la vitesse u en deux autres parallèles aux mêmes plans, lesquelles vitesses seront $\frac{uz}{r}$ & $\frac{uy}{r}$. Si l'on substitue maintenant ces expressions

de la vitesse, en place de u seul, dans l'expression $\frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx\sin\theta\sin\gamma}{2\sin\alpha}$ qui (922.) est celle de la force qui agit sur deux petits quadrilatères correspondants; cette force sera divisée en deux autres, & $= \frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx\sin\gamma\sin\theta}{2r\sin\alpha} (z+y)$. Comme ces forces proviennent toutes deux d'un mouvement horizontal, & qu'on demande qu'elles exercent leur action dans la même direction, on a pour toutes les deux $\sin\alpha$, ainsi que $\sin\theta = \sin\lambda.\sin\alpha$ (572 & 584); donc ces forces seront $\frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx\sin\lambda\sin\gamma}{2r\sin\alpha} (z+y) = \frac{\frac{1}{2}mVx^{\frac{1}{2}}dx\sin\lambda\sin\gamma}{dt} (z+y)$.

Multipliant maintenant chacune de ces forces par la distance horizontale z & y de l'axe à leurs directions, & mettant dz & dy à la place de c , on aura, pour l'expression des moments, ...
 $\frac{\frac{1}{2}mVx^{\frac{1}{2}}dx\sin\lambda\sin\gamma}{dt} (z^2dz+y^2dy)$.

SCOLIE I.

(924.) On a supposé, comme on le voit, dans le calcul, non-seulement que les moitiés du corps, prises de part & d'autre d'un des plans verticaux, sont égales & semblables; mais encore que le second plan vertical divise aussi le corps en deux moitiés égales & semblables. C'est ce qu'on doit avoir présent à l'esprit, pour ne pas confondre les corps dont il s'agit ici, avec ceux qui ne peuvent être divisés en deux moitiés égales & semblables que par un seul plan vertical.

SCOLIE II.

(925.) Quoique la rotation puisse, sans contredit, se faire sur un axe quelconque, & sous quelque inclinaison que ce soit, cependant toutes les rotations possibles peuvent se réduire à trois, l'une sur un axe vertical, & les deux autres sur deux axes horizontaux perpendiculaires entr'eux; nous nous bornerons, pour plus de facilité, à considérer la rotation seulement sur ces trois axes.

PLANC. IV. Nous ne la considérerons même que sur deux axes, l'un vertical & l'autre horizontal, attendu que tout ce qu'on dira de la rotation sur ce dernier, s'appliquera également à la rotation sur l'autre axe horizontal.

PROPOSITION LXXXII.

(926.) Trouver les moments qui agissent sur un cylindre qui flotte horizontalement sur un Fluide, & qui tourne sur un axe horizontal parallèle à ses côtés, & passant par le centre de gravité.

Soit $ABFD$ le cylindre, C son centre de volume, & CGE une verticale dans laquelle se trouve le centre de gravité G . Soit tiré l'horizontale BF , ainsi que les droites CB , GB , & soit fait $CG = k$, $CB = R$, $CE = x$, & $BE = y$. Le moment provenant des forces qui agissent sur une différencielle horizontale en B , & sur la correspondante en F , est (919.) $= \frac{\frac{1}{2} m b r^2 V x^{\frac{1}{2}} dx \sin \alpha \cdot \sin \theta}{dt \sin \alpha}$; b exprimant la longueur du cylindre; $r = GB$; $\alpha = \theta =$ l'angle GBC ; $\sin \alpha = \sin BCE = \frac{y}{R}$. Par conséquent on aura $K : \sin \theta :: r : \frac{y}{R}$; ce qui donne $r \sin \theta = \frac{ky}{R}$. Ces valeurs étant substituées dans l'expression des moments, elle deviendra $\frac{\frac{1}{2} m b V k^2 x^{\frac{1}{2}} dx}{R dt} = \frac{m b V k^2}{2 R dt} x^{\frac{1}{2}} dx \sqrt{R^2 - x^2}$.

La somme des moments qui agissent sur tout le cylindre depuis l'horizontale BF jusqu'au diamètre aussi horizontal AD , fera donc $= \frac{m b V k^2}{2 R dt} \int x^{\frac{1}{2}} dx \sqrt{R^2 - x^2}$; ou, en réduisant $\sqrt{R^2 - x^2}$ en série, & intégrant, $= \frac{m b V k^2}{dt} \left(\frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{7 \cdot 2 R^2} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{11 \cdot 8 R^4} - \frac{x^{\frac{11}{2}}}{15 \cdot 16 R^6} - \frac{x^{\frac{13}{2}}}{19 \cdot 128 R^8} - \frac{7 x^{\frac{15}{2}}}{23 \cdot 256 R^{10}} - \text{Sc.} \right)$.

Faisant maintenant $x = R$, les moments qui agissent sur tout le demi-cylindre $ABHFD$ seront $= \dots \dots \dots$

$\frac{m b V k^2 R^{\frac{1}{2}}}{dt} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 2} - \frac{1}{11 \cdot 8} - \frac{1}{15 \cdot 16} - \frac{1}{19 \cdot 128} - \frac{7}{23 \cdot 256} - \text{Sc.} \right)$, ou, $= \frac{6}{25} \cdot \frac{m b V k^2 R^{\frac{1}{2}}}{dt}$, à très-peu près.

COROLLAIRE I.

(927.) Les moments de la dénivellation sont négligeables, par ce qu'on a dit dans la Proposition précédente.

COROLLAIRE II.

(928.) Tous les moments s'évanouissent lorsqu'on a $k = 0$; c'est-à-dire, lorsque le centre de gravité coïncide avec l'axe du cylindre.

CHAPITRE XIII.

De la Vitesse angulaire avec laquelle les corps flottants tournent sur un axe quelconque.

PROPOSITION LXXXII.

(229.) **T**ROUVER la vitesse angulaire avec laquelle un corps flottant tourne sur un axe quelconque , étant animé par une , ou par plusieurs puissances.

La vitesse angulaire est (179.) $V = \frac{dispende}{S}$; $p\pi$ exprimant la somme des moments des puissances qui agissent ; t le temps de leur action ; & S la somme des moments d'inertie. Substituant donc en place de $p\pi$ les moments qui agissent sur le corps , & qui proviennent des résistances & de l'action des puissances. On aura une équation , de laquelle on tirera la valeur de la vitesse angulaire V dans quelque instant de l'action que ce soit.

COROLLAIRE I.

(230.) Plus les moments d'inertie seront grands , plus il faudra de temps au corps pour acquérir une vitesse angulaire donnée.

S C O L I E.

(231.) Les moments $p\pi$, ou leur somme , peuvent provenir de différentes puissances , & ces puissances peuvent être constantes ; c'est-à-dire , indépendantes de la vitesse angulaire V , ou elles peuvent dépendre absolument de cette vitesse ; comme en effet , elles en dépendent lorsqu'elles proviennent de la résistance du Fluide , ainsi que nous l'avons vu dans le Chapitre précédent. M. Bouguer (*Traité du Navire*, liv. II, section III , Chap. I, § 3.) , & Léonard Euler , ont fait abstraction de cette dernière espèce de puissance , & même M. Bouguer ajoute qu'il néglige ces résistances , à cause que le corps divise très-peu de Fluide ; & qu'il en est de la résistance qu'il éprouve , comme de celle que l'air oppose au mouvement des pendules ; résistance qui est presque insensible , à cause que la vitesse angulaire V est très-petite. Mais le cas dont il s'agit ici est très-différent ; car les pendules oscilleroient encore avec plus de régularité sans la résistance , au lieu que sans la résis-

tance, les corps ne pourroient pas se soutenir, dans leur rotation, sur les Fluides. Le seul cas où ceci ait quelque fondement, est celui où le corps est formé par la révolution d'un plan quelconque, autour d'un axe qui passe par le centre de gravité. Dans ce cas, en supposant que la rotation, ou oscillation, se fasse sur un axe horizontal, si l'on incline un peu le corps, le moment qui l'obligera à tourner, lorsqu'on l'aura abandonné à lui-même, sera (838.), celui qui résulte de l'action du Fluide verticalement, lequel est $= KP \sin \Delta$, expression qui devient zero lorsque $K=0$; mais cette condition de $K=0$ est nécessaire pour que les moments résistants s'évanouissent: donc ces moments ne s'évanouissent, même dans ce cas, que lorsque le corps n'est animé par aucune action qui le fasse tourner; c'est-à-dire, lorsqu'il perd entièrement la stabilité, & qu'il est impossible, dans la pratique, qu'il se soutienne. La résistance des Fluides est donc, par conséquent, nécessaire dans la rotation des corps. On fera voir dans la suite que, dans quelques cas, cette résistance n'est pas aussi peu considérable que l'a cru M. Bouguer.

COROLLAIRE II.

(932.) Si l'on avoit $p\pi = 32 KP \sin \Delta - \frac{GV}{dt}$, * K , P & G , étant constants, on auroit $V = \frac{dt \int (32 KP \sin \Delta - GV)}{s}$: ou parce

*Voici le fondement de cette égalité. Lorsqu'on incline le corps d'une quantité infiniment petite, ou même d'une quantité finie, & qu'on l'abandonne ensuite à lui-même, le moment $p\pi$ qui l'oblige à tourner, est celui qui résulte de l'action verticale du Fluide, en faisant abstraction de la résistance que le Fluide oppose à ce mouvement. Or, dans cette expression, π représente la puissance, ou la résultante des puissances qui animent le corps, ainsi elle est $= 32 P, 32$; P exprimant le poids du corps: & la quantité p , est la distance horizontale de la direction de la puissance au plan vertical qui passe par l'axe de rotation, c'est-à-dire, au plan directeur (167 & 168.), laquelle distance est $= K \sin \Delta$ (838 & 839.) Donc le moment $p\pi = 32 KP \sin \Delta$, abstraction faite du moment des résistances qui proviennent de la rotation.

Mais lorsque le corps est abandonné à lui-même, & qu'il tend à se rétablir dans sa première situation, il éprouve, de la part du Fluide, une résistance qui s'oppose à son mouvement, avec une énergie d'autant plus grande, qu'il se meut, ou tend à se mouvoir, avec une plus grande vitesse angulaire. Or (920.) le moment de cette résistance est proportionnel à $\frac{V}{dt}$, ou est égal à $\frac{V}{dt}$ multiplié par une quantité constante; ainsi en appelant G cette constante, le moment de la résistance sera $= \frac{GV}{dt}$.

Cela posé, il est évident que le moment total $p\pi$ qui agit sur le corps, tant en vertu de l'action des puissances que de celle des résistances sera $= 32 KP \sin \Delta - \frac{GV}{dt}$.

que (131.) $V = \frac{u dt}{K}$, u exprimant la vitesse d'un point éloigné de l'axe de la quantité K , on auroit $\frac{u dt}{K} = \frac{d \int (32 KP dt \sin \Delta - \frac{G u dt}{K})}{S}$, & par conséquent $Su = 32 K^2 P \int dt \sin \Delta - G \int u dt$.

COROLLAIRE III.

(933.) Si l'on suppose $G = 0$, ou, ce qui est la même chose, si l'on fait abstraction des résistances, comme l'ont fait les Auteurs cités ci-dessus, il viendra $V = \frac{dt \int 32 KP dt \sin \Delta}{S} = \frac{32 dt KP}{S} \int dt \sin \Delta$.

PROPOSITION LXXXIV.

(934.) Trouver la longueur d'un pendule simple isochrone avec le corps flottant qui oscille sur un axe horizontal.

Soit L la longueur du pendule simple, on aura (184.) $V = \frac{\int dt \int dt \sin \Delta}{L} = \frac{\omega dt}{L}$, en supposant que ω représente la vitesse du corps

dans le pendule: donc $\int dt \sin \Delta = \frac{\omega}{\frac{1}{2}} \int dt$; mais comme on suppose que les corps décrivent des arcs semblables en temps égaux, on a $\omega : u :: L : K$, & $\omega = \frac{Lu}{K}$; par conséquent on a aussi $\int dt \sin \Delta =$

$\frac{Lu}{K} = \frac{Lu}{32K}$. Cette valeur étant substituée dans l'équation $Su = 32 K^2 P \int dt \sin \Delta - G \int u dt$, il en résulte $Su = KPLu - G \int u dt$. Supposant maintenant que les oscillations soient très-courtes, ou infiniment petites, on pourra supposer l'arc que décrivent les corps égal à son sinus, lequel dans le corps flottant est $= K \sin \Delta$, & par conséquent on aura $u dt = K d \sin \Delta$, & $\int u dt = K \int d \sin \Delta$, ce qui donnera $Su = KPLu - GK \int d \sin \Delta$; mais la vitesse ω au milieu de l'oscillation, est (359.) $= 8 \left(\frac{L^2 \sin \Delta^2}{2L} \right)^{\frac{1}{2}} = 8 \sin \Delta \sqrt{\frac{1}{2}L} = \frac{Lu}{K}$,

donc $u = \frac{8K \sin \Delta}{\sqrt{2L}}$. Cette valeur de u étant substituée, donne $\frac{8KS \sin \Delta}{\sqrt{2L}} = \frac{8K^2 P \sin \Delta \sqrt{L}}{\sqrt{2L}} - GK \sin \Delta$; ou $\frac{1}{2} G \sqrt{2L} = KPL - S$; & en quarrant $\frac{1}{4} G^2 L = K^2 P^2 L^2 - 2KPLS + S^2$, d'où l'on tirera

$$L = \frac{S}{KP} - \frac{G^2}{64K^2P^2} \pm \sqrt{\left(\frac{S}{KP} + \frac{G^2}{64K^2P^2} \right)^2 - \frac{S^2}{K^2P^2}}$$

S C O L I E I.

(935.) L'analogie $\omega : u :: L : K$, n'est pas rigoureusement exacte; mais à cause de la petitesse des arcs décrits, on peut la prendre pour telle.

C O R O L L A I R E I.

(936.) Si l'on suppose $G=0$, ou si l'on fait abstraction des résistances, on aura $L = \frac{S}{KP}$: expression qui ne diffère pas de celle que nous avons trouvée (189.) pour la longueur du pendule simple isochrone à un pendule composé. Donc le corps flottant oscille comme un pendule.

C O R O L L A I R E I I.

(937.) Si nous nommons l la longueur du pendule simple qui bat les secondes de temps moyen, & t le temps, en secondes, de la durée d'une oscillation du corps flottant, ou du pendule L : puisque les carrés des temps de la durée des oscillations, sont comme les longueurs des pendules (372.), on aura $l : L :: 1 : t^2$, & $L = lt^2$. Substituant cette valeur de L dans l'équation $L = \frac{S}{KP} + \frac{G^2}{64 K^2 P^2} \pm \sqrt{\left(\frac{S}{KP} + \frac{G^2}{64 K^2 P^2}\right)^2 - \left(\frac{S}{KP}\right)^2}$, on en déduira $t = \sqrt{\frac{S}{KP l} + \frac{G^2}{64 K^2 P^2 l} \pm \frac{1}{l} \sqrt{\left(\frac{S}{KP} + \frac{G^2}{64 K^2 P^2}\right)^2 - \left(\frac{S}{KP}\right)^2}}$.

C O R O L L A I R E I I I.

(938.) Si l'on suppose $G=0$, il en résulte $t = \sqrt{\left(\frac{S}{KP}\right)}$.

S C O L I E I I.

(939.) Maintenant, pour satisfaire à l'engagement que nous avons pris dans l'Art. 931, nous pouvons comparer les moments des résistances $\frac{6mb\sqrt{l^2 R^2}}{25 dt}$, (926.) qui agissent sur un cylindre pendant sa rotation, avec les moments $kP \sin \Delta$, qui constituent sa stabilité. Supposons d'abord $\frac{6mb\sqrt{l^2 R^2}}{25 dt} = kP \sin \Delta$, & substituons (131.) à la place de $\frac{V}{dt}$, sa valeur $\frac{u}{k}$, en supposant que u exprime la vitesse avec laquelle se meut l'axe du cylindre, & k la distance

distance de cet axe au centre de gravité; & nous aurons $\frac{6mbVR^{\frac{1}{2}}}{25} =$

$P \sin \Delta$. Supposons encore que le cylindre est submergé dans le fluide jusqu'à sa plus grande largeur, comme on l'a supposé, Art. 926; alors son poids P sera $= \frac{1}{2} R^2 cbm$, c exprimant la circonférence d'un cercle dont le diamètre est l'unité, & nous aurons $\frac{6}{25} mbu R^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} R^2 cbm \sin \Delta$, ou $12u = 25 R^{\frac{1}{2}} c \sin \Delta$. Soit supposé, de même, qu'ayant incliné le cylindre de l'angle Δ , & le laissant en liberté, il prenne la vitesse u en se rétablissant dans la situation verticale, l'on aura $u = \frac{8k \sin \Delta}{\sqrt{2L}}$; ou en faisant $k = \frac{1}{2} R$, $u = \frac{4R \sin \Delta}{\sqrt{2L}}$:

ce qui donne $\frac{48R \sin \Delta}{\sqrt{2L}} = 25 R^{\frac{1}{2}} c \sin \Delta$, & $\sin \Delta = \frac{48R^{\frac{1}{2}} \sin \Delta}{25c\sqrt{2L}}$. On aura donc, d'après la supposition de $k = \frac{1}{2} R$, & de $P = \frac{1}{2} R^2 cbm$, . . . $\frac{6mbVR^{\frac{1}{2}}}{25 dt} = kP \sin \Delta = \frac{24R^{\frac{1}{2}} P \sin \Delta}{25c\sqrt{2L}}$. Ainsi la force de la stabilité, ou le moment $kP \sin \Delta = \frac{1}{2} RP \sin \Delta$, sera au moment de la résistance que la même inclinaison Δ produit dans la rotation, comme $\frac{1}{2} RP \sin \Delta$ est à $\frac{24R^{\frac{1}{2}} P \sin \Delta}{25c\sqrt{2L}}$, ou comme $25c\sqrt{2L}$ est à $48R^{\frac{1}{2}}$. Si nous supposons maintenant (936.) $L = \frac{S}{kP}$, & de plus $S = \frac{1}{2} k^2 P$, on aura $L = \frac{1}{2} k = \frac{1}{2} R$: & l'un des moments sera à l'autre, comme $25c$ est à 96 .

SCOLIE III.

(940.) On peut encore, dans le même cas du cylindre, considérer la valeur de L , en ayant égard à celle de G . Les moments des résistances sont (926 & 932.) $\frac{6mbVR^{\frac{1}{2}}}{25 dt} = \frac{GV}{dt}$: donc $G = \dots$ $\frac{6}{25} \frac{mbk^{\frac{1}{2}} R^{\frac{1}{2}}}{G^{\frac{1}{2}}}$, ou, en faisant $k = \frac{1}{2} R$, ce qui donne $G = \frac{6}{25} \frac{mbR^{\frac{1}{2}}}{G^{\frac{1}{2}}}$, & $\frac{64k^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}}}{36R} = \frac{36m^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} R^{\frac{1}{2}}}{P^{\frac{1}{2}} (100)^{\frac{1}{2}} (4)^{\frac{1}{2}}}$ *, ou bien, en substituant $P = \frac{1}{2} R^2 cbm$, $\frac{G^{\frac{1}{2}}}{64k^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}}} = \frac{G^{\frac{1}{2}}}{64k^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}}}$. Substituant pareillement dans la quantité $\frac{S}{KP}$ les valeurs de

* Il y a dans cet endroit une faute de calcul qui influe sur le résultat de cette Proposition. On trouve dans l'original $\frac{G^{\frac{1}{2}}}{64K^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}}} = \frac{36m^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} R^{\frac{1}{2}}}{P^{\frac{1}{2}} (100)^{\frac{1}{2}} (32)^{\frac{1}{2}}}$; c'est cette différence qui en occasionne dans toute la suite du calcul.

K & de P , avec $S = \frac{1}{4} K^2 P$, on aura $\frac{S}{KP} = \frac{K^2 P}{4KP} = \frac{1}{4} K = \frac{1}{4} R$; ce

qui donnera par conséquent $L = \frac{1}{4} R + \frac{36R}{(25c)^2(8)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4} R + \frac{36R}{(25c)^2(8)^2}\right)^2 - \frac{1}{4} R^2}$

$$= \frac{1}{4} R + \frac{36R}{(25c)^2(8)^2} + \frac{1}{4} R \sqrt{\left(1 + \frac{36}{(25c)^2(8)^2}\right)^2 - 1} = \dots$$

$$\frac{1}{4} R + \frac{36R}{(25c)^2(8)^2} + \frac{3R}{25c \cdot 8} \sqrt{1 + \frac{9}{(25c)^2(4)^2}}; \text{ ou enfin, } L = \frac{1}{4} R \left(1 + \frac{1}{16}\right),$$

à peu de chose près: de sorte que la valeur de G introduite dans le calcul, rend la longueur du pendule simple isochrone avec le cylindre de $\frac{1}{16} R$ plus grande.

COROLLAIRE I V.

(941.) Si nous substituons la valeur de $L = \frac{1}{4} R$ dans l'équation (937.) $L = l^2$, nous aurons $l^2 = \frac{1}{4} R$: ce qui donne le temps dans lequel le cylindre achevera une oscillation, c'est-à-dire, $t = \frac{R^{\frac{1}{2}}}{(8)^{\frac{1}{2}}}$.

SCOLIE I V.

(942.) La longueur du pendule simple qui bat les secondes de temps moyen sur le bord de la mer en Espagne, est, comme nous l'avons déjà dit, Article 373, de 440 lignes du pied de Paris, ou de $\frac{440 \cdot 16}{15}$ du pied Anglais: on aura donc $l = \frac{440 \cdot 16}{15 \cdot 144} = 3 \frac{7}{27}$; laquelle valeur étant substituée dans l'équation $t = \frac{R^{\frac{1}{2}}}{(8)^{\frac{1}{2}}}$, on aura

$t = \frac{1}{4} R^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{27}{11}}$, ou, à peu près, $t = \frac{63}{320} R^{\frac{1}{2}}$. Si nous faisons donc le cylindre de 32 pieds de diamètre, on aura $R = 16$, & le temps dans lequel il achevera une oscillation sera d'environ $\frac{63}{80}$ de seconde.

PROPOSITION LXXXV.

(943.) Trouver la plus grande & la moindre vitesse, avec laquelle tournent les corps flottants.

D'après la supposition de $p\pi = 32 KP \sin \Delta - \frac{GV}{dt}$, on trouve (932.) $Su = 32 K^2 P s dt \sin \Delta - G s u dt$. Différenciant cette équation, on a $Sdu = 32 K^2 P s dt \sin \Delta - G u dt$, ou $\frac{du}{dt} = \frac{32 K^2 P \sin \Delta - G u}{s}$. Or,

dans la plus grande vitesse u , l'on a $du=0$, nous aurons donc
 $32 K^2 P \sin \Delta - Gu = 0$; équation qui donne la plus grande vitesse
 $u = \frac{32 K^2 P \sin \Delta}{G}$. Pareillement, la moindre vitesse u a lieu lorsque
 du , ou $\frac{32 K^2 P \sin \Delta - Gu}{S}$, a sa plus grande valeur. Donc la moindre
 vitesse $u=0$.

COROLLAIRE I.

(944.) On a trouvé, dans l'Article 210, que l'action, qui a
 lieu sur les fibres du levier, relativement au mouvement, est pro-
 portionnelle à Sdu . Considérant donc le corps flottant, qui tourne,
 comme un levier, l'action qui s'exercera sur ses fibres, sera comme
 Sdu , ou comme la quantité $32 K^2 P dt \sin \Delta - G u dt$ qui lui est
 égale: & la plus grande action qu'elles éprouveront dans toute
 l'oscillation, laquelle a lieu dans l'instant où elle commence &
 dans l'instant où elle finit, sera comme $32 K^2 P dt \sin \Delta$.

COROLLAIRE II.

(945.) Donc la plus grande action qui s'exerce sur les fibres d'un
 corps dans l'acte de la rotation, ne dépend nullement de G , ou de la
 résistance du Fluide; mais elle provient seulement de la quantité
 $K^2 P dt \sin \Delta$, ou $32 K^2 P \sin \Delta$: c'est-à-dire, du produit de la stabi-
 lité $KP \sin \Delta$ par $32 K$.

COROLLAIRE III.

(946.) Un levier uni au corps qui tourne, éprouvera une action
 proportionnelle à $S'du$, S' exprimant les moments d'inertie du le-
 vier seul; mais on a $du = \frac{32 K^2 P dt \sin \Delta - Gu dt}{S}$: donc l'action qu'éprou-
 vera le levier sera proportionnelle à $\frac{S' dt (32 K^2 P \sin \Delta - Gu)}{S}$: & la plus
 grande de toute, sera proportionnelle à $\frac{S' K^2 P \sin \Delta}{S}$.



APPENDICE I.

Sur la théorie des Comètes, ou Cerf-volants, pour vérifier la Loi de la résistance des Fluides.

LE moyen de vérifier une théorie qui seroit susceptible de quelques difficultés, est de l'appliquer à différentes expériences. Or de toutes les expériences, relatives à la résistance des Fluides, qui se présentent journellement à la vue, il n'en est pas de plus commune que le vol des Comètes, ou Cerf-volants, dont les enfans font usage. La force avec laquelle le vent agit sur ces machines, est ou comme le quarré de sa vitesse, multiplié par le quarré du sinus de son angle d'incidence, comme le croient généralement tous les Auteurs modernes, ou elle est comme la simple vitesse multipliée par le même sinus, selon que nous l'avons établi ci-dessus. C'est en donnant une vraie théorie des Cerf-volants, qu'on peut prouver lequel des deux systèmes convient avec la pratique, & par conséquent sçavoir lequel est le véritable.

Albert Euler, fils de *Léonard Euler*, a donné cette théorie, dans les Mémoires de l'Académie Royale de Berlin, Tome XII, page 322 ; mais il l'a fondée sur le premier système, ou sur le principe que les résistances suivent la raison doublée de la vitesse & du sinus d'incidence. Il distingue trois cas dans son Mémoire. Il suppose dans le premier, que le Cerf-volant avec sa ficelle est un corps roide, incapable d'altération ; & dans le second & le troisieme cas, il suppose que la ficelle n'est attachée au Cerf-volant que par un seul point déterminé, autour duquel il peut tourner librement. Le premier cas n'est, comme on voit, nullement applicable à la pratique ; & comme nous cherchons à nous procurer les lumieres de l'expérience, toute spéculation sur ce cas seroit absolument inutile. Dans le second cas, l'Auteur a égard aux deux mouvements de rotation que doit avoir le Cerf-volant, l'un sur l'extrémité supérieure de la ficelle, & l'autre sur l'extrémité inférieure. Cette dernière rotation, dit-il, est le résultat de trois forces : la première est la force du vent, réunie au centre de grandeur du Cerf-volant ; la seconde est son poids réuni à son centre de gravité ; & la troisieme est le poids de la ficelle pareillement réuni à son centre particulier

de gravité. Les deux premières forces produisent réellement le mouvement de rotation dont il s'agit : mais la troisième ne peut contribuer à ce mouvement que dans le cas où la ficelle seroit absolument sans flexibilité, comme l'est un levier. Lorsqu'elle est d'une flexibilité parfaite, comme nous la supposons dans la suite, sa pesanteur n'agit en rien pour produire une telle rotation, parce que la force unique qu'elle exerce, agit seulement suivant la direction de sa longueur, & n'agit en aucune manière dans une direction oblique à cette longueur, qui cependant est l'unique circonstance qui peut contribuer à la rotation effective. Nous devons donc inférer de là que *Albert Euler* a considéré la ficelle comme un corps roide, en supposant cependant que le Cerf-volant puisse tourner librement sur ses deux extrémités, ce qui rend ce cas autant inapplicable à la pratique que le premier. En outre, cet Auteur s'est assujéti, dans cette théorie, à attacher la ficelle seulement dans un point déterminé du Cerf-volant, ce qui, dans la pratique, ne produiroit jamais aucun bon effet. L'usage ordinaire est d'attacher au Cerf-volant deux, trois ou quatre ficelles qui se réunissent à une petite distance, pour n'en former ensuite qu'une seule. Par cette disposition le Cerf-volant se maintient dans sa position, sans pouvoir se mouvoir, ou tourner sur aucun de ses diamètres; au lieu que si l'on néglige cette précaution, il se dérange facilement au moindre accident, & se précipite vers la terre. Cette circonstance n'a point échappé à *Euler*; mais, pour y apporter le remède nécessaire, ayant trouvé que le calcul étoit extrêmement compliqué, il a jugé à propos de le supprimer, & de se restreindre au cas unique d'une seule ficelle.

Le calcul est en effet bien embarrassant; mais c'est seulement dans la supposition que les forces du vent sont en raison composée doublée de ses vitesses, & des sinus de ses angles d'incidence; mais il n'en est pas ainsi dans la supposition que ces forces sont dans la raison composée des simples vitesses, & des simples sinus d'incidence, selon que notre théorie l'indique; le calcul devient même extrêmement facile. Nous ne pouvons donc nous dispenser d'avoir égard à la circonstance des différentes ficelles, en résolvant le problème dans toute sa généralité; & pour comparer les forces du vent, afin de voir si, en effet, elles ne correspondroient pas à la supposition de la raison doublée, nous passerons ensuite au cas particulier d'une seule ficelle, comme l'a fait *Euler*.

Cet Auteur, dans son troisième cas, considère le Cerf-volant avec

une queue; mais il suppose que cette queue est un autre plan, ou Cerf-volant, qui tourne librement à l'extrémité inférieure du premier; supposition qui n'est pas d'une application moins difficile dans la pratique que les premières. La queue est nécessaire dans le Cerf-volant, pour abaisser son centre de gravité, de manière qu'il soit plus bas que le centre de grandeur, & prévenir par-là le mouvement gyrotoire latéral qui pourroit avoir lieu; mais, pour la pratique & pour la théorie, un corps roide quelconque, long & mince, comme un fil d'archal, ou même le prolongement du roseau, ou de la baguette, qui va de l'extrémité supérieure du Cerf-volant jusqu'à l'inférieure, en formant son diamètre principal, convient beaucoup mieux qu'un plan. D'après cela, il est évident que nous pourrions nous dispenser d'avoir égard à cette queue; il suffira, pour en supposer l'existence, d'établir le centre de gravité plus bas que celui de grandeur. Un contrepoids quelconque, placé à l'extrémité inférieure du Cerf-volant, pourroit produire le même effet que la queue, & par conséquent y suppléer. Il faut cependant observer que, dans ce cas, si le contrepoids étoit d'une même pesanteur que la queue, il n'abaisseroit pas autant le centre de gravité que le feroit la queue; ce qui importe beaucoup pour éviter la rotation latérale. Ainsi la queue, telle que les enfants l'attachent à leurs Cerf-volants, est beaucoup plus convenable que le contrepoids d'une même pesanteur; parce que, sans augmenter le poids, elle prévient beaucoup plus efficacement tout mouvement latéral de rotation. Mais comme il faut avoir égard à l'angle qu'elle formeroit avec le diamètre du Cerf-volant, nous ne pouvons la considérer, telle qu'elle est, sans nous jeter dans des calculs fort longs & fort compliqués, attendu que son centre de gravité se trouveroit hors du corps du Cerf-volant. Ainsi nous nous réduisons à considérer la queue comme un corps roide, qui soit le prolongement du diamètre du Cerf-volant; & cette supposition n'est, comme on le voit, nullement éloignée de pouvoir s'appliquer à la pratique.

FIG. 78.

Ceci supposé, soit *AB* le Cerf-volant, ou plutôt son diamètre, en le considérant coupé par un plan vertical qui coïncide avec ce diamètre, avec la ficelle *GOV*, & même avec la queue *BX*. Soient de plus *AG*, *DG*, les deux ficelles qui étant attachées au haut & au bas de ce diamètre, & réunies en *G* à la ficelle unique *GOV*, assujétissent le Cerf-volant. Soit aussi *C* son centre de grandeur, & *P* celui de gravité. Soit tiré la ligne *GE* perpendiculaire au diamètre *BA*, les verticales *PK* & *EML*; la ligne *GK* parallèle à l'horison-

tale VFL , & la ligne IGF tangente à la ficelle dans le point G . Enfin soit $PC = b$; $CE = c$; $GE = g$; $P =$ le poids du Cerf-volant avec sa queue; $u =$ la vitesse du vent; $\phi =$ l'angle GEL , $\theta =$ l'angle IGE ; $Ru \sin \phi =$ la force du vent sur le Cerf-volant, suivant une direction perpendiculaire à son plan, & conformément au système exposé précédemment sur la mesure de ces forces, ou résistances. On voit d'après cela que l'angle $IHE = \phi + \theta$.

Trouver les sinus & cosinus des angles ϕ , θ , & $\phi + \theta$.

(1.) Le Cerf-volant pouvant tourner librement sur le point G , les moments à l'égard de ce point doivent se faire équilibre. Les forces qui agissent sont le poids P du Cerf-volant, qui est dirigé suivant la verticale PK , & la force du vent $Ru \sin \phi$, qui est dirigée suivant la perpendiculaire au diamètre BA . Les moments de ces forces sont $P.GK = P(KM + MG) = P(b + c) \cos \phi + Pg \sin \phi$, & $Ru \sin \phi.CE = Rue \sin \phi$. On aura donc, pour l'équilibre de ces moments, $Rue \sin \phi = P(b + c) \cos \phi + Pg \sin \phi$; ce qui donne $\frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{P(b+c)}{Rue - Pg} = \tan \phi = \frac{P(b+c)}{Rue - Pg}$; & par conséquent $\sin \phi = \frac{P(b+c)}{\sqrt{(Rue - Pg)^2 + P^2(b+c)^2}}$, & $\cos \phi = \frac{Rue - Pg}{\sqrt{(Rue - Pg)^2 + P^2(b+c)^2}}$.

(2.) Pour trouver le sinus de l'angle θ que forme la tangente IGF avec la ligne GE , considérons, que dans le triangle GEH les trois côtés GE , EH , HG , ou les sinus de leurs angles opposés, peuvent être pris pour exprimer les forces qui agissent; savoir: GE pour exprimer la force $Ru \sin \phi$, à cause qu'elle est dirigée suivant cette même ligne GE perpendiculaire au diamètre BA ; EH pour exprimer la force P , qui agit suivant la direction de cette même verticale: & enfin GH dont la direction est la même que celle de la ficelle GH , pour exprimer la résultante de ces deux forces. Cela posé, on aura $\sin(\phi + \theta) : \sin \theta :: Ru \sin \phi : P$: donc, $Ru \sin \phi \sin \theta = P \sin(\phi + \theta) = P \sin \phi \cos \theta + P \sin \theta \cos \phi$: ce qui donne $\frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \tan \phi = \frac{P \sin \theta}{Ru \sin \phi - P \cos \theta}$, pour une seconde expression de la valeur de tangente ϕ . Egalant donc

* Ces formules sont faciles à trouver, il ne faut que se rappeler des expressions trigonométriques $\sec \phi = (1 + \tan^2 \phi)^{\frac{1}{2}}$; $\cos \phi = \frac{1}{\sec \phi} = \frac{1}{(1 + \tan^2 \phi)^{\frac{1}{2}}}$; & $\sin \phi = \frac{\tan \phi}{\sec \phi} = \frac{\tan \phi}{(1 + \tan^2 \phi)^{\frac{1}{2}}}$. En substituant dans ces expressions de $\cos \phi$ & de $\sin \phi$ la valeur de $\tan \phi$, qu'on vient de trouver; on aura les expressions mêmes de l'Auteur.

ces deux valeurs, on aura $\frac{P(b+e)}{Ruc-Pg} = \frac{P \sin \theta}{Ru \sin \theta - P \cos \theta}$; d'où l'on tire, $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{P(b+e)}{Rub+Pg}$, & par conséquent $\sin \theta = \frac{P(b+e)}{((Rub+Pg)^2 + P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}$, & $\cos \theta = \frac{Rub+Pg}{((Rub+Pg)^2 + P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}$.

(3.) Substituant maintenant dans les équations $\sin(\varphi+\theta) = \sin \varphi \cos \theta + \sin \theta \cos \varphi$, & $\cos(\varphi+\theta) = \cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta$, les valeurs trouvées de $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, $\sin \theta$, & $\cos \theta$, on aura

$$\sin(\varphi+\theta) = \frac{RuP(b+e)^2}{((Ruc-Pg)^2 + P^2(b+e)^2)((Rub+Pg)^2 + P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}} \dots \dots \dots$$

$$\cos(\varphi+\theta) = \frac{(Ruc-Pg)(Rub+Pg) - P^2(b+e)^2}{((Ruc-Pg)^2 + P^2(b+e)^2)((Rub+Pg)^2 + P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Fig. 75
& 79.

(4.) Soit supposé $u=0$, on aura $\sin(\varphi+\theta)=0$, & $\cos(\varphi+\theta)=-1$; ce qui indique que la tangente FH tombera de l'autre côté & au-dessous de l'horizontale FL , & qu'elle coïncidera avec la verticale HL : c'est-à-dire, que le Cerf-volant sera suspendu à la ficelle. On aura de même $\sin \varphi = \sin \theta = \frac{b+e}{(g^2 + (b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}$, $\sin IGE$; mais $\frac{b+e}{(g^2 + (b+e)^2)^{\frac{1}{2}}} = \sin PGE^*$; donc le point I concourt avec le point P ; c'est-à-dire que le prolongement de la ficelle FG passe par le centre de gravité. Cette remarque est commune, il est vrai, mais elle justifie la supposition qu'on a faite.

Fig. 80.

(5.) Soit $Ruc = Pg$, on aura $\cos \varphi = 0$, & $\sin \varphi = 1$; ce qui indique que, dans ce cas, le Cerf-volant AB sera vertical. On aura de même $\cos(\varphi+\theta) = \frac{-P}{(Ruc-Pg)^2 + P^2(b+e)^2} = \frac{-e}{(e^2 + g^2)^{\frac{1}{2}}}$ ** = $\sin EGI$; mais $\frac{-e}{(e^2 + g^2)^{\frac{1}{2}}} = \sin EGC$: donc le point I concourt avec le point C ; c'est-à-dire que le prolongement de la ficelle passe par le centre de gravité C .

(6.) Soit $u = \infty$, on aura $\sin \varphi = 0$, ce qui indique que le Cerf-volant se trouvera horizontal. On aura également $\sin(\varphi+\theta) = 0$; & par conséquent la tangente HF se trouvera verticale.

(7.) Trouver la force que le vent exerce sur le Cerf-volant.

(7.) Cette force est $Ru \sin \varphi$: en substituant, dans cette expression, la valeur de $\sin \varphi = \frac{P(b+e)}{((Ruc-Pg)^2 + P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}$, on aura

$$Ru \sin \varphi = \frac{RuP(b+e)}{((Ruc-Pg)^2 + P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

* Car $GI:1::PE:\sin PGE$: or $GI = (g^2 + (b+e)^2)^{\frac{1}{2}}$, & $PE = b+e$. Donc, &c.

** En substituant pour P la valeur $\frac{Ruc}{g}$, & réduisant.

(8.) Soit

(8.) Soit $u = 0$, l'on aura $Ru \sin \phi = 0$.

(9.) Soit $Rue = Pg$, l'on aura $Ru \sin \phi = \frac{Pg}{e}$.

(10.) Soit $u = \infty$, l'on aura $Ru \sin \phi = \frac{P(b+e)}{e}$.

(11.) Soit supposé en général $(Rue - Pg)^2 = (n^2 - 1)P^2(b+e)^2$, n exprimant un nombre quelconque, l'on aura $Ru \sin \phi = \dots$
 $\frac{P(b+e)(n^2-1)^{\frac{1}{2}}}{ne} + \frac{Pg}{ne}$.

(12.) Cette valeur manifeste que le Cerf-volant n'éprouve pas la plus grande action quand $u = \infty$; car quoique dans ce cas le premier terme $\frac{P(b+e)(n^2-1)^{\frac{1}{2}}}{ne}$ ait sa plus grande valeur, il est évident que le second $\frac{Pg}{ne}$ a alors sa plus petite. Pour trouver cette plus grande action

$Ru \sin \phi$, on différenciera sa valeur, & l'on aura $\frac{RP(b+e)du}{((Rue - Pg)^2 + P^2(b+e)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(Rue - Pg)(b+e)R^2Peudu}{((Rue - Pg)^2 + P^2(b+e)^2)^{\frac{3}{2}}}$, ce qui donne $u = \frac{P(b+e)^2 + g^2}{Rge}$. Substituant cette valeur de u dans celle de $Ru \sin \phi$, on aura la plus grande action du vent

$$Ru \sin \phi = \frac{\left(\frac{P}{ge}(b+e)^2 + \frac{Pg}{e}\right)P(b+e)}{\left(\frac{P^2}{g^2}(b+e)^2 + P^2(b+e)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{P}{e}((b+e)^2 + g^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Trouver la force avec laquelle la ficelle est tendue.

(13.) Nous avons déjà dit (2.) que, dans le triangle GEH , GE exprimant la force $Ru \sin \phi$ du vent, & EH le poids P du Cerf-volant, GH exprimera la force résultante qui agit sur la ficelle, c'est-à-dire, la force par laquelle elle est tendue. Cette force est donc dans le point $G = \frac{P \sin \phi}{\sin \theta} = \frac{P((Rub + Pg)^2 + P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}{((Rue - Pg)^2 + P^2(b+e)^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(14.) Pour trouver la même force, ou tension, dans quelque autre point de la ficelle, on la regardera comme un polygone, d'un nombre infini de côtés infiniment petits. Soit AB , BC deux de ces côtés, & soit tiré la verticale BF , avec la ligne CF parallèle à AB ; CF exprimera la force, ou tension, suivant BA , BC celle qui agit suivant la ligne même BC , & BF la force résultante des deux premières, laquelle doit faire équilibre au poids de la ficelle. La tension suivant BA sera donc à la tension suivant BC , comme le sinus de FBC est au sinus de CFB , ou de son égal ABF ; c'est-à-dire, que les deux tensions suivant les côtés BA & BC , sont réciproquement comme

PLANC. V.

les sinus de ABF & FBC . On démontrera la même chose de la tension suivant CB avec celle du côté suivant CD , & ainsi de suite pour toutes les différencielles: donc en général la tension de la ficelle en un point quelconque de sa longueur, est réciproquement comme le sinus de l'angle que la ficelle forme en ce point avec la verticale.

(15.) Soit $ABCDE$ la ficelle, & supposons-la divisée en parties infiniment petites AB , BC , CD , DE &c.; des points B , C , D , E , &c. soit élevé les verticales BF , CG , DH , &c., & soit tiré CF parallèle à BA , DG parallèle à CB , EH parallèle à DG , &c. Enfin, en nommant α , β , γ , δ , &c. les angles FBA , GCB , HDC , &c., si, dans le triangle FBC , CF exprime la force, ou tension, qu'éprouve BA ; CB exprimera celle qu'éprouve BC , & ces deux forces seront entr'elles comme $\sin \beta$ est à $\sin \alpha$; c'est-à-dire, que si nous appellons A la force que souffre AB , B celle que souffre BC , C celle que souffre CD , &c., on aura $A : B :: \sin \beta : \sin \alpha$: on aura pareillement $B : C :: \sin \gamma : \sin \beta$, & $C : D :: \sin \delta : \sin \gamma$, d'où on déduit les équations $A \sin \alpha = B \sin \beta = C \sin \gamma = D \sin \delta = \&c.$; & par là $A : D :: \sin \delta : \sin \alpha$: c'est-à-dire, que la force, ou tension, qu'éprouve la ficelle en AB , est à celle qu'elle éprouve en DE , réciproquement comme le sinus de l'angle α , est au sinus de l'angle δ .

(16.) On doit observer que dans ce qui vient d'être dit on n'a point eu égard à la force que peut produire le vent sur la ficelle, qu'on peut en effet négliger. Cependant si l'on vouloir y avoir égard, il seroit nécessaire de prendre, au lieu de la verticale FB , la direction résultante des deux forces, la gravité, & l'action du vent.

FIG. 82. (17.) Si l'on prend maintenant les abscisses sur une verticale AB , & les ordonnées sur une horizontale, en nommant x les abscisses, y les ordonnées, & dh les différencielles FA , ou AD de la ficelle; AE & AC seront les dx , & EF & CD les dy . Dans ces suppositions le sinus de l'angle que forme la ficelle avec la verticale sera

FIG. 78. généralement $= \frac{dy}{dx}$: mais comme le sinus de l'angle que forme la ficelle avec la verticale, à son extrémité supérieure G est $= \sin(\varphi + \theta)$,

& que la tension dans le même point est $= \frac{P \sin \varphi}{\sin \theta}$, nous aurons

$\frac{1}{\sin(\varphi + \theta)} : \frac{dh}{dy} :: \frac{P \sin \varphi}{\sin \theta} : \frac{P \sin \varphi \cdot \sin(\varphi + \theta) dh}{\sin \theta dy}$; expression de la force, ou tension, qu'éprouve la ficelle dans un point quelconque de sa longueur; ou en substituant, dans cette expression, à la place de $P \sin(\varphi + \theta)$ sa valeur $Ru \sin \varphi \cdot \sin \theta$, (2.) cette même tension sera $= \frac{dy}{dx} Ru \sin \varphi$.

(18.) Pour trouver maintenant cette tension en quantités connues & dégagées des différencielles, on égalera les forces opposées qui agissent sur le point *A*, en les réduisant à la direction verticale. La force qui agit suivant *AF* étant $= \frac{P \sin \varphi \cdot \sin(\varphi + \theta) dh}{\sin \theta dy}$, celle qui en résulte suivant *AE* sera $= \frac{P \sin \varphi \cdot \sin(\varphi + \theta) dx}{\sin \theta dy}$. Par la même raison, la force suivant *CA*, résultante de la tension de la ficelle suivant *DA*, sera $= \frac{P \sin \varphi \cdot \sin(\varphi + \theta)(dx - ddx)}{\sin \theta dy}$, en supposant *dy* constante. En outre, *h* étant la longueur de la ficelle, que nous supposons d'une densité & d'une grosseur uniforme dans toute son étendue, nous pouvons représenter par *kdh* le poids total de la ficelle, & par conséquent le poids total d'une de ses différencielles sera exprimé par *kdh*. Or ce poids joint à la force suivant *CA* doit faire équilibre à la force suivant *AE*: donc $\frac{P \sin \varphi \cdot \sin(\varphi + \theta) dx}{\sin \theta dy} = \frac{P \sin \varphi \cdot \sin(\varphi + \theta)(dx - ddx)}{\sin \theta dy} + kdh$, d'où il résulte $\frac{dy dh}{dx} = \frac{P \sin \varphi \cdot \sin(\varphi + \theta)}{k \sin \theta}$; quantité constante. Faisant, donc, $\frac{P \sin \varphi \cdot \sin(\varphi + \theta)}{k \sin \theta} = A$, on aura $\frac{dy dh}{dx} = A$, ou $dy dh = A dx$: en intégrant, on trouvera $(B + h) dy = A dx = A(dh^2 - dy^2)^{\frac{1}{2}}$; & en quarrant $(B + h)^2 dy^2 = A^2(dh^2 - dy^2)$, ce qui donne $\frac{dh}{dy} = \frac{(B + h)^2 + A^2}{A}$. En introduisant cette valeur dans l'expression trouvée de la tension de la ficelle $\frac{P \sin \varphi \cdot \sin(\varphi + \theta) dh}{\sin \theta dy}$, elle deviendra $\frac{P \sin \varphi \cdot \sin(\varphi + \theta) ((B + h)^2 + A^2)^{\frac{1}{2}}}{A \sin \theta} = k((B + h)^2 + A^2)^{\frac{1}{2}}$.

(19.) Pour trouver maintenant la valeur de la constante *B* qui complète l'intégrale, considérons qu'à l'extrémité supérieure *G* de la ficelle on a $\frac{dh}{dy} = \frac{1}{\sin(\varphi + \theta)}$; mais de l'équation $\frac{P \sin \varphi \cdot \sin(\varphi + \theta)}{k \sin \theta} = A$, on tire $\frac{1}{\sin(\varphi + \theta)} = \frac{P \sin \varphi}{A k \sin \theta}$: donc on aura pour l'extrémité supérieure de la ficelle $\frac{P \sin \varphi}{A k \sin \theta} = \frac{((B + h)^2 + A^2)^{\frac{1}{2}}}{A}$, *h* marquant la longueur totale de la ficelle. On aura donc aussi $\frac{P^2 \sin \varphi^2}{k^2 \sin \theta^2} = (B + h)^2 + A^2 = (B + h)^2 + \frac{P^2 \sin \varphi^2 \cdot \sin(\varphi + \theta)^2}{k^2 \sin \theta^2}$, d'où il résulte $(B + h)^2 = \frac{P^2 \sin \varphi^2}{k^2 \sin \theta^2} (1 - \sin(\varphi + \theta)^2) = \frac{P^2 \sin \varphi^2 \cos(\varphi + \theta)^2}{k^2 \sin \theta^2}$: donc $B = \frac{P \sin \varphi \cos(\varphi + \theta)}{k \sin \theta} - h$.

(20.) Si l'on substitue cette valeur de *B* dans l'expression de la tension de la ficelle qu'on a trouvée, Art. 18, on aura cette tension dans

un point quelconque éloigné de l'origine de la quantité, $H = \frac{1}{\sin^2} ((P \sin \phi \cos(\phi + \theta) - k \sin \theta (h - H))^2 + P^2 \sin^2 \phi \sin^2(\phi + \theta))^{\frac{1}{2}}$.

(21.) A l'origine de la ficelle, ou dans le point V le plus bas, on a $H = 0$: donc la tension dans le point V est = ...

$$\frac{1}{\sin^2} ((P \sin \phi \cos(\phi + \theta) - k h \sin \theta)^2 + P^2 \sin^2 \phi \sin^2(\phi + \theta))^{\frac{1}{2}} = \dots \dots \dots \left(\left(\frac{P(Rue - Pg)(Rub + Pg) - P^3(b + c)^2}{(Rue - Pg)^2 + P^2(b + c)^2} - kh \right)^2 + \frac{R^2 u^2 P^4 (b + c)^4}{((Rue - Pg)^2 + P^2(b + c)^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(22.) Soit supposé $u = 0$, la force, ou tension, de la ficelle dans le point V deviendra $= \frac{-P(P^2 g^2 + P^2(b + c)^2)}{P^2 g^2 + P^2(b + c)^2} - kh = -(P + kh)$; poids du Cerf-volant & de la ficelle.

(23.) Soit $Rue = Pg$, la tension deviendra = ... $((-P - kh)^2 + \frac{P^2 g^2}{c^2})^{\frac{1}{2}} = (\frac{P^2(g^2 + c^2)}{c^2} + kh(2P + kh))^{\frac{1}{2}}$.

(24.) Soit $u = \infty$, la tension sera $= \frac{Pb}{c} - kh$.

(25.) On déduit clairement de l'analyse de tous ces cas, que la tension de la ficelle varie, à mesure que la vitesse u du vent varie; & que cette tension n'arrive pas à être la plus grande lorsque cette vitesse $u = \infty$. Car, quoique l'inspection seule de la formule fasse voir que le premier terme augmente à mesure que la vitesse u augmente, elle manifeste aussi que le second diminue en même temps. On aperçoit cette vérité encore plus clairement, en réduisant en série la quantité $\frac{P(Rue - Pg)(Rub + Pg) - P^3(b + c)^2}{(Rue - Pg)^2 + P^2(b + c)^2}$; car la tension devient alors = . . .

$$\left(\left(\frac{P(Rub + Pg)}{Rue - Pg} - \frac{P^3(b + c)^2 Ru}{(Rue - Pg)^2} + \frac{P^3(b + c)^2 Ru}{(Rue - Pg)^2} - \&c. - kh \right)^2 + \frac{R^2 u^2 P^4 (b + c)^4}{(Rue - Pg)^2 + P^2(b + c)^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Cette expression fait voir qu'aussi-tôt que Pg est négligeable par rapport à Rue , la tension demeure sensiblement constante, & $= \frac{Pb}{c} - kh$, quelque augmentation que reçoive la vitesse u .

(26.) L'expression $\frac{Pb}{c}$ manifeste aussi, que plus b sera grand par rapport à c , plus la tension augmentera; c'est-à-dire que plus la queue du Cerf-volant sera longue & pesante, plus la tension ou la force qui agit sur la ficelle augmentera.

Trouver la hauteur verticale que prendra le Cerf-volant.

(27.) De l'équation $(B + H) dy = A dx$, on déduit aussi $(B + H)^2 (dH^2 - dx^2) = A^2 dx^2$, ce qui donne $dx = \frac{(B + H) dH}{((B + H)^2 + A^2)^{\frac{1}{2}}}$; &

en intégrant $x = ((B+H)^2 + A^2)^{\frac{1}{2}}$, ou, $x^2 = (B+H)^2 + A^2$; équation d'une hyperbole équilatère, dont le demi-axe est A , les abscisses comptés du centre $= x$, & les ordonnées $= B+H^*$. Si donc, avec le demi-axe $A = \frac{P \sin \varphi \cdot \sin(\varphi+\theta)}{k \sin \theta} = CD$, on décrit l'hyperbole équilatère DEF , les ordonnées donneront les longueurs de la ficelle, & les abscisses, les hauteurs verticales du Cerp-volant.

(28.) Soit supposé F le point correspondant au Cerp-volant, on aura, pour ce point, $H = h$, & (19.), $(B+h)^2 + A^2 = \frac{P^2 \sin^2 \varphi}{k^2 \sin^2 \theta} = x^2$: donc $x = FL = \frac{P \sin \varphi}{k \sin \theta}$.

(29.) EM est l'abscisse qui correspond au cas où l'on auroit $EH=B$, & $H=0$: faisant donc dans l'équation $x^2 = (B+H)^2 + A^2$, $H=0$, & substituant à la place de B la valeur $\frac{P \sin \varphi \cdot \cos(\varphi+\theta)}{k \sin \theta} - h$, (19.), on aura $x^2 = (EM)^2 = \left(\frac{P \sin \varphi \cdot \cos(\varphi+\theta)}{k \sin \theta} - h \right)^2 + \frac{P^2 \sin^2 \varphi \cdot \sin^2(\varphi+\theta)}{k^2 \sin^2 \theta}$, d'où l'on tire $EM = \frac{((P \sin \varphi \cdot \cos(\varphi+\theta) - hk \sin \theta)^2 + P^2 \sin^2 \varphi \cdot \sin^2(\varphi+\theta))^{\frac{1}{2}}}{k \sin \theta}$.

(30.) On aura donc la hauteur verticale EK du Cerp-volant, (Fig. 83), ou HL (Fig. 78.) = $\frac{P \sin \varphi}{k \sin \theta} - \frac{1}{k \sin \theta} ((P \sin \varphi \cdot \cos(\varphi+\theta) - hk \sin \theta)^2 + P^2 \sin^2 \varphi \cdot \sin^2(\varphi+\theta))^{\frac{1}{2}}$, laquelle quantité est la différence des tensions de la ficelle à ses deux extrémités, divisée par k , (13 & 20.).

(31.) Si cette différence étoit donc zéro, la différence de la hauteur verticale des deux extrémités de la ficelle, seroit aussi zéro; c'est-à-dire que si les deux tensions des extrémités étoient égales, ces extrémités se trouveroient dans une même ligne horizontale. Ce principe est bien connu dans la Méchanique.

(32.) Nous avons trouvé (13.) la tension à l'extrémité supérieure de la ficelle du Cerp-volant $= \frac{P((Rub+Pg)^2 + P^2(b+c)^2)^{\frac{1}{2}}}{((Ruc-Pg)^2 + P^2(b+c)^2)^{\frac{1}{2}}}$, & (21.) celle à l'extrémité inférieure V , = $\frac{P((2u'-Pg)(Rub+Pg) - P^2(b+c)^2)^{\frac{1}{2}}}{((Ruc-Pg)^2 + P^2(b+c)^2)^{\frac{1}{2}}} - kh$, + $\frac{R^2 u'^2 P^2 (b+c)^2}{((Ruc-Pg)^2 + P^2(b+c)^2)^{\frac{1}{2}}}$, donc la hauteur verticale à laquelle parviendra le Cerp volant au-dessus de

* Voyez la Troisième Partie du Cours de Mathématiques de M. Berou, Art. 324 & 336.

l'horison sera $= \frac{P((Rub+Pg)^2+P^2(b+c)^2)^{\frac{1}{2}}}{k((Ruc-Pg)^2+P^2(b+c)^2)^{\frac{1}{2}}} - \dots$

$$\left(\left(\frac{P((Ruc-Pg)(Rub+Pg)-P^2(b+c))}{k((Ruc-Pg)^2+P^2(b+c)^2)} - h \right)^2 + \frac{R^2 u^2 P^2 (b+c)^2}{k^2 ((Ruc-Pg)^2+P^2(b+c)^2)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

(33.) Soit supposé $u=0$, la hauteur verticale du Cerf-volant sera $= \frac{P}{k} - \frac{P}{k} + h = h$, longueur négative de la ficelle; ce qui est bien connu.

(34.) Soit $u=\infty$, la hauteur verticale sera $= \frac{Pb}{kc} - \frac{Pb}{kc} + h = h$, longueur de la ficelle.

(35.) Pour trouver maintenant le cas dans lequel la hauteur verticale sera zéro, ou, ce qui revient au même, dans lequel le Cerf-volant se maintiendra dans la même horizontale que le point V , on égalera l'expression de cette hauteur à zéro. En prenant celle de l'Art. 30, on aura

$$\frac{P \sin \varphi}{k \sin \theta} - \frac{1}{k \sin \theta} ((P \sin \varphi \cos(\varphi+\theta) - kh \sin \theta)^2 + P^2 \sin^2 \varphi \sin^2(\varphi+\theta)) = 0;$$

ou en multipliant par $k \sin \theta$, & en quarrant $P^2 \sin^2 \varphi = P^2 \sin^2 \varphi - 2Pkh \sin \varphi \sin \theta \cos(\varphi+\theta) + k^2 h^2 \sin^2 \theta$; expression qui se réduit à

$$\frac{2Pkh \sin \varphi \cos(\varphi+\theta)}{k \sin \theta} + h = 0. \text{ Mais (19.) } B = \frac{P \sin \varphi \cos(\varphi+\theta)}{k \sin \theta} - h, \text{ ou,}$$

$$B + h = \frac{P \sin \varphi \cos(\varphi+\theta)}{k \sin \theta}; \text{ donc pour que la hauteur verticale soit zéro,}$$

on doit avoir $2B + h = 0$, ou $B = -\frac{1}{2}h$: c'est-à-dire, que les deux extrémités de la ficelle doivent être également distantes, de part & d'autre de l'axe de l'hyperbole, conséquence qui est bien conforme aux principes connus.

(36.) En substituant les valeurs des sinus & cosinus, dans . . .

$$\frac{2P \sin \varphi \cos(\varphi+\theta)}{k \sin \theta} - h, \text{ il en résulte } \frac{2P((Ruc-Pg)(Rub+Pg)-P^2(b+c))}{(Ruc-Pg)^2+P^2(b+c)} = kh;$$

équation qui doit avoir lieu pour que le Cerf-volant demeure dans la ligne horizontale du point V .

(37.) Si l'on suppose maintenant la vitesse du vent constante, en laissant variable la longueur h de la ficelle, la hauteur verticale du Cerf-volant sera aussi variable. Mais comme le second terme de l'expression de cette hauteur est négatif, plus ce terme sera petit, plus la hauteur verticale sera grande: or en ne supposant variable que la longueur h , ce terme aura la moindre valeur qu'il est possible lorsque $\frac{P((Ruc-Pg)(Rub+Pg)-P^2(b+c))}{k((Ruc-Pg)^2+P^2(b+c))} - h = 0$; ou ce qui est la même chose,

lorsqu'on a $B=0$ (19.) : donc la plus grande hauteur du Cerf-volant au-dessus de l'horizon, a lieu lorsque $h = \dots$

$$\frac{P((Ruc-Pg)(Rub+Pg)-P^2(b+c)^2)}{k((Ruc-Pg)^2+P^2(b+c)^2)}, \text{ \& cette même plus grande hauteur}$$

$$\text{sera} = \frac{P((Rub+Pg)^2+P^2(b+c)^2)}{k((Ruc-Pg)^2+P^2(b+c)^2)} - \frac{RuP^2(b+c)^2}{k((Ruc-Pg)^2+P^2(b+c)^2)}$$

(38.) Comme la valeur de h dans ce dernier cas, n'est que la moitié de celle qu'on a trouvée dans le précédent, il s'ensuit que la longueur de la ficelle qui fait que le Cerf volant s'élève à la plus grande hauteur, n'est que la moitié de celle qui l'oblige à se maintenir dans la même horizontale que le point V .

(39.) Comme la hauteur verticale du Cerf-volant dépend de la différence des tensions aux deux extrémités de la ficelle, il s'ensuit qu'il s'élèvera à sa plus grande hauteur, lorsque la tension à l'extrémité inférieure V de la ficelle sera la moindre possible. Pour savoir donc quand le Cerf-volant acquerra sa plus grande hauteur, il suffit d'avoir attention que la ficelle fasse en ce point la moindre force possible.

(40.) Le sinus de l'angle que forme la ficelle avec la verticale dans un point quelconque, a été trouvé, Art. 17 & 18, . . .

$$\frac{dh}{dy} = \frac{(B+H)^2+A^2}{A} : \text{ mais pour l'extrémité inférieure } V, \text{ on}$$

a $H=0$; & l'on a pareillement $B=0$ pour le cas où le Cerf-volant acquerra sa plus grande hauteur : donc le sinus de l'angle que formera la ficelle avec la verticale, à son extrémité inférieure V , est $\frac{A}{A} = 1$: donc cet angle sera droit. Ainsi, pour savoir quand le Cerf-volant acquerra sa plus grande hauteur, il suffit d'observer quand la ficelle se trouve horizontale à son extrémité inférieure V .

Trouver la valeur de l'horizontale VL .

$$(41.) \text{ Des deux équations } (B+H) dy = A dx, \text{ \& } x^2 = (B+H)^2 + A^2, \text{ on tire } dy = \frac{A dx}{(x^2 - A^2)^{\frac{1}{2}}} ; \text{ mais } \int \frac{A dx}{2(x^2 - A^2)^{\frac{1}{2}}} \text{ est l'expression d'un sec-}$$

* C'est l'équation de la *Chaînette*, telle que l'a trouvée Jean Bernoulli, Journal des Sçavants, année 1691. Plusieurs autres, après lui, ont aussi trouvé l'équation de cette courbe. Voyez le Tome III de ses Œuvres, page 491. Voyez aussi la Quatrième Partie du Cours de Mathématiques de M. Bezout, Article 361 & suiv.

PLANC. V.

teur de l'hyperbole * : donc on aura la valeur de y en divisant le secteur de l'hyperbole par $\frac{1}{2}A$.

Fig. 13.

(42.) Pour trouver la valeur d'un secteur hyperbolique FDC , EDC , EDC , &c., nommons z les abscisses de l'asymptote CQ , & faisons les ordonnées perpendiculaires $FQ = v$. L'équation à cette asymptote sera $vz = \frac{1}{2}A^2$ **, & la différentielle de l'aire $QFDP$ sera $v dz = \frac{A^2 dz}{2z}$, dont l'intégrale est $\frac{1}{2}A^2 \log z$; mais, pour que cette intégrale désigne seulement l'aire $QFDP$, il faut qu'elle devienne égale à zéro, lorsque $z = CP = A\sqrt{\frac{1}{2}}$: donc l'aire $QFDP = \frac{1}{2}A^2 \log \frac{z}{A\sqrt{\frac{1}{2}}}$. Or cette aire est égale au secteur CFD , parce que $QFDC = QFDP + PDC = QFC + FDC$, & $PDC = QFC$, donc $QFDP = FDC$: donc le secteur $FDC = \frac{1}{2}A^2 \log \frac{z}{A\sqrt{\frac{1}{2}}}$: donc enfin $y = A \log \frac{z}{A\sqrt{\frac{1}{2}}}$.

(43.) La valeur de z se trouve en considérant que $CF^2 = v^2 + z^2 = 2x^2 - A^2$, équation d'où l'on tire $z^2 = x^2 - \frac{1}{2}A^2 \pm \sqrt{(x^2 - \frac{1}{2}A^2)^2 - \frac{1}{2}A^4}$, &c. par conséquent on aura $y = A \log \frac{(B+H)^2 + \frac{1}{2}A^2 \pm \sqrt{(B+H)^2 + \frac{1}{2}A^2} \cdot \frac{1}{2}A^2}{A\sqrt{\frac{1}{2}}}$.

Donc on aura, pour l'extrémité de la ficelle où est attaché le Cerf-

PLANC. A.

Fig. 5.

* Pour le démontrer, soit PCA un secteur d'hyperbole équilatère, dont on veut avoir l'expression, soit C le centre de la courbe; $CA = A$ son demi-axe; $CM = x$ une abscisse; & $PM = y$ l'ordonnée correspondante. Menons la ligne Cp infiniment proche de CR , & le petit triangle différentiel CpP , sera l'élément du secteur PCA . Pour trouver l'expression de cet élément, décrivons du point C , comme centre, un petit arc Po , qu'on pourra regarder comme une petite ligne droite perpendiculaire sur Cp , faisons $Cp = t$; $Po = dt$, nous aurons $po = dt$, $Cp = t + dt$, & par conséquent le triangle $CpP = \frac{1}{2}Cp \cdot Po$ sera $= \frac{1}{2}(t + dt)dt = \frac{1}{2}tdt + \frac{1}{2}dtdt = \frac{1}{2}tdt$, à cause que $\frac{1}{2}dtdt$ est un infiniment petit du second ordre: donc le secteur PCA a pour expression $\int \frac{1}{2}tdt$.

Pour trouver la valeur de cette quantité en x , dx & constantes, soit mené l'ordonnée pm , & la perpendiculaire Pr sur cette ordonnée, on aura $pr = dy$, $Pr = dx$, & $Pp = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$: donc Po ou $dt = \sqrt{(Pp^2 - po^2)} = \sqrt{(dx^2 + dy^2 - dt^2)}$. Maintenant l'équation de la courbe donne $yy = xx - A^2$; en substituant cette valeur de yy dans celle de $t = \sqrt{(xx + yy)}$, on aura $t = \sqrt{(2xx - A^2)}$. De plus, en différenciant les valeurs de y & de t , on en déduira $dy = \frac{xx dx}{xx - A^2}$, & $dt = \frac{4x dx}{2xx - A^2}$; & par conséquent $dt = \sqrt{\left(\frac{dx^2}{xx - A^2} - \frac{4x^2 dx^2}{2xx - A^2}\right)} = \dots$

$\frac{A^2 dx}{\sqrt{(xx - A^2)\sqrt{(2xx - A^2)}}}$. Donc enfin $\int \frac{1}{2}tdt = \int \frac{1}{2}V(2xx - A^2) \frac{A^2 dx}{\sqrt{(xx - A^2)\sqrt{(2xx - A^2)}}}$.

** Voyez la Troisième Partie du Cours de Mathématiques de M. Bezout, Article 347. En faisant attention qu'il s'agit ici de l'hyperbole équilatère.

*** Car $xx - \frac{1}{2}A^2 = xx - A^2 + \frac{1}{2}A^2 = yy + \frac{1}{2}A^2 = (B+H)^2 + \frac{1}{2}A^2$. Voyez d'ailleurs la note *.

volant

volant, & à laquelle $H = h$, ...
 $y = A \log \frac{(B+h)^2 + \frac{1}{4}A^2 \pm \sqrt{((B+h)^2 + \frac{1}{4}A^2)^2 - \frac{1}{4}A^4}}{A\sqrt{\frac{1}{4}}}$, & à l'autre extrê-

mité, ou $H=0$, $y = A \log \frac{(B+\frac{1}{2}A \pm \sqrt{(B+\frac{1}{2}A)^2 - \frac{1}{4}A^4})^{\frac{1}{2}}}{A\sqrt{\frac{1}{4}}}$. Soustrayant
 cette deuxième quantité de la première, on aura l'horizontale $VL =$
 $\frac{1}{2}A \log \frac{(B+h)^2 + \frac{1}{4}A^2 \pm \sqrt{((B+h)^2 + \frac{1}{4}A^2)^2 - \frac{1}{4}A^4}}{B^2 + \frac{1}{4}A^2 \pm \sqrt{(B^2 + \frac{1}{4}A^2)^2 - \frac{1}{4}A^4}}$; ou, en regardant ce lo-

garithme comme un logarithme des Tables ordinaires, & le rédui-

sant en logarithme hyperbolique, afin de conserver la même valeur
 à l'expression, $VL = \frac{(B+h)^2 + \frac{1}{4}A^2 \pm \sqrt{((B+h)^2 + \frac{1}{4}A^2)^2 - \frac{1}{4}A^4}}{B^2 + \frac{1}{4}A^2 \pm \sqrt{(B^2 + \frac{1}{4}A^2)^2 - \frac{1}{4}A^4}} \cdot$ On substi-

tuerà ensuite dans cette expression la valeur de $B = \dots\dots\dots$

$\frac{P((Ruc-Pg)(Rub+Pg)-P^2(b+c)^2)}{k((Ruc-Pg)^2+P^2(b+c)^2)} - h$, & de $A = \frac{RuP^2(b+c)^2}{k((Ruc-Pg)^2+P^2(b+c)^2)}$; en

prenant le signe positif, tant au numérateur qu'au dénominateur,

si B est positif: on le prendra positif au numérateur, & négatif

au dénominateur, si B est négatif & $h > B$: enfin on prendra le

signe négatif, tant au numérateur qu'au dénominateur, si B est

négatif, & $h < B$.

(44.) Si l'on suppose $u=0$, alors $A=0$, & par conséquent

$VL=0$.

(45.) Si $u=\infty$, on aura $A=0$, & par conséquent $VL=0$,

comme auparavant.

(46.) Dans le cas où les deux extrémités de la ficelle se trou-

vent dans la même horizontale, on a (35.) $B = -\frac{1}{2}h$, on aura donc,

dans ce cas, $VL = \frac{1}{2}A(2,3025851) \log \frac{\frac{1}{4}h^2 + \frac{1}{4}A^2 + \sqrt{(\frac{1}{4}h^2 + \frac{1}{4}A^2)^2 - \frac{1}{4}A^4}}{\frac{1}{4}h^2 + \frac{1}{4}A^2 - \sqrt{(\frac{1}{4}h^2 + \frac{1}{4}A^2)^2 - \frac{1}{4}A^4}}$; ex-

pression qui se réduira à $VL = A(2,3025851) \log \frac{1+\cos(\varphi+\theta)}{1-\cos(\varphi+\theta)}$ **, à cause

de $B = \frac{P \sin \varphi \cos(\varphi+\theta)}{k \sin \theta} - h = -\frac{1}{2}h$, (19.), d'où l'on tire (11.)

$A = \frac{P \sin \varphi \sin(\varphi+\theta)}{k \sin \theta} = \frac{h \sin(\varphi+\theta)}{2 \cos(\varphi+\theta)}$.

* Voyez la Quatrième Partie du Cours de Mathématiques de M. Beroult, Art. 113.

** Car de la valeur de B , on tire $P = \frac{kh \sin \theta}{2 \sin \varphi \cos(\varphi+\theta)}$. Et cette valeur étant substituée

dans celle de A , donne l'expression que l'Auteur indique.

TOME I.

C c c

Digitized by Google

Réduire les formules à un cas facile pour la pratique.

(47.) Nous pouvons supposer pour cela $e=b$, & $g=2e$: car cette détermination de valeurs dépend seulement de la longueur des ficelles AG , GD , & de la position du point D , deux choses qui sont absolument arbitraires. La distance PC étant donc transportée de C en E , on fera $AG=(4b^2+(CA-t)^2)^{\frac{1}{2}}$, & prenant ensuite le point D à volonté, l'on aura $e=b$, & $g=2e$.

(48.) Suivant la théorie des Voiles, qu'on verra développée dans le *Tome II*, Art. 261 de cet Ouvrage, la force du Cerf-volant est $= \frac{1}{2} \mu a^2 \sin \phi$; ou en prenant les deux tiers de cette quantité, à cause de ce qu'on a dit (644.), elle sera $= \frac{1}{3} \mu a^2 \sin \phi$: donc $R = \frac{1}{3} \mu a^2$, a^2 désignant l'aire du Cerf-volant, que nous supposons de 9 pieds, & m le poids d'un pied cube d'eau de mer, que nous verrons dans le *Tome II*, Art. 109, être de 64 liv. $\frac{1}{4}$ *. On aura donc $R = \frac{64 \frac{1}{4} \cdot 9}{30}$, ou $= 19$ à peu près.

(49.) Supposons, en outre, que le poids du Cerf-volant avec sa queue soit d'une demi-livre, ou que $P = \frac{1}{2}$, & que 2000 pieds de ficelle pèsent une livre, on aura 2000 $k = 1$, ou $k = \frac{1}{2000}$.

Toutes ces valeurs étant substituées dans les formules, les réduisent à un cas très-facile pour la pratique.

(50.) Les valeurs des sinus & cosinus des angles ϕ , θ , & $\phi + \theta$, deviennent, d'après ces substitutions, telles qu'il suit:

$$\sin \phi = \frac{1}{((19u-1)^2+1)^{\frac{1}{2}}} \dots \dots \cos \phi = \frac{19u-1}{((19u-1)^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{((19u+1)^2+1)^{\frac{1}{2}}} \dots \dots \cos \theta = \frac{19u+1}{((19u+1)^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sin (\phi + \theta) = \frac{19u}{(((19u-1)^2+1)((19u+1)^2+1))^{\frac{1}{2}}}$$

$$\cos (\phi + \theta) = \frac{(19u-1)(19u+1)-1}{(((19u-1)^2+1)((19u+1)^2+1))^{\frac{1}{2}}}$$

(51.) Ces valeurs font voir clairement combien il faut peu de vitesse au vent, pour que la tangente HF s'élève au-dessus de l'horison. Cette tangente doit demeurer horizontale, lorsque $\cos (\phi + \theta) = 0$: donc, pour que ce cas arrive, on doit avoir $(19u-1)(19u+1) = 1$: ou $u = \frac{1}{19} \sqrt{2}$; de sorte qu'il faut que le vent ne parcoure pas

* Il s'agit ici du pied cube Anglais, qui pèse 1030 onces, *Averdupois*, ou 64 liv. $\frac{1}{4}$. Voyez l'endroit cité.

même 11 lignes par seconde, pour que la tangente *HF* demeure horizontale.

(52.) Les mêmes valeurs manifestent également, que, pour peu que la vitesse *u* du vent soit sensible, déjà le Cerf-volant se met presque horizontal: il suffit, pour cela, que $\sin \varphi = \frac{1}{((19u-1)^2+1)^{\frac{1}{2}}}$ soit négligeable. Supposons donc que $\frac{1}{((19u-1)^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{1^2}$, sinus d'un angle moindre qu'un degré, on aura à très-peu près $\frac{1}{19u} = \frac{1}{1^2}$, ce qui donne $u = 2$; c'est à-dire que le vent ayant seulement 2 pieds de vitesse par seconde, cela suffit pour faire prendre au Cerf-volant une situation horizontale, à moins d'un degré près.

(53.) Nous avons trouvé la tension de la ficelle à son extrémité *V*
 (21.)
$$= \left(\left(\frac{P(Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^3(b+c)^2}{(Rue-Pg)^2+P^2(b+c)^2} - kh \right)^2 + \frac{R^2u^2P^4(b+c)^4}{((Rue-Pg)^2+P^2(b+c)^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$
 donc, dans le cas présent, cette tension sera = ...

$$\left(\left(\frac{\frac{1}{2}(19u-1)(19u+1)-\frac{1}{2}}{(19u-1)^2+1} - \frac{h}{2000} \right)^2 + \frac{19^2u^2}{((19u-1)^2+1)^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(54.) Cette expression se réduit à $\frac{1}{2} - \frac{h}{2000}$, lorsque *u* a une valeur un peu considérable: d'où l'on voit que la tension de la ficelle se maintient presque sensiblement constante, quelque augmentation qui survienne dans la vitesse du vent.

(55.) Nous avons trouvé (32.) la hauteur à laquelle s'élève le Cerf-volant = $\frac{P((Rub+Pg)^2+P^2(b+c)^2)^{\frac{1}{2}}}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+c)^2)^{\frac{1}{2}}} -$

$$\left(\left(\frac{P(Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^3(b+c)^2}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+c)^2)} - h \right)^2 + \frac{R^2u^2P^4(b+c)^4}{k^2((Rue-Pg)^2+P^2(b+c)^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc dans le cas présent, cette hauteur sera = $\frac{\frac{1}{2}((19u+1)^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2000}((19u-1)^2+1)^{\frac{1}{2}}} = ...$

$$\left(\left(\frac{\frac{1}{2}(19u-1)(19u+1)-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2000}((19u-1)^2+1)} - h \right)^2 + \frac{19^2u^2}{\frac{1}{2000^2}((19u-1)^2+1)^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On a de même (37.)

$$\text{la plus grande hauteur} = \frac{1000((19u+1)^2+1)^{\frac{1}{2}}}{((19u-1)^2+1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2000.19u}{(19u-1)^2+1};$$

expression qui se réduit à $1000 - \frac{2000}{19u}$, lorsque *u* a une valeur un peu considérable; par conséquent plus la vitesse du vent sera grande, plus la plus grande hauteur à laquelle s'élèvera le Cerf-volant sera considérable.

(56.) La longueur de la ficelle propre à obtenir cette plus grande

hauteur verticale du Cerf-volant a été trouvée (37.) = ...

$$\frac{P((Ruc-Pg)(Rub+Pg)-P^2(b+c)^2)}{k((Ruc-Pg)^2+P^2(b+c)^2)} : \text{donc elle sera, dans la supposition présente,}$$

$\frac{\frac{1}{2}((19u-1)(19u+1)-1)}{\frac{1}{1000}((19u-1)^2+1)}$; expression qui se réduit à $1000(1+\frac{2}{19u})$, u ayant une valeur un peu considérable. Si l'on avoit $u=2$, elle seroit = 1052,6.

(57.) Une autre longueur de ficelle, quelle qu'elle soit, moindre, ou plus grande que celle-ci, donnera une moindre hauteur verticale au Cerf-volant. 1000 pieds de longueur de ficelle, en supposant $u=2$, ne donnent que 925,7 pieds de hauteur au Cerf-volant, tandis que la plus grande hauteur pour cette vitesse est de 947,4: 1500 pieds de longueur de ficelle ne donnent que 549,6 de hauteur verticale. Enfin si l'on donne à la ficelle une longueur double des 1052,6, qui donnent la plus grande élévation; c'est-à-dire, si l'on donne 2105,2 pieds de ficelle, on tombe dans le cas où le Cerf-volant demeure dans l'horizontale du point V , (38.).

(58.) Nous avons trouvé (43.) la distance horizontale $VL = \frac{1}{2}A(2,3025851) \log \frac{(B+h)^2+\frac{1}{2}A^2+\sqrt{((B+h)^2+\frac{1}{2}A^2)^2-\frac{1}{4}A^4}}{B^2+\frac{1}{2}A^2+\sqrt{(B^2+\frac{1}{2}A^2)^2-\frac{1}{4}A^4}}$; & dans le cas de la plus grande hauteur verticale du Cerf-volant, où l'on a $B=0$, (37.) elle devient $= \frac{1}{2}A(2,3025851) \log \frac{h^2+\frac{1}{2}A^2+\sqrt{(h^2+\frac{1}{2}A^2)^2-\frac{1}{4}A^4}}{\frac{1}{2}A^2}$.

Mais nous avons trouvé ci-dessus (56.), $h = 1000(1+\frac{2}{19u})$, & (43.)

$$A = \frac{RuP^2(b+c)^2}{k((Ruc-Pg)^2+P^2(b+c)^2)}, \text{ \& lorsque } u \text{ a une valeur un peu con-}$$

sidérable, cette valeur de A se réduit à $\frac{2000.19u}{19^2u^2-2.19u}$, ou à $1000 \frac{2}{19u}(1+\frac{2}{19u}) = \frac{2h}{19u}$. Donc, en substituant cette valeur de A dans l'expression de l'horizontale VL pour le cas de la plus grande hauteur, elle deviendra = ...

$$\frac{1000}{19^2u^2} (19u+2)(2,3025851) \log \frac{1+\frac{2}{19^2u^2}+\left(\left(1+\frac{2}{19^2u^2}\right)^2-\frac{4}{19^4u^4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{2}{19^2u^2}} =$$

$$\frac{1000}{19^2u^2} (19u+2)(2,3025851) \log \frac{19^2u^2+2+19u\sqrt{19^2u^2+4}}{2}; \text{ ou à peu près } \\ = \frac{2000}{19^2u^2} (19u+2)(2,3025851) \log 19u. \text{ Faisant maintenant } u=2, \\ \text{ nous aurons } VL = \frac{1000}{19^2} (20)(2,3025851) \log 38 = 201,5 \text{ pieds.}$$

(59.) Ceci donne l'angle $LVG = 78^\circ$, & la distance directe $VG = 969, 3$; de sorte que la courbure de la ficelle emploie 83, 3 pieds.

Réduire les formules au cas considéré par Euler, dans lequel $g = 0$, ayant aussi $e = b$.

(60.) Dans ce cas, on aura (3.) $\sin(\varphi + \theta) = \dots\dots\dots$
 $\frac{4PRu}{k^2u^2 + 4P^2}$, & $\cos(\varphi + \theta) = \frac{R^2u^2 - 4P^2}{k^2u^2 + 4P^2}$.

(61.) Soit $u = 0$, on aura $\sin(\varphi + \theta) = 0$, & $\cos(\varphi + \theta) = -1$; ce qui s'accorde avec ce qu'on a dit, Art. 4, & avec les principes connus de Mécanique.

(62.) La force que le vent exerce sur le Cerf-volant, se réduit dans ce cas, à $\frac{2PRu}{(R^2u^2 + 4P^2)^{\frac{3}{2}}}$, (7.).

(63.) La force, ou tension à l'extrémité V de la ficelle, se réduit pareillement, en ce cas (21.), à $\left(\left(\frac{PR^2u^2 - 4P^3}{R^2u^2 + 4P^2} - kh \right)^2 + \frac{16R^2u^2P^4}{(R^2u^2 + 4P^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$.

(64.) Si $u = 0$, cette force, ou tension, sera $= -P - kh$, poids du Cerf-volant & de la ficelle.

(65.) La hauteur verticale du Cerf-volant se réduit, dans ce cas (32.), à $\frac{P(R^2u^2 + 4P^2)^{\frac{1}{2}}}{k^2(R^2u^2 + 4P^2)^{\frac{3}{2}}} - \left(\left(\frac{P(R^2u^2 - 4P^2)}{k(R^2u^2 + 4P^2)} - h \right)^2 + \frac{16R^2u^2P^4}{k^2(R^2u^2 + 4P^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{P}{k} - \left(\left(\frac{P(R^2u^2 - 4P^2)}{k(R^2u^2 + 4P^2)} \right)^2 + \frac{16R^2u^2P^4}{k^2(R^2u^2 + 4P^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$.

(66.) Si $u = 0$, la hauteur verticale deviendra $= \frac{P}{k} - \frac{P}{k} - h = -h$; longueur de la ficelle.

(67.) La quantité h étant variable, l'expression de la plus grande hauteur se réduit à $\frac{P(Ru - 2P)^2}{k(R^2u^2 + 4P^2)}$; & celle de la longueur h de la

ficelle qui donne cette plus grande hauteur devient $= \frac{P(R^2u^2 - 4P^2)}{k(R^2u^2 + 4P^2)}$.

(68.) Cette longueur de la ficelle qui donne la plus grande hauteur sera donc à cette plus grande hauteur, comme $Ru + 2P$, est à $Ru - 2P$.

(69.) La longueur de la ficelle nécessaire pour que le Cerf-volant demeure dans l'horizontale du point V , se réduit (36.) à $h = \frac{2P(R^2u^2 - 4P^2)}{k(R^2u^2 + 4P^2)}$.

Tous ces résultats conviennent parfaitement avec ce qu'on observe dans la pratique. Examinons maintenant s'il en est de même dans le

système où l'on suppose que les forces du vent sont en raison composée doublée de ses vitesses & de ses sinus d'incidence.

Théorie des Cerf-volants, ou Cometes, en supposant la résistance des Fluides en raison composée doublée de leurs vitesses & des sinus des angles d'incidence.

(70.) L'expression de la force du vent sur le Cerf-volant, sera présentement $ru^2 \sin \varphi$. Cette quantité substituée dans l'équation de l'Art. 1, en place de $Ru \sin \varphi$, qui exprimoit la même force, & faisant $c=b$, & $g=0$, on aura $ru^2 \sin \varphi = 2P \cos \varphi$.

(71.) On aura donc, $\sin \varphi = \frac{2P}{ru^2} \cos \varphi$: & $1 - \sin \varphi = \cos \varphi = 1 - \frac{2P}{ru^2} \cos \varphi$: d'où l'on déduit $\cos \varphi = -\frac{P}{ru^2} \pm \left(1 + \frac{P^2}{r^2 u^4}\right)^{\frac{1}{2}}$:
& $\sin \varphi = \left(-\frac{2P}{ru^2} \pm \frac{2P}{ru^2} \left(1 + \frac{P^2}{r^2 u^4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

(72.) L'équation de l'Art. 2 devient $ru^2 \sin \varphi \sin \theta = P \sin (\varphi + \theta) = P (\sin \varphi \cos \theta + \sin \theta \cos \varphi)$; & en substituant, d'après ce qui précède, $2P \cos \varphi$, à la place de $ru^2 \sin \varphi$, l'on aura $2P \sin \theta \cos \varphi = P (\sin \varphi \cos \theta + \sin \theta \cos \varphi)$, ou $\sin \theta \cos \varphi = \sin \varphi \cos \theta$: donc $\varphi = \theta$.

(73.) Nous aurons donc $\sin (\varphi + \theta) = 2 \sin \varphi \cos \varphi$, & $\cos (\varphi + \theta) = \cos \varphi^2 - \sin \varphi^2 = 2 \cos \varphi^2 - 1$; ce qui donne $\sin (\varphi + \theta) = \left(\frac{8P}{ru^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{P}{ru^2} \pm \left(1 + \frac{P^2}{r^2 u^4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$: & $\cos (\varphi + \theta) = 1 + \frac{4P^2}{r^2 u^4} \mp \frac{4P}{ru^2} \left(1 + \frac{P^2}{r^2 u^4}\right)^{\frac{1}{2}}$.

(74.) pour rendre ces expressions plus traitables, & en même temps plus intelligibles, supposons $\frac{r^2 u^4}{P^2} = n^2 - 1$ *, alors nous aurons $\sin (\varphi + \theta) = \frac{2}{(n+1)} \sqrt{2(n-1)}$, & $\cos (\varphi + \theta) = 1 - \frac{4}{n+1}$.

(75.) Soit supposé $u=0$, l'on aura $n=1$, $\sin (\varphi + \theta) = 0$, & $\cos (\varphi + \theta) = -1$.

(76.) Soit $\frac{r^2 u^4}{P^2} = 8$, l'on aura $n=3$, $\sin (\varphi + \theta) = 1$, & $\cos (\varphi + \theta) = 0$.

(77.) Soit $u=\infty$, l'on aura $n=\infty$, $\sin (\varphi + \theta) = 0$, & $\cos (\varphi + \theta) = 1$.

(78.) La force que le vent exerce sur le Cerf-volant est
 $ru^2 \sin \varphi = 2P \cos \varphi = -\frac{2P^2}{ru^2} \pm 2P \left(1 + \frac{P^2}{ru^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2P \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}$.

* On trouve dans l'original $r^2 u^4 = n^2 - 1$; mais il nous paroît évident que c'est une méprise de l'Auteur : car en substituant cette quantité, on ne parviendroit pas aux valeurs qu'il indique pour $\sin (\varphi + \theta)$ & $\cos (\varphi + \theta)$; mais on les trouve en faisant $\frac{r^2 u^4}{P^2} = n^2 - 1$. Nous avons rétabli ce passage & les suivans qui en dépendent.

(79.) Soit $u=0$, l'on aura $n=1$; ce qui donne $ru^2 \sin \phi^2 = 0$.

(80.) Soit $\frac{ru^4}{P^2} = 8$, l'on aura $n=3$, ce qui donne $ru^2 \sin \phi^2 = P \sqrt{2}$.

(81.) Soit $u=\infty$, l'on aura $n=\infty$; ce qui donne $ru^2 \sin \phi^2 = 2P$.

(82.) La théorie de la tension, ou force, qui agit sur la ficelle, est la même dans ce système de résistance que dans l'autre; il est seulement nécessaire de substituer dans les formules les valeurs correspondantes des sinus & cosinus des angles ϕ , θ , & $\phi + \theta$.

L'expression de l'Art. 20 est

$\frac{1}{Pn} \{ (P \sin \phi \cos (\phi + \theta) - kh \sin \theta)^2 + P^2 \sin^2 \phi \sin^2 (\phi + \theta) \}^{\frac{1}{2}}$: en faisant $\phi = \theta$, elle devient $(P^2 + k^2 h^2 - 2Pkh \cos (\phi + \theta))^{\frac{1}{2}} = ((P - kh)^2 + \frac{8Pkh}{n+1})^{\frac{1}{2}}$; en mettant pour $\cos (\phi + \theta)$ sa valeur. Quant à l'expression de l'Art. 13, elle devient $= P$.

(83.) Soit maintenant $u=0$, l'on aura $n=1$; ce qui donne la tension de la ficelle $= P + kh$, poids du cerf-volant & de la ficelle.

(84.) Soit $\frac{ru^4}{P^2} = 8$, l'on aura $n=3$; ce qui donne la tension $= (P^2 + k^2 h^2)^{\frac{1}{2}}$.

(85.) Soit $u=\infty$, l'on aura $n=\infty$; ce qui donne la tension $= P - kh =$ le poids du Cerf-volant, moins celui de la ficelle.

(86.) Comme la hauteur verticale du Cerf-volant dépend des mêmes éléments que la tension, elle sera la même que dans l'autre système; c'est-à-dire qu'elle sera égale à la différence des tensions aux extrémités de la ficelle divisée par k : elle sera donc $= \frac{P}{k} - \frac{1}{k} ((P - kh)^2 + \frac{8Pkh}{n+1})^{\frac{1}{2}}$.

(87.) Soit $u=0$, ou $n=1$, & la hauteur verticale sera $= \frac{P}{k} - \frac{P}{k} - h = -h$.

(88.) Soit $\frac{ru^4}{P^2} = 8$, ou $n=3$, la hauteur verticale sera $= \frac{P}{k} - \frac{1}{k} (P^2 + k^2 h^2)^{\frac{1}{2}}$.

(89.) Soit $u=\infty$, ou $n=\infty$, la hauteur verticale sera $= \frac{P}{k} - \frac{P}{k} + h = +h$.

(90.) Pour le cas où le Cerf-volant doit se maintenir dans l'horizontale V , nous aurons (35.) $\frac{P}{k} = \frac{1}{k} ((P + kh)^2 + \frac{8Pkh}{n+1})^{\frac{1}{2}}$, ou $2P - kh = \frac{8P}{n+1}$; ce qui donne $n = \frac{6P + kh}{2P - kh}$, & $\frac{ru^4}{P^2} = \frac{16P(2P + kh)}{(2P - kh)^2}$.

(91.) Jusqu'ici ce système de résistance ne nous a manifesté aucun

défaut qui autorise à le rejeter; mais ils se manifestent aussi-tôt qu'on examine avec un peu d'attention les expressions de ces hauteurs verticales. Ayant $\frac{r^2 u^4}{P^2} = 8$, la hauteur verticale du Cerf-volant est $= \frac{P}{k} - \frac{1}{k} (P^2 + k^2 h^2)^{\frac{1}{2}}$, quantité constante négative, quelles que soient les valeurs de h , de k , & même de P : de sorte que d'après ce système, le Cerf-volant ne peut pas même s'élever jusqu'à l'horizontale du point V , avec la seule vitesse du vent $u = \left(\frac{8P^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{4}}$. Or, dans ce système (644), $ru^2 = \frac{ma^2}{64} u^2$: donc $r = \frac{ma^2}{64}$, ou en faisant la densité de l'air $= m = \frac{64}{29.29}$, & $a^2 = 9$, on aura $r = \frac{9}{29.29}$, & $r^2 = \frac{81}{29.29}$. Le Cerf-volant ne pourra donc pas même s'élever jusqu'à l'horizontale du point V , ayant $u = \frac{29}{3} (8)^{\frac{1}{4}} P^{\frac{1}{4}}$: c'est-à-dire, lorsque la vitesse du vent est de $12 \frac{2}{3}$ pieds à peu près * par seconde; ce qui est évidemment contraire à l'expérience, qui fait voir que cette vitesse est capable, non-seulement d'élever le Cerf-volant jusqu'à l'horizontale du point V , mais de le mettre presque vertical à ce point, principalement lorsque kh est une petite quantité. En effet, dans l'autre système de résistance, lorsque u a une valeur aussi grande, on peut négliger toutes les quantités dans lesquelles u ne se trouve pas; ce qui réduit la hauteur verticale à $\frac{P}{k} - \frac{P}{k} + h = h$. longueur de la ficelle.

(92.) On a vu ci-dessus que l'équation $\frac{r^2 u^4}{P^2} = \frac{16P(2P+kh)}{(2P-kh)^2}$ doit avoir lieu, pour que le Cerf-volant demeure dans l'horizontale du point V . Substituant dans cette expression $P = \frac{1}{2}$, $k = 2000$, $h = 1000$, on aura $r^2 u^4 = 12$, ou $u = \frac{29}{3} (12)^{\frac{1}{4}}$, ce qui donne la vitesse u de plus de 18 pieds par seconde **; vitesse excessive qui est capable de mettre le Cerf-volant en pieces, bien loin de ne pouvoir l'élever

* Par une suite de la faute que nous avons fait remarquer dans la note de l'Article 74, l'Auteur trouve 16 p. $\frac{1}{2}$, au lieu de 12 p. $\frac{1}{2}$ que nous trouvons. Cette vitesse 16 p. $\frac{1}{2}$ aurait effectivement lieu, en supposant $P = 1$; mais, pour conserver l'analogie dans la comparaison des deux systèmes, nous faisons $P = \frac{1}{2}$, quoique l'Auteur n'en avertisse pas. Au surplus, on trouve cette dernière supposition dans l'article suivant.

** Dans l'original, on trouve $r^2 u^4 = 48$, ce qui donne u de plus de 25 pieds; mais nous avons déjà indiqué l'origine de cette différence. Au reste, cela n'est, comme on voit, d'aucune importance pour les conséquences que l'Auteur déduit de ses calculs.

jusqu'à

jusqu'à l'horizontale du point *V*. Dans l'autre système, cette même vitesse élèvera le Cerf-volant jusqu'à le mettre sensiblement vertical au point *V*.

Ceci suffit, pour convaincre de la fausseté du système qui suppose la résistance des Fluides en raison composée doublée des vitesses & des sinus des angles d'incidence.

APPENDICE II.

L'IMPRESSION de cet ouvrage étoit presque finie, lorsque je reçus d'Angleterre le reste des transactions Philosophiques de la Société Royale, qui étoient nouvellement imprimées. Dans le Volume 51, Part. 1, page 100, on trouve quelques expériences faites par M. J. Smeaton, sous le titre, *An experimental inquiry concerning the natural powers of water and wind to turn mills, and other machines depending on a circular motion*. L'Auteur donne la description d'une petite machine de son invention, dont il a fait usage pour déterminer, par des expériences répétées, la force qu'exerce l'eau, qui, en sortant d'un réservoir par une ouverture, clique les aubes d'une roue verticale, disposée comme celle d'un moulin. Sur l'axe de cette roue s'enveloppe une corde, à laquelle est suspendu un poids qui sert pour mesurer l'effet de la machine. L'Auteur en soumettant ces matières à un nouvel examen, prouve clairement le peu de confiance qu'il avoit dans les déterminations données jusqu'alors sur les forces, ou résistances, de l'eau. Avant de commencer, il examine les différences qui doivent résulter de faire les expériences avec des modèles, ou de les faire avec des machines en grand, à cause du frottement, qui, comme nous l'avons vu, doit être différent, suivant les différentes dimensions & pesanteurs des pièces qui composent la machine. Pour éviter cette difficulté, il donne une méthode très-ingénieuse pour déterminer les frottements, & en corriger les effets dans les expériences, afin qu'on puisse avoir confiance dans leurs résultats autant qu'il est possible, ou au moins, suffisamment pour connoître la loi suivant laquelle l'eau produit son action.

Nous ne nous arrêterons pas à l'examen, ou à la détermination des forces absolues; nous nous contenterons de faire voir combien

les résultats de ces expériences s'accordent avec la Théorie que nous avons donnée, & combien elles s'éloignent de celle qu'on a enseignée jusqu'ici. Pour cela il suffit de dire que l'effet d'une machine doit se mesurer par le produit du poids qu'elle élève, par la vitesse avec laquelle il est élevé: parce que si la vitesse est zéro, l'effet l'est également, & ce seroit la même chose si le poids étoit zéro. Par-là on voit clairement que si depuis un poids fort petit, on alloit en augmentant graduellement, l'effet de la machine qui élève ce poids deviendrait de plus en plus grand jusqu'à un certain terme, au de-là duquel il doit diminuer, parce que le poids devenant excessif, la machine ne pourra le mouvoir, & l'effet deviendra zéro. Ce terme où l'effet cesse d'augmenter, est par conséquent le *maximum*, & c'est celui qu'on a toujours cherché pour obtenir le plus grand avantage dans l'usage des machines. La manière de le trouver, est de calculer premièrement la valeur du poids élevé en fonctions de la puissance, ou de la force motrice; de multiplier cette valeur par la vitesse du même poids, & de chercher ensuite le *maximum* de cette expression. Cela posé, soit supposé, dans le cas de notre Auteur,

V la vitesse avec laquelle se meut l'eau choquante;

u la vitesse des aubes de la roue, & celle du poids;

P le poids;

R le rayon de la roue;

r le rayon de l'axe sur lequel se roule la corde;

F la quantité du frottement résultant du poids de toute la machine.

Il suit de ces dénominations que $V-u$ sera la vitesse avec laquelle l'eau choque les aubes; & suivant la Théorie qu'on a enseignée jusqu'ici, on peut exprimer la force de l'eau par $A(V-u)^2$, A étant une quantité constante, & son moment par $RA(V-u)^2$. Ce moment doit être égal à celui rP du poids, plus ceux des frottements. Le frottement qui provient du poids peut s'exprimer par nP , n étant un nombre constant quelconque: & celui qui résulte du poids total de la machine par fF , f étant un autre nombre constant quelconque. Nous aurons donc, $RA(V-u)^2 = rP + nP + fF$; d'où nous tirerons $P = \frac{RA(V-u)^2 - fF}{r+n}$; & $Pu = \frac{RAu(V-u)^2 - fFu}{r+n}$.

Pour trouver maintenant le *maximum* de cette quantité, nous devons la différencier, & égaler la différencielle à zéro. On aura par conséquent $RAdu(V^2 - 4Vu + 3u^2) - fFdu = 0$, ce qui donne $u = \frac{1}{2}V - \left(\frac{fF}{3RA} + \frac{1}{3}V^2\right)^{\frac{1}{2}}$: c'est l'expression de la vitesse que doivent prendre

les aubes de la roue, & le poids, pour que la machine produise le plus grand effet possible. De sorte qu'on doit proportionner le poids pour obtenir cette vitesse. Si l'on suppose $f=0$: c'est-à-dire, le frottement nul, on aura $u=\frac{1}{2}V$: c'est ce que nous ont enseigné jusqu'ici tous les Auteurs. La vitesse V de l'eau devoit donc, suivant cette Théorie, être à la vitesse u des aubes, abstraction faite du frottement, comme 3 est à 1: & en ayant égard au frottement, cette raison devoit être encore plus grande; en sorte que, suivant ce système, la vitesse des aubes doit être encore moindre que le tiers de la vitesse de l'eau: or c'est ce que les expériences de M. Smeaton contredisent manifestement. Pour s'en convaincre, il ne faut que jeter les yeux sur la page 115, colonne 12. On y verra clairement la fausseté de ce système: car on ne trouve pas même une seule expérience parmi les 27 qu'il expose, qui ne donne la vitesse des aubes plus grande que le tiers de la vitesse de l'eau: il y en a même quelques unes dans lesquelles la vitesse des aubes va jusqu'à être la moitié de celle de l'eau.

Pour résoudre maintenant le même cas suivant notre Théorie, nous n'avons qu'à exprimer la force avec laquelle l'eau choque les aubes par $A(V-u)$: ce qui réduira la première équation à $RA(V-u)=rP+nP+fF$, & donnera $P=\frac{RA(V-u)-fF}{r+n}$, & $Pu=\frac{RAu(V-u)-fFu}{r+n}$; expression dont la différentielle étant égale à zéro,

donne $RA(V-2u)-fF=0$, & par conséquent $u=\frac{1}{2}V-\frac{fF}{2RA}$:

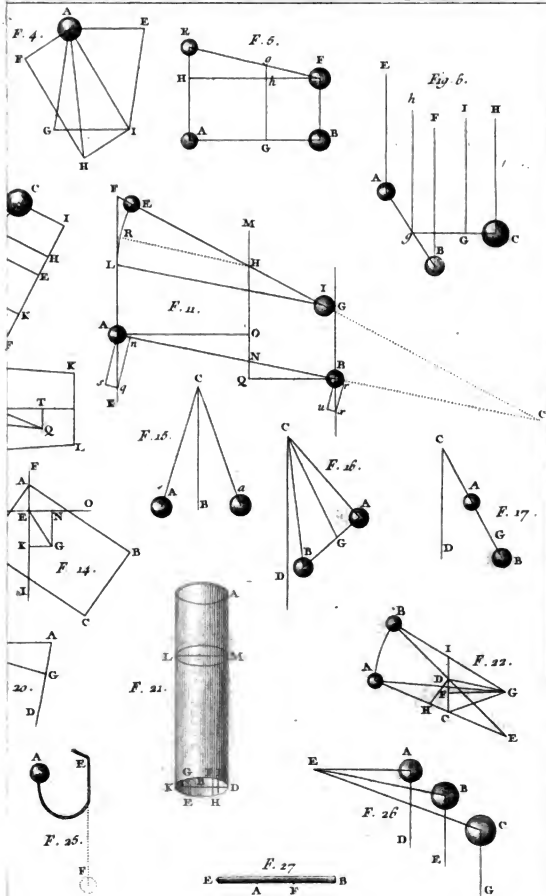
d'où l'on voit que la vitesse des aubes doit être un peu moindre que la moitié de la vitesse de l'eau qui les choque: c'est aussi ce qu'on a trouvé par l'expérience, & ce qui est exprimé à très-peu près dans la colonne 12 de la page 115 de notre Auteur. Mais ce n'est pas seulement cet accord, qui confirme d'avantage notre Théorie. La quantité A est la constante, qui, multipliée par la vitesse exprime la résistance, ou la force, du Fluide. Or, cette force (642.)

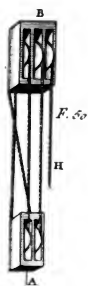
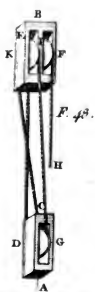
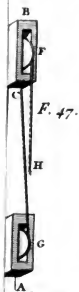
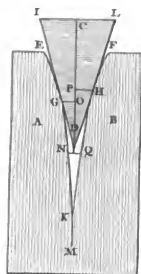
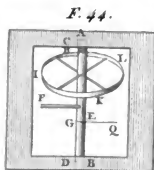
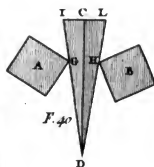
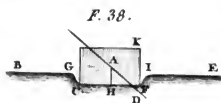
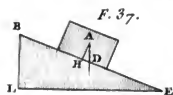
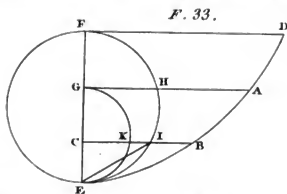
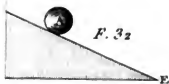
est $=\frac{1}{2}mca^2u \sin \theta$, ou, à cause de $\sin \theta = 1$, $=\frac{1}{2}mca^2u$: on aura donc $A=\frac{1}{2}mca^2$; expression dans laquelle ca désigne la section verticale de l'eau dans le canal, ou dans l'orifice par lequel elle sort. Ainsi

on voit que plus cette ouverture sera grande, plus la quantité $\frac{fF}{2RA}$ sera petite, & plus la vitesse u des aubes, & du poids P sera grande. Or, rien n'est plus conforme aux expériences de

l'Auteur. Dans la même page 115, on voit qu'il a fait les expériences avec six orifices différents, les uns plus grands que les autres. Les dix premières faites avec le plus petit orifice, donnent, en prenant un milieu entr'elles, & supposant $V=10$, donnent, dis-je, $u=3,548$, & $\frac{fF}{2RA}=1,452$. Les sept secondes faites avec un plus grand orifice donnent $u=3,89$, & $\frac{fF}{2RA}=1,11$. Les quatre troisièmes, avec un autre orifice plus grand, donnent $u=4,3$, & $\frac{fF}{2RA}=0,7$. Les trois quatrièmes, avec un orifice encore plus grand, donnent $u=4,53$, & $\frac{fF}{2RA}=0,47$. Les deux cinquièmes, faites avec un orifice plus grand, donnent $u=4,775$, & $\frac{fF}{2RA}=0,225$; & enfin la sixième, faite avec le plus grand orifice, donne $u=5,2$: quantité qui excède de quelque chose, la plus grande valeur que puisse avoir u qui est $=5$, mais cette différence est bien petite, en comparaison de celles que donnent les autres expériences. La même théorie ne fera pas moins accréditée, & recevra encore un nouveau degré de certitude, lorsque, dans le *Tome II*, on l'appliquera à tous les phénomènes que présentent les mouvements du Navire.

Fin du Tome premier.

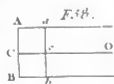
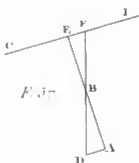
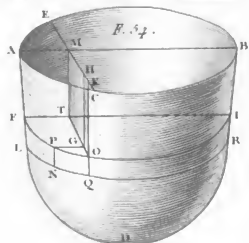
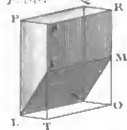




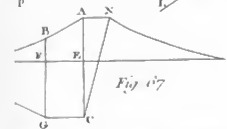
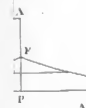
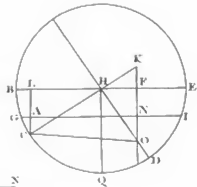
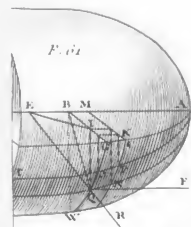
F. 52.



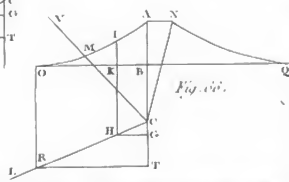
F. 53.

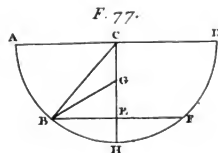
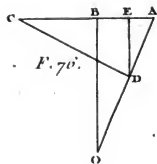
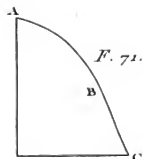
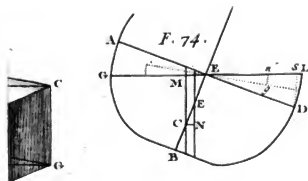
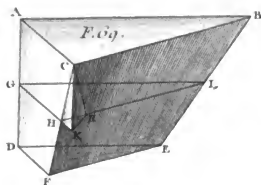
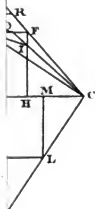
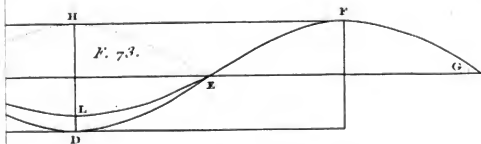


F. 58.



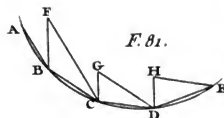
F. 62.





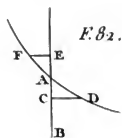
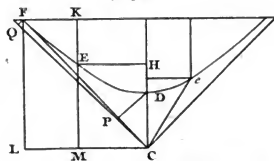
80.

G



F.81.

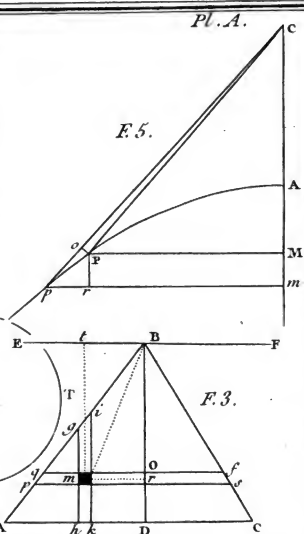
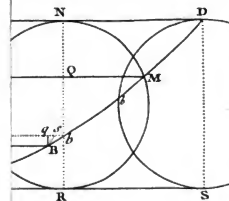
F.83.



F.82.



F.2.



F.5.

F.3.

TABLE ALPHABÉTIQUE ET RAISONNÉE

Des Matières contenues dans ce premier Volume.

N. B. Les Renvois indiquent les *Articles*, & non les *Pages*, à moins qu'on ne l'exprime.

ACTION est égale à la réaction, & lui est opposée, *Article 22. Voyez Force, Résistance, Moments, &c.*

ALEMBERT (d') Auteur d'un principe très-sécond dans la science du mouvement, 112 (*Note*). — Fait voir avec la plus grande évidence que la question des forces vives & mortes est une question de nom, 246 (*Note*).

AMONTONS, ses résultats sur le frottement, 407. *V. Frottement.*

AMPLITUDE des fibres, 208. *V. Levier.*

ANGLE de ROTATION, *V. Rotation.*

APPUI (point d'). *V. Levier.*

ARISTOTE demande pourquoi une hache divise le bois par son centre, & non quand elle est seulement comprimée, mais ne résout pas la question, 246.

ASPERITÉS. *V. Frottement.*

ATOMES primitifs des corps sont privés de pores, 236.

AUXES d'une roue à l'eau; vitelles qu'elles prennent suivant notre système, confirmée par l'expérience, &c. *App. 11, pag. 392 & suiv.*

AXE de ROTATION, 165 & 220. *V. Rotation.*

BERNOULLI (Daniel) distingue le centre des masses de celui des puissances, 99. *V. Centre de gravité.* — Que la théorie de la résistance des fluides est sujette aux mêmes difficultés que celles des autres Auteurs. — Sa distinction des fluides élastiques & non élastiques, 693.

BERNOULLI (Jean) ne détermine le rayon de rotation d'un système que dans un cas. — A cru que le système tournoit sur son centre d'oscillation. — N'a déterminé, ainsi que M. Bouguer, l'axe & le rayon de rotation que pour le premier instant, 229. — Sa définition des forces vives & mortes, 246. — Établit que ces deux forces ne sont pas plus comparables que le fini avec l'infini, une ligne avec une surface; & en même temps que la force vive ne dépend pas absolument du choc. Obscurité des notions de cet Auteur, 246. — Il donne à penser qu'il doutoit de la réunion des centres de percussion & d'oscillation, 350.

BILVINGER, ses résultats sur le frottement, 407. *V. Frottement.*

BOUGUER établit qu'une ligne droite tourne sur son centre de gravité, étant poulée, ou tirée perpendiculairement par deux puissances égales, & de direction contraire, appliquées à ses extrémités. Que cette proposition peut être énoncée d'une manière plus générale, 228. — Que la règle qu'il donne sur la situation de l'axe & du rayon de rotation des corps, n'est pas générale, 229. — N'a considéré la stabilité des corps flottants qu'en les supposant sans mouvement progressif, différence qu'en résulte, 848. — Sa règle sur la stabilité des corps flottants; & restriction qu'on doit y faire, 894. — Qu'il néglige de considérer l'effet des résistances dans la rotation des corps flottants; & erreur qui en résulte, 931.

CABESTAN, 424. 491. *V. Treuil.*

CALIGNES, 531. *V. Moufles.*

CATARACTE, 613.

CENTRE de CONVERSION, 129 (*Note*). *V. Rotation.*

CENTRE de FIGURE, ou de GRANDEUR, 123.

CENTRE de GRAVITÉ d'un système & de son mouvement, 80 jusqu'à 137. — Formule de l'espace parcouru par un point quelconque de la ligne qui joint deux corps qui le meuvent suivant des directions parallèles, en vertu de puissances quelconques, 81. — *Idem*, si les distances de chacun des corps au point dont on considère la vitesse, sont en raison inverse de leur masse, 83. — Que les longueurs absolues de ces distances n'affectent pas le mouvement du point dont il s'agit, 84. — Qu'on peut les supposer égales à zéro; & que, par conséquent, le point dont il s'agit se meut comme si les deux corps y étoient réunis, & seroient animés par une seule puissance égale à la somme des deux premières, 85. — Mêmes formules pour trois corps, & conséquences semblables, 86, 87 & 88. — *Idem*, pour quatre corps, & pour un nombre quelconque de corps, 89, 90. — Simplification de cette formule, 91. — Formules de la distance du même point à un plan quelconque pour deux corps, 92. — *Idem*, pour trois corps, 94. — *Idem*, pour un nombre quelconque de corps, 96. — *Idem*, en considérant les puissances, au lieu des masses, 93 & 95. — Que cette distance est égale à la somme des produits de chaque masse, ou de chaque puissance, par la distance perpendiculaire au plan qu'on a choisi, 96. — Réciproquement, si un point est tel que la distance perpendiculaire à un plan soit égale à la somme des produits de chaque masse, par sa distance au même plan, divisée par la somme des masses, ce point aura les propriétés démontrées aux *Art. 81 jusqu'à 94*, 97. — Que le point dont il s'agit est ce qu'on appelle le Centre de gravité, 98. — Que ce nom ne lui convient que lorsqu'il y a des puissances agissantes sur les gravités, 99.

CENTRE de GRAVITÉ dans les corps pesants, ne peut parvenir au repos qu'en descendant le plus bas qu'il est possible, 181.

CENTRE des MASSES, 99. Que le centre des masses est le même que celui de gravité, ou des puissances dans les corps graves, 99, 180. Toutes les masses d'un système se mouvant suivant des directions parallèles, le centre de gravité se meut aussi dans une direction parallèle à celle des masses, 100. — C'est la même chose pour le centre des puissances, si elles sont constantes, 101. — Différentielle de l'espace parcouru par le centre des masses d'un système, est la même que celle que parcourroient les masses, si elles étoient réunies à leur centre, & animées d'une seule puissance égale à leur somme, 102, 105, 116. — Distance perpendiculaire du centre des masses d'un système, ou d'un corps, à un plan, est égale à la somme des produits de chaque masse par la distance perpendiculaire au même plan, divisée par la somme des masses, 103, 120, 121. — Mêmes propriétés pour le centre des puissances, 104. — Différentielle de l'espace parcouru par le centre des masses, 105, 116. — *Idem*, de la vitesse de ce centre, & ex.

pression de cette vitesse, 105, 107, 116. — Expression du carré de la vitesse du centre des masses, 106, 116. — La vitesse du centre des masses est égale à la somme des produits de chaque masse par sa vitesse divisée par la somme des masses, 107. — Cas où les puissances ne sont pas parallèles, 108. — Qu'il suffit de résoudre le cas des puissances parallèles, 109. — Que le Centre des masses est immobile, si les puissances positives sont égales aux négatives, 110. — Que l'espace parcouru par le Centre des masses peut être zéro, suivant une ou deux directions, sans cesser d'exister suivant les autres, 111. — Que le Centre des masses d'un système ne reçoit aucun mouvement par l'action des forces avec lesquelles les corps se tirent mutuellement lorsqu'ils sont liés entre eux par des lignes inflexibles, 112 (Note). — Que son mouvement est le même que si les corps étoient libres, 113. — Le Centre des masses d'un corps quelconque se meut comme si chaque particule étoit séparée de libre, 114. — Qu'on doit entendre la même chose d'un système de corps, quoique la masse ne soit pas réunie à son centre, 115. — Le Centre des masses étant immobile dans un système, ou machine, composé de deux corps, les vitesses des corps sont en raison inverse de leurs masses, 117. — Même loi quand la gravité est le principe moteur : & que ce n'est pas la même chose quand le centre de gravité est en mouvement, 118. — Le Centre des masses ne peut se mouvoir uniformément, à moins que les puissances agissantes ne se détruisent mutuellement, 119 (Note). — Situation du Centre des masses dans les corps uniformément denses qui peuvent être partagés en deux parties égales & semblables par trois plans, 122. — Que le Centre des masses de tous ces corps est le même que leur Centre de figure, ou de grandeur, 123. — Recherche du Centre des masses d'un corps quelconque uniformément dense, 124. — Formules générales de la distance du Centre des masses au plan primitif, pour les solides de révolution, 124. — Application à la demi-sphère & au paraboloïde, 125 & 126. — Que c'est la même chose pour le centre des puissances, 127.

CENTRE DES PUISSANCES, 99.

CENTRE D'OSCILLATION, 190. — Sa distance au centre de gravité, 191. — Est plus éloigné de l'axe que le centre de gravité, 192. — Est le même que celui de percussion, lorsque le corps est un plan coïncidant avec l'axe, 346. — Que ces centres sont différents dans tout autre cas, 348.

CENTRE DE PERCUSSION, 232, 344. V. Percussion. Trouver le centre de percussion, 344. — Une puissance placée au centre de percussion, & égale à la somme de toutes les autres, produit le même effet qu'elles, 345. — Ce centre est le même que celui d'oscillation, lorsque le corps est un plan coïncidant avec l'axe : & lorsque le corps ne tourne pas, il est confondu avec le centre de gravité, 347. — Que ces centres sont différents dans tout autre cas, 348. — Un obstacle rencontré par un corps dans un autre point que son centre de percussion, ne reçoit qu'une partie de la percussion, le reste est supporté par la cohésion des parties du corps qui sont, par rapport à l'axe, au-delà du point où le fait le choc, 349. — Centres de percussion & d'oscillation sont mal à propos confondus ensemble par tous les Auteurs, 350. — Centre de percussion du triangle isocèle tournant latéralement, n'est pas le même que celui d'oscillation : développement, 350 (Note).

CENTRE DES RÉSISTANCES, 850 V. Résistance. Expression de la distance du centre des résistances horizontales qu'éprouve un parallépipède au centre de gravité, 850. — Idem, à la superficie du fluide, 850.

CENTRE SPONTANÉ DE ROTATION, 129 (Note). V. Rotation.

CERF-VOLANT. Théorie des Comètes ou Cerf-volants, pour vérifier la loi des résistances, Appendice I, page 372 & suiv. Trouver la valeur des sinus & cosinus des angles, & applications à différents cas, App. I, 1 jusqu'à 6. Trouver la force que le vent exerce sur le Cerf-volant, 7 jusqu'à 12. — Idem, la force avec laquelle la ficelle est tendue, 13 jusqu'à 26. — Idem, la hauteur verticale que prendra le Cerf-volant, 27 jusqu'à 40. — Que cette hauteur est exprimée par la différence des tensions aux deux extrémités de la ficelle, 30. — Cas où le Cerf-volant demeure horizontal, 31 - 35 & 36. — Cas où il devient vertical, 34. — Déterminer le cas de la plus grande hauteur, 37 jusqu'à 40. — Trouver la valeur de l'horizontale dans différents cas, 41 jusqu'à 46. — Réduire les formules à un cas facile pour la pratique, & application, 47 jusqu'à 59. — Réduire les formules au cas considéré par Albert Euler, 60 jusqu'à 69. — Théorie des Cerfs-volants, suivant l'ancien système des résistances, & absurdités qui découlent de ce système, 70 jusqu'à 92.

CHAINETTE, son équation, App. I, 41.

CHAPPE. V. Poulie.

CHOC. V. Percussion.

COIN, 414, 458, jusqu'à 477. Que cette machine sépare les corps quoique les forces qui les unissent soient plus grandes que celles qui agissent sur le coin, 459. — Se réduit au Plan incliné, 460 & 461. V. Plan incliné. Coin s'emploie à diviser les corps, & ce qui arrive dans ce cas, 462, 465. — Trouver la puissance nécessaire pour mettre le Coin en mouvement, & diviser les corps, 466. — Idem, pour le Coin isocèle, 470. — Rapport donné par tous les Auteurs pour les forces qui exercent le coin, n'est vrai qu'en supposant le frottement nul ; & le point fur lequel se fait la rotation des parties à une distance infinie, 467, 468. — Erreur qui en résulte dans les autres cas, 469. — Que cette puissance peut être beaucoup moindre suivant notre théorie que suivant celle des Auteurs qui nous ont précédés, 471. — Cas où le coin retourne en arrière, la puissance cessant d'agir, 472, 473. — Que cette circonstance ne dépend pas seulement de l'angle du coin, 474.

COMÈTE. V. Cerf-volant.

COMPOSITION DU MOUVEMENT. V. Mouvement.

CONSERVATION DES FORCES VIVES, 274 (Note). V. Forces vives.

CONSERVATION DU MOUVEMENT. V. Mouvement.

CONOÏDE parabolique est la figure du levier également résistant, 216, 217. V. Levier.

CORDS, théorie de leur rupture, & exemple 318.

CORPS, pénétré dans leur état de mouvement uniforme, suivant la direction qu'on leur a imprimée, à moins qu'ils n'en soient détournés, 16. — Un Corps peut être considéré comme un système de corps infiniment petits, 114.

CORPS PESANTS, parcourent, en tombant dans le voisinage de la surface de la terre, des espaces qui sont entre eux comme les carrés des temps, 44. — Idem, parcourent des espaces égaux en temps égaux, 47. — Idem, parcourent à-peu-près 16 pieds anglais dans la première seconde de leur chute, (Note) 51, 373. — Font leur chute dans le même temps, en tombant par la cycloïde, quelle que soit la hauteur de leur chute, 367.

CORPS, sont impénétrables, 233.

CORPS DURS. — Que leur existence répugne à la loi de la continuité qui s'observe dans la nature, 236. — Qu'on ne

peut cependant gueres se refuser à admettre la dureté absolue des atomes primitifs, 236.

CORPS DURS ET TENACES, n'ont pas leur impression de la même figure que le corps choquant, 232.

CORPS ELASTIQUES. Qu'il n'y a point de corps, à l'exception des atomes primitifs, qui ne soit élastique, 230.

CORPS FRAGILES, 241.

CORPS-MOUS comme l'huile, le suif, interposés entre les corps, diminuent le frottement, & pourquoi, 599.

CORPS ABSOLUMENT MOUS, n'existent absolument pas, 249.

CORPS TENACES, 240.

COUTEAU, 407. V. Frottement.

CYCLOÏDE, la génération & les principales propriétés, 365 (Note). — Temps de la chute des corps graves par la cycloïde, 365, 366. — Arc de cycloïde double de la corde correspondante du cercle générateur, 365 (Note). — De quelque hauteur qu'un corps tombe par la cycloïde, le temps de sa chute est toujours le même, 367. — Espace que parcourt un corps, en tombant librement pendant le temps qu'un autre corps tombe par la cycloïde.

CYCLOÏDE. V. Pendules.

CYCLOÏDE. V. Lames.

DÉCOMPOSITION du mouvement & des forces. V. Mouvement, Fluide, Moment.

DENIVELLATION. V. Force, Réfistance, Moment, Stabilité.

DENSITÉ, uniforme, inégale, 12. — Densités sont entre elles comme les gravités, 49. — S'expriment par le poids d'un pied cubique de la matière dont les corps sont composés, 49.

DESCARTES distingue, avant Huygens, les deux centres d'oscillation & de percussion, 350 (Note).

DIRECTION. V. Mouvement.

DURETÉ. V. Percussion. Que la dureté ne doit pas être confondue avec la densité; qu'elle peut cependant en dépendre, mais qu'elle dépend aussi de la cohésion des parties, 239. — Qu'elle peut varier dans le choc des corps, 252.

EGROU, V. Vis.

ELASTICITÉ, réside dans toutes les particules de matière, à moins que quelques-unes ne se rompent, & ne se séparent, 242. — Qu'elle agit dans tous les instants du choc, qu'elle fait partie de la force de percussion, & est même identique avec elle, 242. — Sa distinction en Élasticité parfaite & imparfaite, 245. — Qu'elle augmente à mesure que l'impression devient plus grande; & est la plus grande qu'il est possible lorsque l'impression a acquis toute sa grandeur, 243. — Que c'est dans cet état que réside toute la force d'Élasticité, 242.

ELEMENT d'un arc de cercle exprimé par son sinus, 324 (Note). — Idem, par son sinus versé, 365 (Note). — Idem, par la tangente, 792 (Note).

ESPACE parcouru. V. Mouvements. Centre de gravité, Centre de masse, &c. Percussion, Frottement. — Espace peut être parcouru en ligne droite, ou en ligne courbe, 9. — Sa distinction en Espace absolu & en Espace relatif; & expression de ces Espaces, 10. — Parcourus uniformément par un corps, font entre eux comme les vitesses, 23. — Parcourus en temps égaux, sont comme les vitesses, 24. — Sont en raison composée des vitesses & des temps, 25. — Formules de l'Espace parcouru depuis le premier instant du mouvement, 35, 41. — Pour le cas où la puissance est constante, 36, 42. — La course commençant depuis le repos, & la puissance étant constante, les Espaces sont comme les quarrés des temps,

& réciproquement, 37; ou comme les quarrés des vitesses acquises, 43. — Espaces parcourus depuis le commencement du mouvement, sont en raison composée des temps & des vitesses acquises, 38. — N'est que la moitié de celui que parcourroit un corps qui se mouvroit uniformément pendant le même temps avec la vitesse acquise, 39. — Cas où l'Espace parcouru d'un mouvement accéléré qui commence du repos, est égal à celui qui est parcouru d'un mouvement retardé qui arrive au repos, 40. — Espace parcouru par les corps graves, 46, 50, 52, 53. — Idem, pendant la première seconde de leur chute. — sur le bord de la mer, en Espagne, sous l'Equateur, sous le Pole, & en différents endroits du globe, 373 (Note).

EULER (Albert), la théorie des Cerfs-volants, Appendice L, pag. 372 & suiv.

EULER (Léonard) emploie le premier l'expression Moment d'inertie, 334. — Dit que la force vive n'est autre chose que la force de percussion, 245. — Donne une théorie du frottement; & que les difficultés auxquelles elle est sujette, n'ont point lieu dans la nôtre. Que les expériences qu'il rapporte sur l'accélération du mouvement des corps qui coulent sur des plans inclinés, s'accordent parfaitement avec notre théorie, 422 (Note). — Sa théorie de la résistance des fluides; imperfections de cette théorie reconnues par l'Auteur même; & sa comparaison avec la nôtre, 594. — N'a considéré la stabilité des corps flottants qu'en les supposant en repos; & différence qui en résulte, 848. — Néglige de considérer les résistances, dans la rotation des corps sur les fluides; erreur qui en résulte, 931.

FIBRE. V. Levier.

FILLET. V. Vis.

FLUIDE, 542 jusqu'à 946. V. Force, Réfistance, Moment, Rotation, Inclinaison, Stabilité. La force que souffre chaque particule d'un Fluide en repos, est toujours la même dans quelque direction que ce soit; & est égale au poids de la colonne verticale du Fluide qui est au-dessus d'elle, 543, 545. — Idem, pour la force qui la comprime en vertu de la gravité, 544. — La masse d'un Fluide, étant en repos, la superficie est horizontale, & réciproquement, 547, 548, 549. — La hauteur de la superficie de différents Fluides qui se communiquent, au-dessus des orifices, est en raison inverse des densités des Fluides, 551.

FORCE. V. Réfistance, Frottement. — Force innée, d'inertie, ou d'inaction. Que le nom d'inertie ne convient pas dans tous les cas, 14. — Force de percussion, 235. V. Percussion. — Forces vives & mortes, 246. — Que la question des Forces vives & mortes est une question de nom; que leur considération est inutile; que la Force de percussion suffit pour expliquer tous les phénomènes que le choc présente, 246. — Que la Force vive agit comme la Force de pression, 246. — Force qui exerce les fluides en repos, 542 jusqu'à 562. — Force que souffre une différencio-différentielle de la surface qui renferme un fluide, est perpendiculaire à cette surface, 552. — Est égale au poids d'une colonne verticale du même fluide, dont la base est cette différencio-différentielle, & dont la hauteur est celle du fluide au-dessus d'elle, 553. — Expression de cette Force, 554. — Sa décomposition en deux autres, l'une verticale, & l'autre horizontale, & leurs expressions, 555. — Rapport de la force horizontale à la verticale, 556. — Autre expression de la Force horizontale, 557. — Sa décomposition en deux autres Forces aussi horizontales, & leur rapport, 558. — Autre expression de la Force verti-

cale, 559. — Que la somme des *Forces* horizontales qui agissent sur un corps submergé dans un fluide en repos, est zéro, 560. — Que la somme des *Forces* verticales est égale au poids du volume de fluide dont le corps occupe la place, 561. — Que pour qu'un corps submergé dans un fluide en repos soit sans mouvement vertical, il faut que son poids soit égal à celui du volume de fluide qu'il déplace, & que de plus la verticale qui passe par le centre du volume déplacé coïncide avec celle qui passe par le centre de gravité du corps, 562. — La vitesse avec laquelle un fluide, dont la masse est en repos, jaillit par un orifice infiniment petit fait dans la surface qui le renferme, est égale à celle qu'il acquerrait en tombant librement de la hauteur verticale du fluide au-dessus de l'orifice, 563. — Qu'une particule du fluide prend la même vitesse suivant une direction quelconque, 564. — Que les fluides prennent réellement une vitesse moindre que celle qu'indique la théorie, & pourquoi, 565. — Rapport entre la *Force* qui agit sur une différencio-différentielle, & la vitesse avec laquelle le fluide jaillirait par elle, 566. — Trouver l'effort que supporte cette différencio-différentielle, 567. — Expression de la *Force* perpendiculaire qu'éprouve une différencio-différentielle de surface qui se meut dans un fluide, dans une direction qui lui soit perpendiculaire, 568, 569. — Pour le cas où la surface se meut dans une autre direction, 570. — Expression de la *Résistance* que la différencio-différentielle éprouve dans une direction quelconque, 571, 574, 576, 581, 587. — *Idem*, lorsque la surface est en repos, & que c'est le fluide qui se meut, 589. — *Idem*, lorsque la surface & le fluide sont en mouvement, 592. — *Idem*, suivant la direction du mouvement, 572, 587. — *Idem*, lorsque c'est ce fluide qui se meut, 589. — *Idem*, de la *Résistance* horizontale, 577, 587. — *Idem*, lorsque c'est le fluide qui se meut, 589. — Rapport de cette dernière *Résistance* avec celle dans une direction quelconque, 578, 579. — De la *Résistance* verticale, 580, 582, 587. — *Idem*, lorsque c'est le fluide qui se meut, 589. — *Résistance* horizontale quand le mouvement est aussi horizontal, 586. — Lorsque c'est le fluide qui se meut, 589. — *Résistance* verticale quand le mouvement est aussi vertical, 586. — *Idem*, lorsque c'est le fluide qui se meut, 589. — Expression générale du sinus de l'angle que forme la direction du mouvement avec la surface, 573. — *Idem*, pour le cas où il s'agit de la *Résistance* suivant la direction du mouvement, 583. — *Idem*, dans le cas où le mouvement est horizontal, 584. — Où le mouvement est vertical, 585. — Lorsqu'un fluide se meut en vertu de la gravité, & prend une vitesse constante, une partie de l'action de ses particules est détruite par une force quelconque, 583. — Que ce n'est pas la même chose de supposer le fluide en mouvement, ou la surface, à moins que le fluide ne se meuve horizontalement, 589, 592. — Que la théorie de la percussion des corps solides ne peut s'appliquer aux fluides, ou du moins qu'on n'en peut déduire une connaissance parfaite de leur action, 593. — Doutes qui se présentent sur l'action qu'éprouvent les surfaces mues dans les fluides; examen de ce qu'ont produit jusqu'ici les plus célèbres Géomètres, & erreurs dans lesquelles ils sont tombés, 593. — Que la *Résistance* augmente à proportion que la surface est plus profondément enfoncée dans le fluide, 593. — Qu'il n'est pas possible que cette *Force* soit simplement comme une fonction de la vitesse, 593. — Qu'on n'a rien déduit de satisfaisant des expériences faites en petit, avec différentes machines, 593. — *Dénivellation* qui a lieu dans la superficie d'un fluide par le mouvement d'une surface dans ce fluide, 594. — *Force* dont les

différentielles des surfaces supportent l'effort dans les dénivellations, 595. — Que la partie dénivellée du fluide prend la figure d'une parabole du premier genre, 597. — Réduction des *Forces* dans une direction quelconque à celle des *Forces* horizontales, & réciproquement, 599. — Trouver la *Force* horizontale qui agit sur une surface plane dont l'extrémité supérieure sort du fluide, en ayant égard à la dénivellation, 600. — Cas où l'on peut négliger la dénivellation, 601. — *Idem*, sur la surface choquante, lorsqu'elle sort du fluide, d'une quantité moindre que la hauteur de la dénivellation, 602. — *Idem*, lorsque c'est le fluide qui se meut, 603. — Lorsque l'extrémité supérieure de la surface coïncide avec la superficie du fluide, 604, 612. — *Idem*, lorsqu'elle est à une hauteur égale ou plus grande que celle de la dénivellation, 605. — Singularité que présentent ces formules, 606 (*Note*). — Trouver la même *Force*, & dans les memes cas pour la surface choquée, 607, 608, 609. — Réflexions sur un cas particulier de l'application de ces formules, 607. — Trouver la *Force* horizontale, lorsque l'extrémité supérieure est submergée dans le fluide, 611. — Réduire la *Force* horizontale à celles qui agissent dans une direction quelconque, tant pour la surface choquante que pour la surface choquée, 613. — Autre transformation des memes *Forces*, 613, 614. — *Idem*, pour le cas où la surface plane est horizontale, 615. — Trouver la *Force* verticale qui agit sur une surface plane qui se meut dans un fluide, 616, 621. — Transformation de ces expressions, 617. — Pour le cas où la surface est horizontale, 618. — *Idem*, pour le cas où c'est la surface qui se meut, 619. — Où c'est le fluide qui se meut, 620. — Qu'il est bien différent que ce soit la surface qui se meut, ou le fluide, 622.

FORCES avec lesquelles les fluides en mouvement agissent contre des surfaces quelconques, 624 jusqu'à 637. — Trouver la *Force* horizontale qui agit sur une surface quelconque qui se meut dans un fluide, 624. — *Idem*, pour la dénivellation, 625. — Réduction de l'expression en série, 626. — Ce que devient cette formule dans le cas où la surface est submergée à une grande profondeur, 627, 631. — Qu'on peut s'en tenir, à très-peu près, à cette expression, même pour les quadrilatères contigus à la superficie du fluide, 618, 630. — 631. — Véritable expression de la *Force* pour ce cas extrême, 629. — Trouver la *Force* horizontale qu'éprouve la surface d'un corps formé par la révolution d'une ligne droite, ou courbée, autour d'un axe, le corps se mouvant dans la direction de cet axe, & parallèlement à l'horizon, 632. — Cas où cette surface se réduit à un plan circulaire, 633. — *Idem*, pour la surface d'un cylindre qui se meut horizontalement & perpendiculairement à son axe, 634. — *Force* verticale qui agit sur une surface quelconque, 635. — Réduction de la formule en série, 636. — *Force* verticale qui agit sur la surface d'un cylindre qui se meut horizontalement & perpendiculairement à son axe, 637.

FROTTEMENT, & altérations qu'il produit dans le mouvement des corps posés sur des surfaces, 382 jusqu'à 422. — V. Plan incliné, Coin, Vis, Treuil, Poulie & Moufle. Obstacle formé par la force perpendiculaire, doit être vaincu par la force parallèle, 383. — Aspérités dont la surface des corps est hérissée, 383. — Impreissions réciproques, 383. — Que la résistance du *Frottement* ne diffère en rien de la force de percussion, 382. — Distinction de deux cas dans le *Frottement*, 383. — Trouver la force réunie de l'obstacle & des aspérités; & plus grande valeur de cette force, 384, 385. — *Idem*, pour le cas où l'action provient de deux autres, l'une perpendiculaire, & l'autre parallèle au plan, 398. — *Résistance*

sistance du *Frottement* demeure constante tant que l'amplitude de l'obstacle & des aspérités ne varie point, 386.— Force de percussion qui peut produire une puissance qui agit sur un corps parallèlement au plan, 387.— Cette force étant moindre que celle du *Frottement*, le corps se meut en avant & en arrière par des oscillations répétées, & parvient enfin au repos. Dans le cas contraire, le corps se meut sans discontinuer, 388.— *Idem*, lorsque cette force est plus grande que celle du *Frottement*, 389.— Cas où le *Frottement* est vaincu, & que le corps est fur le point de se mouvoir, 390, 399.— Que la puissance qui presse le corps perpendiculairement, est à celle qui surmonte le *Frottement*, comme l'amplitude de l'impression est à celle de l'obstacle & des aspérités, 392, 394, 400.— Ce que devient ce rapport pour les corps très-lisses, 395.— Application de cette théorie, 397.— La puissance qui surmonte le *Frottement* est d'autant moindre que le nombre & la grandeur des aspérités sont plus grands, 393.— Que le nombre des aspérités peut être supposé proportionnel à l'amplitude de l'impression, sur tout dans les corps qui ne sont pas très-élastiques, 394.— *Frottement* devient d'autant moindre que l'impression a plus de longueur, 395.— Corps mous comme l'huile, le lait, &c. interposés entre deux corps diminuent le *Frottement*; & pour quoi, 397.— *Frottement* diminué lorsque la vitesse perpendiculaire au plan est zéro, 401.— Cas où le *Frottement* est surmonté par la seule action de la vitesse parallèle primitive, 402.— Condition essentielle pour que le *Frottement* soit vaincu, & que le corps commence à se mouvoir, 403, 406.— Cas où le plan est horizontal, & que la puissance est la gravité, 404.— *Frottement* surmonté avec une vitesse primitive très-petite dans les corps durs, 405.— Que les expériences d'Amontons & de Hsinger peuvent se concilier avec notre théorie du *Frottement*, & qu'elle est même confirmée par elles, 407.— Couteau se meut plus facilement suivant la direction de son tranchant que perpendiculairement au plan de sa lame, & pour quoi, 407 (Note).

FROTTEMENT vaincu, & effets qui en résultent, 408 jusqu'à 423.— Trouver la relation entre l'espace parcouru & la vitesse en ayant égard au *Frottement*, 408, 413.— *Idem*, pour le cas où il n'y a qu'une seule puissance, 409.— Lorsque la profondeur de l'impression dans le corps est nulle à l'égard de celle qui existe dans le plan, 410.— Condition pour que le corps s'arrête, 411, 412.— Pour le cas où l'impression dans le corps a acquis la plus grande profondeur, 414. (Note).— Rapport entre l'espace parcouru sur un plan par un corps, & la durée de son mouvement, en ayant égard au *Frottement*, 415 (Note), 417.— Temps dans lequel le corps parcourt le plus grand espace possible sur un plan, en ayant égard au *Frottement*, 416, 419.— Relation entre la vitesse d'un corps qui se meut sur un plan, & le temps du mouvement, en tenant compte du *Frottement*, 418, 420 (Note).— Le corps descendant le long du plan par la seule action de la gravité; comparaison de notre théorie avec l'expérience, & son accord parfait avec elle, 420, 421.— *FROTTEMENT dans les machines simples*, 423 jusqu'à 541. V. Plan incliné, Coin, Vis, Treuil, Poulie, Moufs.— *Frottement nul dans le levier*.

GRAVESANDS, ses expériences de la chute des corps sur de l'argille; qu'elles confirment notre théorie de la percussion, (Note), 291, 293, 294.

GRAVITE est une force constante, 45.— Formules de la vitesse des corps graves, & de l'espace qu'ils parcourent, 46,

50, 52, 53.— Les *Gravités* sont entre elles comme les mailles, 48.— Rapport de la force de gravité à celle de percussion, 313, 314.

GYRATOIRE (Angle) 128.

HACHE. Déterminer l'effet de la Hache. Que cet effet est proportionnel au produit de la masse de la Hache, par le carré de la vitesse qu'on lui imprime, 476, 477.

HYPOMOCHLION, V. Levier.

IMPRESSIONS, V. Percussion, Frottement.— Profondeur de l'Impression, 247.— Amplitude de l'Impression, 247.— Corps durs & tenaces n'ont pas leur Impression de la même figure que le corps choquant, 232.

INCLINAISON. De l'inclinaison que prennent les corps flottants, lorsqu'ils sont poussés par une ou par plusieurs puissances, 873 jusqu'à 911. V. Stabilité.— Trouver l'Inclinaison que prennent les corps flottants, lorsqu'ils sont poussés par une ou par plusieurs puissances, 873.— Trouver le moment avec lequel agit un poids qu'on ajoute à un corps flottant, 874.— *Idem*, pour plusieurs poids ajoutés, 876.— *Idem*, dans le cas où l'on retranche un poids, 877.— Où l'on fait le retranchement du poids dans la partie opposée à l'axe, 878.— Où le poids retranché se transporte au côté opposé, 879.— L'Inclinaison étant infiniment petite, le moment est égal au produit du poids, par la distance à laquelle on l'aurait transporté, 880.— Si l'on place le poids au-dessous du plan horizontal qui coïncide avec l'axe, 881.— Que tout poids placé au-dessous du centre de gravité, dans le plan qui passe par l'axe, & par les centres de gravité & de grandeur, résiste à l'Inclinaison, 882.— Si l'on retranche du poids, cela augmente l'Inclinaison, 883.— Trouver l'Inclinaison que prendra un parallépipède rectangle flottant sur un fluide auquel on ajoute un nouveau poids, 884 (Note).— Cas où le parallépipède ne peut prendre qu'une seule disposition, 885.— Où il peut prendre trois Inclinaisons distinctes, 886.— Des limites des moments positifs & négatifs, 887.— Que les moments sont négatifs avant que le parallépipède s'établisse dans la situation correspondante à la première racine de l'équation, 888.— Qu'il doit s'incliner jusqu'à la situation qui répond à la première racine, & ne peut passer à celle qui répond à la seconde, sans l'action d'une force étrangère, 889.

— Qu'ayant été tiré de la situation correspondante à la seconde, il ne peut s'y rétablir, 890.— Que la stabilité consiste en ce qu'aucune force ne puisse le tirer de la situation qui répond à la seconde racine, 891.— Cas où le parallépipède doit se maintenir droit, à moins que quelque force étrangère ne surmonte les moments qui se manifestent dans l'Inclinaison, 892.— De la restriction qu'on doit faire à la règle de M. Bouguer sur ce que la stabilité est en raison inverse de la profondeur qu'aurait le parallépipède dans le fluide, 894.— Trouver l'inclinaison que prendra le même parallépipède, lorsque quelqu'un des angles de la base sortira du fluide, 895.— Que dans ce cas les moments qu'éprouve la base ne sont pas les mêmes que dans le précédent, 896.— Exemple de ce cas, où l'on fait voir que le parallépipède peut prendre une Inclinaison de plus de 88°, malgré qu'il soit peu enfoncé dans le fluide, 898.— Trouver l'Inclinaison que prendra un corps quelconque auquel on ajoute un nouveau poids, 899.— Cas où l'Inclinaison est infiniment petite, 900.— Pour les corps formés par la révolution d'une ligne quelconque autour de l'axe horizontal de rotation, 901, 902.— Que les moments sont toujours positifs depuis l'Inclinaison correspondante à la première racine, 903.— Trouver

Ecc

L'Inclinaison que prendra un corps quelconque poussé par une puissance horizontale, 923 (Note). — *Idem*, pour un cylindre, 906. — Solution pour le cas où la vitesse du cylindre est nulle, ou qu'il ne peut prendre qu'un mouvement de rotation, 907. — Rapport des tangentes des Inclinaisons, dans le cas où le cylindre est libre, & dans le cas où il tourne sur un axe fixe, 908. — Que les moments du cylindre ont lieu pour tous les solides de révolution, 909. — Restriction pour les corps qui ne sont pas formés par la révolution d'une ligne autour d'un axe, 910. — Autre expression du sinus de l'Inclinaison, 911.

INTERSTICES, V. Pores.

LAMES (vitesse des) 816. — Que leur figure est celle d'une cycloïde, 817. — Des lames qui vont en croissant, & de celles qui vont en diminuant, 818. — Cas où notre théorie convient avec celle de *Newton*, 819.

LEIBNITZ. Que ce Savant appelle force vive la force de percussion, & la force de pression il l'appelle force morte, 246.

LEVIER, 196 *jusq.* 219, & 424, 425. — Sa distinction en trois especes, 197. — Angle de rotation dans les *Leviens*, 198, 199. **V. Rotation**. — Conséquences relatives à la longueur des perpendiculaires abaissées du point d'appui sur les directions des puissances, 200. — Qu'il convient que la puissance soit perpendiculaire à la longueur du *Levier*, 201. — Que le *Levier* ait le moins de densité possible, 202. — Cas où le *Levier* est en équilibre, 203. — La même chose pour un nombre quelconque de puissances, 204. — Expression de la puissance qui agit dans le *Levier*, 205. — Action qu'éprouve le *Levier* est en raison composée de la somme des moments d'inertie & de la différentielle de la vitesse, 206, 207, 210. — Un *Levier* étant fixé par un de ses points, ses fibres supportent toute l'action, 208. — Expression de l'intensité de la force des fibres, 208 (Note), 210, 212. — Que c'est la même chose lorsque le *Levier* tourne autour d'un point, 209. — Cas où le *Levier* résistera à l'action des puissances, & cas où il se rompra, 211. — Relation de l'intensité de la force des fibres dans deux *Leviens* différents, 213. — Relation des puissances dans les *Leviens* d'une même matière peuvent supporter l'action, 214. — Que les dimensions linéaires d'un *Levier* homogène également résistant dans toutes ses sections, doivent être entre elles comme les racines cubiques de leur distance à la direction de la puissance, 205 (Note). — Ce *Levier* doit avoir la forme d'un cône parabolique du second genre, 216 (Note). — *Idem*, lorsque plusieurs puissances distribuées sur le *Levier* agissent pour en opérer la rupture, mais le cône; quoique du second genre, est d'une espèce différente, 217 (Note). — L'axe de rotation étant plus éloigné de celui qui divise la base en deux parties égales, le *Levier* sera capable d'une plus grande résistance, 218. — Que c'est à l'expérience à faire connaître si les fibres résistent autant à leur compression qu'à leur dilatation, 219.

LIEU DES CORPS, I. — Absolu, relatif, 2.

LOI DE CONTINUEU, 234.

MACHINES, 423. — Leur distinction en machines simples, & composées, 424.

MARIOTTE, ses expériences sur la résistance des fluides, bien éloignées des nôtres; erreur des expériences de cet Auteur, 644.

MASSÉ, II. — Supposée infiniment petite, ou réunie en un point, 82.

MERCURE, plus dense que l'argent, & n'est pas *dur*, 239.

MÉTACENTRE, 894.

MOMENTS des puissances, 132. — *Idem*, des masses, ou des gravités, 133. — *Moments* d'inertie, 134, 168 (Note). — Formule de la somme des *Moments* d'inertie à l'égard d'un axe quelconque, 179. — A l'égard d'un axe qui passe par le centre de gravité, 177. — Recherche des *Moments* d'inertie, 350 (Note).

MOMENTS, V. Rotation, Inclinaison, Stabilité.

MOMENTS que les corps flottants éprouvent dans leur mouvement progressif horizontal, 820 *jusq.* 872. — Trouver les *Moments* qu'éprouve un corps qui se meut horizontalement dans un fluide, 820, 822. — Qu'ils peuvent être considérés par rapport à trois axes, 821. — *Moments* qui résultent de la dénivellation sont positifs, 823. — Distinction des *Moments* relatifs à un axe horizontal en *Moments* horizontaux & verticaux, 834. — *Idem*, pour ceux à l'égard d'un axe vertical, 825. — Cas où le plan vertical qui coïncide avec l'une des directions, coupe le corps en deux parties égales & semblables, 826. — Trouver les *Moments* à l'égard d'un axe vertical, le corps flottant se mouvant horizontalement dans une direction perpendiculaire au plan vertical qui partage le corps en deux parties égales & semblables, 872. — *Idem*, pour les deux dénivellations, 828.

MOMENTS qui agissent sur les corps qui tournent librement dans des fluides autour d'un axe, quelconque qui passe par leur centre de gravité, 912 *jusq.* à 925. — Trouver ces *Moments* pour un corps quelconque, 912, 915. — Ceux produits par les deux dénivellations, 913, 916. — Pour le cas où les moitiés du corps sont égales & semblables, 914, 917. — Cas où l'on exprimerait les surfaces du corps par une équation, 918. — Où les deux moitiés du corps sont égales & semblables, 919. — A quelle quantité les *Moments* sont proportionnels, 920. — Cas où les *Moments* sont égaux à zéro, 921. — Décomposer les *Moments* en horizontaux & verticaux, lorsque les moitiés du corps sont égales & semblables, 922. — Réduire les *Moments* qui agissent sur un corps dont les moitiés sont égales & semblables, & qui tournent sur un axe vertical, à deux *Moments* horizontaux perpendiculaires entre eux, 923. — Trouver les *Moments* qui agissent sur un cylindre qui flotte horizontalement, & qui tourne sur un axe parallèle à ses côtés & passe par le centre de gravité, 926. — Qu'on peut négliger le *Moment* de la dénivellation, 927. — Que tous les *Moments* s'évanouissent, lorsque le centre de gravité coïncide avec l'axe, 923.

MOUTESSE, 531. Trouver la relation entre la puissance agissante & la puissance résistante dans les *Moutesses*, 533, 534, 535 (Note). — 539 & 540. — Qu'il est avantageux dans les *Moutesses* que le mouvement soit le plus petit qu'il est possible, ainsi que le rayon de l'axe, & qu'à son contraire, le rayon du poutrel soit le plus grand qu'il est possible, eu égard aux circonstances, 535. — Développement, 536 (Note). — Qu'il est avantageux d'arranger les *Moutesses* de manière que la puissance à vaincre soit appliquée à la *Moutesse*, qui a le plus de poulies, ou à laquelle aboutit un plus grand nombre de cordons, 538. — Comparaison de la théorie ordinaire avec la nôtre, & différence entre les résultats, 540. — Qu'on pourroit facilement introduire dans le calcul le poids des cordes & des *Moutesses*, 541.

MOUVEMENT (définitions, axiomes & principes du). — *I. jusq.* 55. — *Mouvements*, 3. — Absolu, relatif, 4. — *Mouvement* absolu peut être un repos relatif, 41, 76. — Sa direction, 5. — *Mouvement* uniforme, accéléré, *retardé*, 8. **V. Espace, Temps, Vitesse.** — Que la quantité du *Mouvement* est

le produit de la masse par la vitesse, 15. — Que la différentielle du *Mouvement* est toujours proportionnelle au produit de la puissance dont elle est l'effet par le temps qu'a duré son action, 18. — Qu'on peut évaluer ces deux quantités, 20. — Doutes que quelques Auteurs élèvent contre cette proportionnalité, 21. — Fondement de ces doutes, 21. — Examen de ce *Sujet*, 268. — Que la discussion de cet objet est inutile dans la mécanique, 21. — *Mouvement* accéléré ou retardé, peut être regardé comme uniforme pendant un instant, 29.

MOUVEMENT composé, 55 *jusq.* 79. — *Mouvement* d'un corps dans une direction, n'est pas altéré par l'action des puissances qui agiroient sur lui dans d'autres directions, 56. — Deux puissances qui agissent en même temps sur un corps, chacune suivant une direction particulière, lui font prendre une direction moyenne. Équation de la ligne qui exprime cette direction, 57. — Le corps parcourt uniformément une ligne droite, si les *Mouvements* composants sont uniformes & rectilignes. Que le corps parcourt une parabole, si l'un des *mouvements* composants est produit par une force accélératrice constante; équation de cette parabole, & développement du calcul, 59 (Note). — Conséquence, 60. — Que la direction du *mouvement* composé est toujours dans le même plan que celle des *Mouvements* composants, 61. — Le corps étant animé en même temps par trois puissances, prend une direction moyenne; équation de la ligne qui marque cette direction, & manière de trouver la direction composée, 62. — Les trois puissances étant dans un même plan, la direction résultante y est aussi, 63. — *Idem*, pour un plus grand nombre de puissances, 64. — Différentielle de l'espace parcouru en vertu de l'action simultanée de deux puissances qui agissent dans des directions quelconques, 65. — Cas où les deux directions concourent ensemble, 67. — Où les puissances sont égales, 68, 69. — Où le corps demeure sans *Mouvement*, 70. — *Idem*, lorsque le nombre des puissances est plus considérable, 71. — Décomposition du *Mouvement*, 72. — Cas où l'on suppose que l'action procède de deux autres, suivant des directions quelconques; & rapport de ces trois puissances, 73, 75. — Leur valeur, 74. — Que la décomposition du *Mouvement* est arbitraire, 76. — Cas où l'on suppose que l'action procède de trois puissances; & rapport des quatre puissances, 77. — Que la direction des trois composantes est arbitraire; & manière de trouver leur valeur, 78. — Qu'on peut décomposer une puissance en quatre, cinq, &c. autres puissances, 79. — Que la somme des *Mouvements* des corps est toujours la même après le choc que pendant sa durée & auparavant, 126. — Que cette proposition n'est pas généralement vraie, comme l'ont établi tous les Auteurs, 262. — Examen de la question de la conservation du *Mouvement*, 264.

MOUVEMENT des corps posés sur des surfaces, 351 *jusq.* 381. — Espace que parcourent deux sphères poussées par une puissance, 352. Cas où l'un des sphères est d'une grandeur & d'une masse infinie, 353 354. — *Idem*, pour une sphère posée sur un plan, 354 355. — Puissance qui anime une sphère posée sur une surface courbe parallèlement à la tangente dans tous les points de cette surface, 356. — Vitesse acquise par une sphère dans un point quelconque d'une surface, 357. — La puissance étant constante, 358, 359. — Vitesse que les corps graves acquièrent en tombant le long des surfaces, ne dépend point de l'inclinaison de ces surfaces à l'égard de l'horizon, mais seulement de la hauteur d'où les corps tombent, 358, 360. — Vitesse acquise par une sphère qui tombe le long d'un plan, excède la vitesse initiale, & la différence est en raison composée du temps & du sinus de l'angle que forme le plan avec l'horizon,

361. — Espaces parcourus par un corps grave qui tombe depuis le repos le long d'un plan incliné, sont en raison composée du carré des temps & du sinus de l'angle que forme le plan avec l'horizon, 362. — Expression du temps de la chute des corps sur des plans, ou sur des surfaces courbes, 363. — Les chûtes se faisant librement, 364. — Temps de la chute des corps graves par la cycloïde, 365. V. *Cycloïde*. — Trouver les puissances perpendiculaires & parallèles à la tangente qui agissent sur un corps quelconque posé sur une surface, 374. — Puissance parallèle à la tangente la même pour tous les corps, 375.

MOUVEMENT progressif des corps flottants, 792 *jusq.* à 819. — Trouver la relation entre le temps & la vitesse qu'acquiert un corps flottant poussé par une puissance horizontale, placée au centre des résistances, & ce centre coïncidant avec celui de gravité, 792 (Note). — Cas où la vitesse va en diminuant, 793. — Que l'équation doit avoir deux racines imaginaires, 792 (Note). & 806. — Cas où la puissance est zéro, 794. — Où le corps a acquis la plus grande ou la moindre vitesse, 795. — Qu'il lui faut un temps infini pour l'acquies, 796, 799. — Que pendant il l'acquies presque toute dans un temps très-court, 808. — Cas où les moitiés du corps sont égales & semblables, & qu'on peut négliger la dénivellation, 797. — Plus grande ou moindre vitesse dans ces cas, 798, 802, & Note, sur une méprise de l'Auteur. — Que cette vitesse est plus grande qu'en ayant égard à la dénivellation, 803. — Ces deux vitesses sont égales, ou celle qui a lieu, en ayant égard à la dénivellation, excède celle dans le cas où on la néglige, lorsque la partie choquante du corps est aiguë à l'égard de la choquée, 804. — Différence entre ces deux vitesses, 805. — Vitesse à un instant quelconque du mouvement du corps dans le cas de la vitesse croissante, 800. — *Idem*, dans le cas de la vitesse décroissante, 801. — Qu'il faudroit, pour que cette théorie fût vraie; que le centre de gravité suivit les variations du centre des résistances, ce qui est impossible; mais que la différence est négligeable, lorsque les résistances ne sont pas excessives, & que l'inclinaison n'est pas considérable, 807. — Trouver la relation entre la vitesse & l'espace que parcourt un corps flottant poussé par une puissance horizontale placée au centre des résistances, ce centre coïncidant avec celui de gravité, 809. — Qu'il ne peut acquies la plus grande ou la moindre vitesse qu'après avoir parcouru un espace infini, 811. — Cas où le corps a ses moitiés égales & semblables, & qu'on peut négliger la dénivellation, 812. — Où la marche du corps commence du repos, 813. — Expression de l'espace parcouru lorsque le corps acquies une vitesse moindre que la plus grande d'un centième, 814. — Espace parcouru est en raison directe de la puissance, & en raison inverse doublée de la constante qui multiplie les résistances, 815.

NEWTON avertit que le nom de force d'inertie ne convient pas dans tous les cas, 14. — Examine les conséquences qui suivent de ce que les résistances des fluides sont comme les simples vitesses, ou comme le carré des vitesses; ses expériences en faisant osciller des pendules dans des fluides; que ces expériences prouvent plutôt que les résistances suivent la raison des simples vitesses que celle de leurs carrés, &c. 593. — Erreur dans laquelle il est tombé en cherchant le poids que supporte une surface plane horizontale, lorsque le fluide tombe verticalement sur elle, 623. — Cas où la théorie de la vitesse des lames convient avec la nôtre, 819.

OBSTACLE. V. *Frottement*.

On est plus dense que l'acier, & est moins dur, 239. — Battu avec le marteau devient plus dur, & en même temps plus dense, 239.

OSCILLATION, 183. V. Centre, Pendule.

PALAN, 531. V. Mousfle.

PAS de la vis, 480. V. Vis.

PENDULE, 182 jusqu'à 195. Pendule simple, 182 — composé, 186. — Angle de rotation, du Pendule simple, 184. V. Rotation. — Pour le cas où la gravité seule agit, 185. — Idem, pour le Pendule composé, 187. — Longueur du Pendule simple isochrone au Pendule composé, 188, 189, 193. — Pour le cas où les corps sont dans une même ligne droite, 194. — Que la formule donnée pour générale par tous les Auteurs, ne peut avoir lieu que dans ce cas, 195. — Pendule dont les oscillations sont fort petites, peut être conçue décrire des arcs de cycloïde, 369. — Durée de ses oscillations, 369. V. Cycloïde. — Espace qu'un corps parcourt en tombant librement pendant la durée d'une oscillation du Pendule qui décrit des arcs coïncidants avec ceux d'une cycloïde, 370, 371. — Que les longueurs des Pendules sont entre elles comme le carré des durées des oscillations, 372. — Pendules qui oscillent dans les fluides, 393. — Trouver la longueur d'un Pendule simple isochrone avec les oscillations d'un corps flottant, 934. — Corps flottant oscille comme un Pendule, 936. — Idem, en ayant égard aux résistances, 940. — Temps de la durée d'une oscillation des corps flottants, 937, 938. — Longueur du Pendule simple isochrone avec un cylindre flottant, en ayant égard aux résistances, 940 (Note). — Temps de la durée d'une oscillation, 942.

PERCUSSION, 239 jusqu'à 350. V. Frottement. — Que la nature opère par des mouvements successifs, 234. — Force de Percussion produit un effet beaucoup plus grand que celle de pression, 246. — Est en raison composée de la dureté des corps, & de l'amplitude des impressions, 247 (Note). — Que cela a lieu, quoique les bases des impressions ne soient pas parallèles à leurs amplitudes, pourvu que la dureté ne soit pas changée par cette circonstance, 248, 251. V. Impression. — Qu'il est difficile de déterminer la mesure exacte de la force de l'impulsion, 252. — Relation entre cette force, la dureté des corps, & l'amplitude des impressions, 253. — Ce qui arrive lorsque les particules viennent à se rompre, 254. — Que le corps choquant retourne toujours en arrière, après avoir cessé de se mouvoir dans la direction suivant laquelle le choc s'est exécuté, 254. — Relation entre les impressions & l'espace parcouru dans le temps du choc, 256. — Espace parcouru par le corps choquant pendant le choc, est égal à celui parcouru par le corps choqué, s'ils sont parfaitement élastiques, 257. — Différentielle du temps de la durée du choc, 258. — Les corps marchent avec une même vitesse à l'instant où s'achève la plus grande impression, 259. — Relation entre les vitesses des corps choquant & choqué, 260. — Conséquences, 261. — Vitesse des corps à l'instant de la plus grande impression, 265, 266. — Les corps d'une très-petite élasticité se meuvent, après le choc, avec la vitesse qu'ils ont lors de la plus grande impression, 267. — Rapport entre les différentielles des vitesses & celles des impressions, 269. — Vitesses relatives sont les mêmes avant & après le choc, 270. — Vitesse du corps choquant, 271, 273. — Idem, du choqué, 272, 273. — Somme des produits de chaque masse par le carré de sa vitesse, est la même avant & après le choc, & pendant la durée du choc, 274 (Note). — Que le produit de la dureté par l'amplitude de l'impression, & par la différentielle de l'espace

parcouru par les particules des corps, est le même pour le corps choquant & pour le corps choqué, 275. — Rapports entre les vitesses & les impressions, 276. — Vitesse du corps choquant dans un instant quelconque du choc, 277. — Le corps choqué étant en repos, & d'une masse infinie, 278. — Vitesses positives & négatives du corps choquant sont les mêmes à égale distance du point où se termine la plus grande impression, les corps étant parfaitement élastiques, 279. — La vitesse positive est plus grande que la négative, les corps n'étant pas parfaitement élastiques, 280, 281 (Note). — Idem, qu'il se fait un second choc, 282. — Que l'origine des profondeurs de l'impression est placée plus profondément dans le second choc, 283. — La même chose dans le troisième, quatrième, &c. chocs, 284. — Vitesse du corps choqué, 285. — Valeur de l'impression, la dureté étant constante, 286. — Idem, de la plus grande, 287. — Idem, le corps choqué étant en repos, & d'une masse infinie, 288. — Idem, pour les corps qui tombent librement par la seule action de la gravité, 289. — Idem, lorsque les profondeurs de l'impression sont très-petites à l'égard de la hauteur d'où le corps tombe, 290. — Les impressions sont en raison directe composée des masses & des carrés des vitesses, & en raison inverse des duretés, lorsque les deux corps sont égaux, & ne sont animés par aucune puissance, 291. — Sont sensiblement de la figure du corps choquant dans les corps mous comme l'argile, 294. — Modification lorsque l'amplitude de l'impression est très-grande à l'égard de sa profondeur, 294. — Profondeur de l'impression dans le choc, 295. — Idem, la force de Percussion étant constante, 299. — Idem, de la plus grande, 296, 301. — Le corps choqué étant en repos, & d'une masse infinie, 297, 300. — Impression faite par la simple pression est en raison directe de la puissance, 298. — Cas où l'impression n'a pas de limites, 302. — Le corps choqué étant en repos, & d'une masse infinie, 303. — Valeur de la dureté, 304. — Idem, le corps choqué étant en repos, & d'une masse infinie, 305. — Théorie de la Percussion appliquée aux expériences de *Grav-fande*, pour trouver la dureté du corps choquant, 306 (Note). — Dureté du corps choqué, 307. — Plus grande force de Percussion agit au moment où s'achève l'impression, 308. — Expression de la force de Percussion, 309, 312. — Idem, pour la chute des corps graves, 309. — Pour le cas où le corps choqué est d'une masse infinie, & est en repos, & que la dureté du corps choquant est infinie à l'égard de celle du corps choqué, 312. — Rapport de cette force avec celle de gravité, 313. — Exemple, 314 (Note). — Pour le cas où les duretés sont égales, 315, 316. — Force de Percussion dans le marteau, & exemple frappant de l'accord de cette théorie avec l'expérience, 317. — Qu'on ne doit point être étonné de l'effet prodigieux de la force de Percussion, 317. — Application de cette théorie à la recherche de l'effort des cordes dans les secousses qu'on leur fait éprouver, 318. — Expression de la différentielle du temps de la durée du choc dans différents cas, 313, 320, 321, 322, 324. — Temps de la durée du choc, & développement de l'intégrale, (Note.) 324, 334, 340. — Pour les corps parfaitement élastiques, 326. — Pour ceux qui n'ont que peu ou point d'élasticité, 328. — Pour le cas où les corps ne sont animés par aucune puissance, 329. — Quand l'impression est formée par la seule pression, les corps étant parfaitement élastiques, 331. — Quand la force de Percussion est constante, 341. — Temps dans lequel l'impression va en augmentant, ou en diminuant, à compter du commencement du choc; & égalité de ces deux expressions, à l'instant où s'achève la plus grande impression,

324.— Temps dans lequel se forme la plus grande impression, 325.— Est la moitié de toute la durée du choc dans les corps parfaitement élastiques, 327.— Pour les corps qui n'ont aucune élasticité, lorsqu'ils ne sont animés par aucune puissance, 329., 335.— Quand l'impression est formée par la seule pression, les corps étant parfaitement élastiques, 331.— Lorsque le corps choqué est d'une masse infinie, & est en repos, 338., 339.— Application, lorsque la force de percussion est constante, 342.— *Idem*, le corps choqué étant en repos, & d'une masse infinie, 343.— Temps de la durée du choc ne dépend pas des vitesses primitives avec lesquelles se fait le choc, lorsque les corps ne sont animés par aucune puissance, 325., 330.— Lorsque les corps ne sont animés que par des puissances, ce temps est double de ce qu'il est lorsqu'aucune puissance ne les anime, 332.— Est toujours le même, quelles que soient les puissances, lorsque les corps ne sont animés que par elles, 333.— Temps de la durée du choc est très-court; est presque infiniment petit dans les corps très-durs, 336. Exemples.— Application au cas où les corps agissent par la seule pression, 337.— Trouver le Centre de percussion, 341. V. Centre de percussion.

PLAN DIRECTEUR, 167., 172.

PLAN PRIMITIF, 124.

PLAN DE ROTATION, 140., 164., 172.

PLAN INCLINÉ, 424., 426 jusqu'à 457.— La puissance nécessaire pour faire monter un corps le long d'un plan incliné, doit être plus grande que celle que lui imprime la gravité pour le faire descendre, plus la résistance de frottement, 427.— Expression de cette puissance, 428., 433.— Cas où elle est moindre que celle qu'il faut employer pour élever le corps verticalement, 429.— Cas où le Plan incliné facilite le mouvement, 429., 430., 431.— Ce qui arrive lorsque le plan est horizontal, 430.— Que la puissance ne peut jamais être zéro, 431.— Que le plan étant vertical, la puissance pour faire monter le corps le long du Plan est égale à celle qu'il faut employer pour l'élever verticalement, 432.— Ce qui arrive lorsque le Plan est très-dur, 434.— Cas où la puissance qui fait monter le corps doit être la plus grande possible. Expression de cette puissance, & qu'elle peut être plus grande que celle qu'il faut pour élever le corps verticalement, 435., 436.— Valeur du sinus de l'inclinaison qui répond à ce cas extrême, 435 (Note).— Que le minimum de la puissance ne peut avoir lieu, à moins que le sinus de l'inclinaison ne soit négatif, 437.— Relation de la puissance qui fait monter le corps sur le plan, avec la vitesse qu'il doit prendre, 438., 439., 440.— Trouver l'espace parcouru en montant par la relation avec la vitesse, 442., 443.— *Idem*, par sa relation avec le temps employé à le parcourir, 444., 445.

PORES sont la cause que les parties des corps cèdent plus ou moins dans le choc; ce qui produit les enfoncements, cavités, ou impressions, 237., 238.

POULIE, 515 jusqu'à 530.— Se réduit au treuil dont les leviers sont égaux, 116. V. Treuil. — Rapport entre les puissances, 517.— Que la force pour vaincre le frottement est proportionnelle à celle qu'il s'agit de surmonter, 518.— Valeur de la plus grande & de la plus petite puissance, 519.— Que la plus petite ne peut avoir lieu dans la Poulie, 520.— Que pour la plus grande puissance il faut que le rayon de l'axe soit le plus petit qu'il est possible, 521.— Déterminer si dans la Poulie le mouvement doit se faire sur le roquet, ou sur l'axe fixe, 523.— Qu'il est possible que le mouvement se fasse sur le roquet, 524.— Que le frottement étant nul, le mouvement se fait indifféremment sur l'axe, ou sur le roquet,

525.— Que la Poulie fixe n'augmente point l'effet de la puissance, 526.— Déterminer la relation entre les puissances & la force qui agit sur le point où la Poulie est fixée, 527.— Poulie mobile, 528.— Relation entre les puissances dans la Poulie mobile, 529.— Plus grande & plus petite valeur de ces puissances, 530.

PRESSION, 231.

PUISSANCE, constante, variable, positive, ou négative. 13. V. Force.

RAYON de rotation, 220. V. Rotation.

REACTION est opposée à l'action, & lui est égale, 22

REPOS, 4.

RESISTANCE, V. Force, Moments.— Résistances horizontales qu'éprouvent les corps mus dans les fluides, & au contraire, 638 jusqu'à 674.— Trouver les Résistances horizontales qu'éprouve un corps mu dans un fluide, 638.— *Idem*, pour un parallépipède rectangle, &c. 639.— Cas où le fluide ne peut passer par-dessus le parallépipède par l'effet de la dénivellation, 640., 645.— Où la face supérieure est de niveau avec la superficie du fluide, 641., 647., 649., 651.— Où l'on néglige la dénivellation, 642.— Circonstances où l'on peut faire cette négligence, 643.— Doutes sur la théorie des résistances, & que les principes de Mariotte sur ce sujet sont défectueux, 644.— Résistance absolue n'est que les deux tiers de celle que fournit la théorie, 644.— Trouver la Résistance horizontale du même parallépipède dans d'autres cas, 645.— *Idem*, quand le parallépipède est entièrement submergé, 648., 650., 652., 655.— Réduction de la formule en série, 653.— Pour le cas où le parallépipède est submergé à une très-grande profondeur, 654.— Que la Résistance du parallépipède ne dépend point de sa longueur, 657.— Qu'elles sont les memes pour un quadrilatère, 658.— Trouver la même Résistance horizontale, le parallépipède ayant ses côtés inclinés à l'horizon, 659.— Réduction d'une partie de la formule en série, 660.— Cas où l'on néglige la dénivellation, 660.— Où l'angle d'inclinaison & la vitesse sont infiniment petits, 662.— Résistance horizontale qu'éprouve un cylindre qui se meut horizontalement dans une direction perpendiculaire à son axe, 663.— Autre méthode appliquée à la Résistance du cylindre, de la sphere, &c. 664. (Note).— Résistance horizontale qu'éprouve un corps quelconque, 665.— Son expression pour deux petits quadrilatères correspondants, 666.— Réduction d'une partie de la formule en série. — Que la première partie de la formule suit la raison des simples vitesses, & la seconde celle de leurs quarrés; & cas où cette seconde partie est positive ou négative, 667., 669.— Note sur le cas qui convient à la Marine, 667.— Cas où le corps est submergé à une grande profondeur, 668.— Où la partie postérieure est égale & semblable à la partie antérieure, 669.— Où le corps est submergé à une grande profondeur, 670.— Expression de l'effet de la dénivellation, 671.— Ce que devient cette expression lorsque les dénivellations ne sont pas excessives, 672.— Que les Résistances horizontales qui proviennent de la dénivellation, suivent la raison des quatrièmes puissances des vitesses, 673.— Résistance horizontale qui agit sur un corps quelconque, est comme trois quantités, une comme les simples vitesses, l'autre comme leurs quarrés, & la troisième comme leurs quatrièmes puissances, 674.— Résistances verticales qu'éprouvent les corps mus dans les fluides, & au contraire, &c. 675 jusqu'à 693.— Trouver la résistance verticale qu'éprouve un parallépipède qui se meut horizontalement, étant entièrement submergé, &c. 675.— Cas où c'est le parallépipède

qui se meut, & non le fluide, 676.— Où le parallépipède se réduit à un plan, 677.— Où il est submergé à une grande profondeur, 678.— Où le mouvement est vertical, 679.— Où le mouvement est horizontal, 680.— Que ce dernier cas est le même que celui où le parallépipède est en repos, 681.— Cas où le mouvement se fait vers le haut, 682, 684.— Où c'est le fluide qui se meut, 683.— Où le parallépipède se réduit à un plan, 685.— *Résistance* qu'éprouve le même parallépipède, si sa surface supérieure étant hors du fluide, 686.— Cas où c'est le parallépipède qui se meut, 687.— Où le mouvement est vertical, 688.— Distinction des cas où le mouvement se fait vers le haut ou vers le bas, dans une circonstance particulière, 689.— Cas où le corps est sans mouvement, 690.— Où le mouvement est horizontal, 691.— Où c'est le fluide qui se meut, 692.— Où il se meut verticalement, 693.

Quantité dont les dénivellations produites par quelques surfaces, altèrent les forces & les Résistances qu'éprouvent d'autres surfaces, 694 jusqu'à 735.— La dénivellation qui provient de l'action d'une surface, s'étend tout autour d'elle, en formant une parabole égale & semblable, 694, 695, 696.— Que les dénivellations produisent des *Forces* positives, ou négatives, qui agissent sur les surfaces qu'elles environnent, & altèrent également les vitesses avec lesquelles le fluide jailliroit par un orifice ouvert dans ces surfaces, 697.— Cas où la surface est plane, 698.— Trouver la vitesse avec laquelle le fluide jailliroit par un orifice ouvert dans une surface, en ayant égard à l'effet de la dénivellation produite par une autre surface, 699.— Trouver la *Force* horizontale qui agit sur une surface plane choquante, entièrement submergée, en ayant égard à la dénivellation que produit une autre surface choquante, 700 jusqu'à 704.— *Idem*, pour une surface choquée, 705, 706.— 707.— *Idem*, pour une surface choquée entièrement submergée, en ayant égard à la dénivellation que produit une autre surface plane choquante, 708 jusqu'à 712.— Lorsque la surface choquée s'étend hors du fluide, 713 jusqu'à 718.— Lorsque les surfaces choquante & choquée se réduisent à une seule, 719.— Trouver les *Forces* horizontales qui agissent sur une surface choquante, ou choquée, lorsqu'elles sont séparées par quelque distance, 721 jusqu'à 726.— Trouver la *Résistance* horizontale qu'éprouve un parallépipède rectangulaire, en ayant égard à la force que la dénivellation, produite par la surface choquante, communique à la surface choquée, 725.— Cas particulier, 727.— Si le parallépipède se réduit à un plan, 728.— *Résistance* du parallépipède est plus grande que celle du plan, 729, 730.— Est double de celle du plan, lorsque la vitesse est fort petite, 731.— Le parallépipède étant enfoncé à une grande profondeur dans le fluide, 732.— *Résistance* d'un parallépipède dont la base est un carré, 732.— *Idem* d'une sphère, 733.

1. *Des surfaces & des solides de moindre Résistance*, 736 jusqu'à 791.— Trouver la ligne ou la surface qui jouisse d'une certaine propriété dans le plus haut ou le plus bas degré, &c. 736.— Trouver la figure que doit avoir une surface plane verticale, donnée de grandeur, pour qu'elle éprouve la plus grande ou la moindre *Résistance*, 737.— *Idem*, en ayant égard à la dénivellation, 737.— Que cette figure est celle d'un rectangle, si la dimension horizontale est déterminée, 738.— Que les dimensions du rectangle dépendent non seulement de la vitesse, mais encore de l'angle sous lequel le fluide le frappe, 740.— Moindre *Résistance* qu'éprouve le rectangle, 742.— Trouver la ligne qui doit terminer un plan horizontal, pour qu'il éprouve la plus grande ou la moindre *Résistance*, 744 jusqu'à 752.— Autre cas, 753 jusqu'à 765.— Qu'un corps com-

posé de deux prismes triangulaires, éprouve moins de *Résistance* que s'il étoit terminé par quelque surface courbe : condition pour que cela ait lieu, 764, 765.— La longueur & la largeur d'un plan horizontal étant donnée, trouver l'endroit où l'on doit placer la plus grande largeur, pour que la *Résistance* soit la plus grande ou la moindre qu'il est possible, 766 jusqu'à 770.— Trouver la relation entre la largeur & la profondeur que doit avoir un corps d'un volume constant, pour qu'il éprouve la moindre *Résistance* dans le fluide, 771 (Note).— Difficulté de calcul que présente ce problème, 771, (Note).— Qu'un double prisme dont les deux bases horizontales sont égales, éprouve moins de *Résistance* que si l'inférieure étoit plus petite que la supérieure, 772.— Que c'est la même chose pour tout autre corps, 773.— Trouver la ligne qui doit terminer un plan horizontal, pour qu'en renfermant le plus grand, ou le moindre espace, il éprouve la plus grande, ou la moindre *Force* possible, 774.— Défaut dans le calcul de l'Auteur, 774 (Note).— *Idem*, pour la plus grande, ou la plus petite *Résistance*, 775, 791.— Pour une partie de la *courbe*, 790.— Table des abscisses & des ordonnées de la courbe qui, en renfermant le plus grand, ou le moindre espace, éprouve la moindre, ou la plus grande *Résistance*, 791.— Vérification de la loi des *Résistances*, App. I & II, pag. 372 & 393. V. *Cervolant*.— Application de notre théorie aux expériences de *Smooton*, & leur accord parfait avec elle, tandis que l'ancien système en est fort éloigné, App. II, pag. 393.

RICHEN fait des expériences à Cayenne sur la longueur du pendule ; & est le premier qui ait soupçonné la diminution de la pesanteur, en allant vers l'équateur, 373 (Note.)

ROTATION d'un système, 129 jusqu'à 219.— Formule de l'angle de *Rotation* pour deux corps liés entre eux, & animés par des puissances parallèles, & Notes pour le développement du calcul, 129 (Note), 136 (Note).— Vitesse d'un des corps, 131.— Distance perpendiculaire des corps à une ligne parallèle à la direction des puissances, qui passe par le centre des masses, 135.— Corps supposés réunis à leur centre de masses, 137.— La somme des moments étant égale à zéro, le système ne tourne point, 138.— *Rotation* se fait dans le plan qui coïncide avec les directions des puissances, & avec la droite qui passe par le centre des masses, 139.— Un des corps étant infini, le centre des masses coïncide avec lui, 141, 174.— Angle de *Rotation* pour ce cas, 175, 178.— Expression de l'angle de *Rotation* pour un corps obligé de tourner autour d'un point fixe, 142 (Note).— *Idem*, lorsqu'il n'y a qu'une seule puissance & deux corps, 143.— Cas où la puissance fait le même effet que s'il n'y avoit qu'un seul corps, 144.— Que le lieu du corps est indifférent, pourvu qu'il soit toujours à la même distance du point fixe, 145.— Pour trois corps animés de deux puissances, 146.— Pour quatre corps animés de deux puissances, 147.— Pour un nombre quelconque de corps, 148.— Pour un corps animé de deux puissances, 149.— *Idem*, pour un nombre quelconque de corps animés de trois puissances, 151.— *Idem*, animés de quatre puissances, 152.— Pour un nombre quelconque de corps animés par un nombre quelconque de puissances, 153, 154, 157, 158, 168, 175, 178.— Les mêmes, pour un corps fini, animé par un nombre quelconque de puissances, 173.— L'angle de *Rotation* n'éprouve aucun changement, quelque situation qu'on donne aux puissances, qu'on les divise, qu'on les réunisse, &c. pourvu que leur somme soit toujours la même, & que la distance perpendiculaire de leur centre à la direction qui passe par le centre des masses soit toujours la même, 155.— La même chose arrive, quelque changement qu'on fasse éprouver aux masses, pourvu que la somme

des moments d'inertie soit constante; 156. — La Rotation est la même, le système étant libre, que si le centre des masses étoit fixe, 159. — Conséquence, 164. — Les formules de l'angle de Rotation sont les mêmes, lorsque tous les corps, ainsi que toutes les puissances, ne sont pas dans un même plan, 160, 166. — Que les corps peuvent être divisés, ou réunis, 161, 162. — Qu'il n'est pas nécessaire que les corps pris deux à deux soient dans la même droite, qu'ils peuvent être plus hauts, ou plus bas; qu'il n'y aura que le centre des masses qui changera, 169. — La même chose pour les puissances, 170. — Que l'axe de Rotation varie lorsqu'on change le centre des puissances; & position qu'il prend, 171. — La Rotation le faisant autour d'un axe fixe qui passe par le centre des masses, elle est la même que si le système ou le corps étoit libre, 179. — Angle de Rotation pour les corps pesants, 182. — Angle de Rotation du pendule simple, 184. — Pour le cas où la gravité seule agit, 185. — *Idem*, du Pendule composé, 187. — Angle de Rotation dans les Leviers, 198, 199.

De l'Axe & du Rayon de Rotation, 222 jusqu'à 229. — Trouver l'Axe de Rotation d'un système, 221. — Que cet Axe ne peut être fixe, à moins que le centre de gravité ne le soit, 222. — Qu'il n'y a point d'Axe fixe, à moins que le système ne tourne sur celui qui passe par son centre de gravité, 223. — Expressions du Rayon de Rotation, 224, 225. — Qu'il est infini pour les corps qui tombent librement, 226. — Qu'il est zéro lorsque les puissances se détruisent mutuellement, 227. — Réflexions sur l'Axe & le Rayon de Rotation qu'ont assigné MM. Bouguer & L. Bernoulli, 224. — Angle de Rotation produit par la force perpendiculaire qui anime un corps posé sur une surface, 376. — Cet angle est nul lorsque la perpendiculaire abaissée du centre de gravité sur le plan, coïncide avec le point d'appui, 377. — Condition essentielle pour que cela ait lieu lorsque le corps est appuyé par deux points, 378. — La même chose, quel que soit le nombre de points par lesquels le corps appuie sur la surface, 379. — Que la puissance parallèle agit toujours, quoique la Rotation soit nulle, 380. — Angle de Rotation que doivent prendre les corps posés sur des plans inclinés lorsqu'ils sont sans mouvement progressif, 446, 447, 448. — *Idem*, lorsque la gravité est la seule puissance active, 450. — Cas où cet angle devient nul, 449. — Que la Rotation a toujours lieu, lorsque la verticale qui passe par le centre de gravité, tombe hors de l'appui, 451. — Angle de Rotation lorsque le frottement est vaincu, & que le point d'appui est déjà en mouvement, 452, 453, 454. — Que, dans ce cas, la Rotation se fait vers la partie supérieure, quoique la verticale qui passe par le centre de gravité, passe aussi par l'appui, 455, 456. — Erreur de tous les Auteurs sur ce point, 457. — Que toutes les Rotations possibles peuvent se réduire à trois; qu'il est seulement nécessaire de les considérer par rapport à deux axes, l'un horizontal, & l'autre vertical, 925.

De la Vitesse angulaire avec laquelle les corps flottants tournent, 929 jusqu'à 946. — Trouver la Vitesse angulaire avec laquelle les corps flottants tournent sur un axe quelconque, étant animés par une, ou par plusieurs puissances, 929. — Plus les moments d'inertie sont grands, plus il faudra de temps au corps pour acquérir une Vitesse angulaire donnée, 930. — Nécessité absolue que les résistances agissent dans la Rotation; & qu'on n'en peut faire abstraction, comme l'ont fait MM. Bouguer & Euler, 931. — Expression de la Vitesse angulaire des corps flottants, 932 (Note), 933. — Raison entre la stabilité d'un cylindre & le moment résistant qui résulte de la Rotation, 939. — Stabilité. — Trouver la plus grande, ou la moindre Vitesse avec laquelle tournent les corps flottants, 943. — Action que supportent les fibres d'un corps flottant pour causer de la Rotation; & que la plus grande a lieu lorsqu'elle commence, & lorsqu'elle finit, 944. — Que la plus grande adhérence dépend pas de la résistance du fluide, 945. — Action que supporte une partie déterminée du corps flottant, telle qu'elle seroit un levier qui lui seroit uni, 946.

ROUET, V. Poulie.

ROULETTE, V. Cycloïde.

SECTEUR d'hyperbole équilatère, App. I, Art. 41.

SEGMENT sphérique (solidité du), 306 (Note).

SMEATON. Expériences de cet Auteur sur la résistance des fluides; accord parfait de notre théorie avec les résultats, & leur opposition avec l'ancien système, Ap. II, p. 35.

SPIRE, V. Vis.

STABILITÉ, V. Inclinaison, Moment, Rotation. Trouver la Stabilité d'un corps flottant quelconque qui se meut horizontalement dans une direction perpendiculaire à l'horizontale de rotation, 830, 833. — Moments qui résultent des deux dénivellations, 832. — Moments, lorsque le plan vertical qui coïncide avec l'axe, partage le corps en deux parties égales & semblables, 832. — Qu'ils se réduisent aux seuls moments verticaux, lorsque le corps est sans mouvement horizontal, 834. — Que ces moments sont égaux au produit du poids du corps multiplié par la distance horizontale du centre de gravité à la verticale qui passe par le centre de volume, 835. — Valeur de ce produit pour les corps pesants, 836. — Valeur de ce produit pour les corps flottants, 837. — Le centre de volume étant plus bas que le centre de gravité, les moments sont positifs, 838. — Que ces moments verticaux peuvent être positifs, ou négatifs, ou égaux à zéro, 836, 837. — Que cette expression est la même pour les autres corps; mais la distance du centre de volume au centre de gravité est variable à chaque inclinaison, 839. — Le centre de volume étant plus bas que le centre de gravité, les moments sont positifs, 840. — Moments résultant des poids doivent être pris en entier, tandis que ceux des résistances doivent être réduits aux deux tiers, 841. — Trouver en général la Stabilité, le corps étant sans mouvement, 842 (Note). — Equation qui en résulte, 844. — Aux expressions du moment, le corps étant en mouvement, les inclinaisons étant toujours infiniment petites, 845. — Quantité à laquelle on peut réduire cette expression, 846. — Que doit ajouter les moments qui résultent de la dénivellation ainsi que ceux qui proviennent de l'action mutuelle des surfaces, à moins qu'ils ne soient susceptibles d'être négligés, 847. — Différence qui résulte de considérer les corps en mouvement, ou en repos, 848. — Trouver la Stabilité d'un parallépipède rectangulaire, 849. — Cas où le parallépipède est ou abaisse son extrémité choquante, ou bien demeure dans une situation horizontale, 851. — Trouver les moments qui pousse la base du parallépipède, & qui résultent de la dénivellation, 853. — *Idem*, lorsque la vitesse excède la longueur du parallépipède, 854. — Lorsqu'elle est égale, les moments ne peuvent augmenter par l'augmentation de la vitesse, 855. — Que ces moments sont positifs, 856. — Expression des moments du parallépipède, en tenant compte de l'effet de la dénivellation sur la base, 857. — Cas où le parallépipède tourne en élevant ou en abaissant son extrémité choquante, 858. — Que les moments ne dépendent pas seulement de la vitesse, mais encore de la disposition du parallépipède, 859. — Comme il est différent de considérer le corps en repos, ou en mouvement, 860. — De ce qui est cause que le parallépipède n'a

befoin d'un temps infini pour acquérir sa plus grande vitesse, 861.— Expression de la verticale comprise entre la perpendiculaire élevée sur un plan vertical, & l'axe, 862.— Trouver la *Stabilité* du parallépipède, sa base étant inclinée à l'horizon, 863.— Plus le centre de gravité sera bas plus le parallépipède élèvera avec force son extrémité choquante, 864.— Quantités dont la relation rend les moments positifs, ou négatifs, 865.— Que les moments de la base ne dépendent nullement de la situation du centre de gravité, 866.— Conditions pour que les moments soient positifs dès le premier instant, 867.— Trouver la *Stabilité* d'un cylindre, 869, 870.— *Idem*, lorsque la vitesse est zéro, 870.— Que l'expression précédente contient les moments de la déviation, 872.— Raison entre la *Stabilité* d'un cylindre, & le moment résultant qui résulte de la rotation, 939.

SUPERFICIE du fluide, 546.

SURFACE choquante, 598.

SURFACE choquée, 598.

SYSTEME de corps, 80.

TEMPS. V. *Mouvement, Espace, Vitesse, Percussion, Frottement.*

TEMPS, dans le mouvement uniforme, sont en raison directe de l'espace, & en raison inverse de la vitesse, 27.

TREUIL ou *Cabestan*, 424, 491 *jusq.* 541.— Qu'il est indifférent qu'il y ait plusieurs leviers, ou que ce soit une roue avec différentes puissances appliquées à sa circonférence, 492.— *Treuil* est un levier de la première, seconde ou troisième espèce, suivant la situation de la puissance par rapport à l'axe, 493.— Trouver la puissance nécessaire pour vaincre le frottement, & mettre la machine en mouvement, (Note) 494.— *Idem*, pour le cas où il y a deux leviers égaux & opposés, & des puissances égales appliquées à leurs extrémités, 506.— *Idem*, quand il y en a un plus grand nombre, 507.— Que c'est la même chose, lorsqu'au lieu de leviers, c'est une roue, 508.— Que la puissance nécessaire pour vaincre le frottement est toujours proportionnelle à celle qu'on applique au *Treuil*, 495.— Qu'elle est variable, 496.— Trouver la plus grande & la plus petite puissance qui peuvent vaincre le frottement, 497.— Avantage qui résulte de la coïncidence des leviers, 498.— *Idem*, de leur longueur, 499, 509.— *Treuil*, ne donne aucun avantage si les leviers sont égaux, lorsqu'ils coïncident, & est désavantageux si les leviers sont dans des situations opposées, 500.— Cas où le *Treuil* est désavantageux dans les deux cas, 501.— Déterminer les cas où le *Treuil* cesse d'être avantageux, les leviers étant dans des situations opposées, 502.— Avantage qui résulte de la diminution du rayon du cylindre, 503, 509.— Qu'en supposant le frottement nul, la situation des leviers est indifférente, & alors notre théorie convient avec celle de tous les Auteurs de Mécanique, 504.— Erreur dans laquelle ils sont tombés sur les effets du *Treuil*, 505.— *Treuil* une fois mis en mouvement avec une vitesse constante, continue à se mouvoir avec la même vitesse, en surmontant continuellement le frottement,

510, 511.— Frottement est le même dans le mouvement qu'au moment où il est surmonté, 510.— Expression de la puissance nécessaire pour maintenir le treuil en mouvement, avec une vitesse constante déjà acquise, dans le cas de la roue, & dans celui où il n'y a qu'une seule puissance, 510.— Qu'on peut faire entrer dans le calcul la pesanteur de la machine, 512.— Qu'il est avantageux que le poids de la machine s'oppose à la résistance à vaincre, 513.— Que l'action qui résulte du poids de la machine ne se fait point sentir dans le treuil vertical, 514.

TROCHOÏDE. V. *Cycloïde*, (Note.) 365.

VIS, 424, 478 *jusq.* 490. V. *Frottement, Plan incliné*.— Sa distinction en vis mâle & vis femelle, 478.— Spire, s'iet ou pas de la vis, 480.— Comment cette machine produit son effet, 481.— Que la *Vis* n'est pas une machine simple, lorsque le levier a plus de longueur que le rayon du cylindre, 482.— Trouver la puissance nécessaire pour la mettre en mouvement, en ayant égard au frottement, 483.— Cas où elle demeure sans mouvement, 484.— Une fois mise en mouvement avec une vitesse constante, elle continue avec cette vitesse tant que la puissance appliquée suffit pour vaincre le frottement, 486.— Le frottement étant nul, la puissance qui anime la vis, est à celle qu'elle doit vaincre, comme la hauteur du pas de la vis est à la circonférence que décrit la puissance, 486.— Que cette analogie est celle que donnent tous les Auteurs, & conséquences, 487.— Cas où la *Vis* rétrogradera, la puissance cessant d'agir, 488.— Trouver la relation entre la puissance appliquée à la *Vis*, & la vitesse avec laquelle elle se mouvra après avoir surmonté le frottement, 489.— *Idem*, entre la même puissance & l'espace que parcourt la *Vis* dans la direction de son axe, 490.

VITESSE, 6. V. *Mouvement, Espace, Temps, Percussion, Frottement, Centre.*

VITESSE absolue, relative, 7.— Que la vitesse absolue peut être un repos relatif; expression générale de ces vitesses, *ib.*— Dans le mouvement uniforme, la *Vitesse* est en raison directe de l'espace, & en raison inverse du temps, 26.— S'exprime par l'espace parcouru pendant une seconde, 28.— Formule de la différence entre la vitesse initiale d'un corps, & la vitesse à chaque instant de sa course, 30.— Développement de cette formule (Note.) 30.— La puissance étant constante, cette différence est, en raison directe, composée de la puissance & du temps, & en raison inverse de la masse, 31.— Cas où le corps est en repos lorsque la puissance commence son action, 32.— Cas du mouvement retardé, où le corps parvient au repos, 33.— Vitesse acquise dans le mouvement accéléré & perdue dans le retardé; & cas où ces vitesses sont égales, 34.— Vitesses des corps graves, 46, 50, 53.

VITESSE angulaire, 130. V. *Rotation.*

VOLUME peut être pris pour exprimer la masse, la densité étant uniforme, 521.— Volume de fluide déplacé par un corps flottant est égal au poids du corps, 561, 562.

WALLIS, (le Docteur) établit la résistance des fluides proportionnelle à la simple vitesse, 593.

FIN DE LA TABLE DES MATIERES.

SUPPLÉMENT à la Note ** de la page 137.

Pour s'affirmer d'une manière encore plus convainquante, que la quantité DH doit être plus grande pendant la rétrogradation, à égale distance de l'origine des x , on remarquera que quand même on supposeroit, avec l'Auteur, Art. 186, la dureté D sensiblement constante, l'amplitude H de l'impression, lorsque les corps ne sont pas parfaitement élastiques, est nécessairement plus grande dans la rétrogradation qu'au le choc réfléchi, à égale distance de l'origine des x , à cause que les particules ne peuvent pas se trouver alors dans leur première situation. Ainsi le produit DH est nécessairement plus grand, &c. &c.

Fautes à corriger dans quelques Exemplaires de ce premier Volume.

Page 11, lig. 15, en montant : lisez 1 pied $\frac{1}{2}$ par seconde.

Page 12, lig. 16 : lisez $\frac{1}{3}$ anglais.

Page 13, lig. 12 : lisez & non le $\frac{1}{2}$.

Page 47, lig. 2, en montant : lisez $\frac{1}{3}$.

Page 61, lig. 15, en montant : $u = \frac{a}{t}$, lisez $u = \frac{a}{t^2}$.

Page 68, lig. 7 : des espaces AG , EH , lisez des espaces suivant AG , EH .

Page 69, lig. 8 & 9 : on a $\frac{2Av^2}{a}$; $a - \frac{Vb}{v}$), lisez on a $b^2 = \frac{2Av^2}{a} (a - \frac{Vb}{v})$

Ibid. lig. 10 : ôtez la parenthèse.

Ibid. Note ** : mettez le signe = après la citation de l'article 36.

Ibid, lig. 13, en montant $\int \frac{dt}{A} f m a d t$) lisez $\int (\frac{dt}{A} f m a d t)$

Page 72, lig. 11, en montant : 1 m & n, lisez 1, m & n.

Page 73, lig. 10 : produiroit, lisez produiroient.

Page 74, lig. 9, en montant : FH , lisez Fh .

Page 81, lig. 15 : $dW = \frac{dt + \frac{1}{2}dt + \frac{1}{2}dt + \frac{1}{2}dt}{M}$, lisez $= \frac{adt + \frac{1}{2}dt + \frac{1}{2}dt + \frac{1}{2}dt}{M}$

Page 98 : mettez 163 à la place de 164, & vice versa.

Page 108, au folio il y a 106 pour 108.

Page 111, lig. 11 : $\frac{L^2 l}{P}$, lisez $\frac{L^2 l}{P}$

Page 126, lig. 16 : ce cel'on vient, lisez ce que l'on vient.

Page 142, lig. 11 : le dénominateur $DD^{\frac{1}{2}}Q(A+B)$ doit être $(DD^{\frac{1}{2}}Q(A+B))^2$

Page 144, Note, lig. 13 : ouvrez la parenthèse après le signe = de la seconde valeur de x :

Page 222, lig. 19 : horizontale, lisez horizontale.

Page 230, lig. 9, en montant : $\pm \frac{1}{8} u \sin$)², lisez $\pm \frac{1}{8} u \sin \theta$)².

Page 231, lig. 5, en montant : $a^{\frac{1}{2}} \pm \theta c \dots$ lisez $a^{\frac{1}{2}} \pm \dots$

Page 251, lig. 5 : $\frac{1}{6} a^{\frac{1}{2}} u \sin \theta \dots \sin \theta + \dots$ lisez $\frac{1}{6} a^{\frac{1}{2}} \sin \theta \sin \theta + \dots$

Page 261, à la fin de la ligne 7 : $\sqrt{y^2 + u^2} + H$, lisez $\sqrt{y^2 + u^2} + H$.

Page 264, lig. 4, agit, lisez agit. Lig. 5 : résistance, lisez résistance.

Page 268, lig. 3, en montant (641), lisez (651).

Page 269, lig. 13 : $\frac{1}{3} mc D^{\frac{1}{2}} \dots$ lisez $\frac{1}{3} mc D^{\frac{1}{2}} \dots$

Ibid, lig. 19 : $\frac{1}{3} mc D^{\frac{1}{2}} au \sin \theta$, lisez $\frac{1}{3} mc D^{\frac{1}{2}} au \sin \theta$.

Page 270, lig. 6 : $mcu \dots$ lisez $\frac{1}{3} mcu$.

Page 272, lig. 9 : $+ a^{\frac{1}{2}} u \sin \Delta$, lisez $+ \frac{1}{3} a^{\frac{1}{2}} u \sin \Delta$.

Page 273, lig. 3, en montant : mettre une barre à la seconde fraction;

Page 283, ligne dernière de la Note : $\sin \Theta - \sin \eta$, lisez $u (\sin \Theta + \sin \eta)$;

Page 292, lig. 14, en montant : $D^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{16} u$, lisez $D^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{16} u$.

Page 304, lig. 13, au dénominateur du second terme : $(e^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$, lisez $(e^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$;

Page 315, Note, lig. 14, en montant : $(A + gA +)$, lisez $(hA + gA + 6c)$.

Page 320, lig. 17 : ne soit pas beaucoup, lisez ne soit beaucoup.

Page 329, ligne dernière : concevable, lisez convenable.

Page 368, lig. 9, en montant : $t = \sqrt{\left(\frac{S}{K P_1}\right)}$, lisez $t = \sqrt{\left(\frac{S}{K P_1}\right)}$.







